دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

عنوان

عملگرهای پذیرنده نرم

استاد راهنما

دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور

دکتر ابراهیمی

نگارنده

مصطفی کافی مقدم

۱۳۹۰

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

عنوان: عملگرهای پذیرنده نرم

نام نویسنده: مصطفی کافی مقدم

استاد راهنما: دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور: دکتر ابراهیمی

دانشکده: علوم ریاضی   گروه: ریاضی محض   رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۶/۳۰   تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۰۶/۳۰

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   تعداد صفحات: ۶۳

چکیده پایان‌نامه : در این پایان نامه قصد داریم عملگرهای روی فضاهای هیلبرت را که نرم خود را می پذیرند، معرفی کنیم. در واقع آن دسته عملگرهایی را بررسی می‌کنیم که برای آنها x_0ی عضو کره واحد دامنه موجودست که نرم عملگر با نرم عملگر در آن نقطه مساوی است. بدین منظور ابتدا شرایطی که عملگرها در حالت کلی در این خاصیت صدق می‌کنند را بررسی می‌کنیم و سپس در مورد عملگرهای شناخته شده بحث می‌کنیم و سعی می‌کنیم شرایطی روی این عملگرها قرار دهیم که در این شرط صدق کنند. همچنین نشان خواهیم داد که این دسته از عملگرها تشکیل یک جبر نمی‌دهند.

در پایان هم حدس مهمی را بیان می‌کنیم که طی آن ساختار این دسته عملگرها را تا حدودی مشخص می‌نماید.

واژگان کلیدی: برد عددی، یکمتری، عملگر از بعد متناهی، عملگر تصویری، عملگر خود الحاق، عملگر فشرده، عملگر کراندار، عملگر مثبت، عملگر یکانی، فضای هیلبرت، مقدار ویژه، نقطه فرین.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

تقدیم به همه آنهایی که

در جست و جوی علم اندوزی اند.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گذاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان و دلگرمی من بودند.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مصلحیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که ایده این کار از ایشان بود و قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر ابراهیمی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان لازم می‌دانم از جناب آقای موسوی که در فراهم آوردن بسته زی پرشن این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر کنم.

مصطفی کافی مقدم
۱۳۹۰

فهرست مطالب

مقدمه

دراین پایان نامه عملگرهای روی فضاهای هیلبرت مختلط که نرم خودرادر کره واحد می‌پذیرند معرفی می‌کنیم. بعضی از نتایج مهم درباره عملگرهای موسوم به AN را بررسی می‌کنیم. دسته عملگرهای AN شامل جبر عملگرهای فشرده است. همچنین عملگرهایی که مینیمم‌شان را در کره واحد می‌گیرند را مطالعه می‌کنیم. در پایان این تحلیل، یک حدس را در رابطه با ساختار عملگرهای AN مثبت پیشنهاد می‌کنیم.

لذا روی دسته عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط (یاروی زیرفضایی از آن) متمرکز شویم که روی کره واحد نرمشان را می‌پذیرند.

(یک زیر فضا را همواره بسته فرض می‌کنیم) و به آن پایای تحت یک عملگر گوییم هر گاه آن عملگر زیر فضا را به توی خودش بنگارد.

فصل ۱

پیش گفتار

۱.۱ هدف و بعضی نتایج

در این قسمت بعضی از نتایج جدید روی عملگرهای کراندار در فضاهای هیلبرت که نرم را می‌پذیرند، توصیف می‌کنیم. در حقیقت می‌خواهیم بیشتر عملگرهایی که در خواص N و AN صدق می‌کنند را مطالعه کنیم. هدف اصلی این فصل ارائه کردن یک توصیف کامل از عملگرهایی است که نرم را مطلقاً می‌پذیرند. سعی خواهیم کرد به حدسی که در انتهای این پایان نامه آمده است جواب مثبت دهیم. پس نظریه عملگرهای AN را گسترش می دهیم.

فرض کنیم H و K فضاهای هیلبرت مختلط باشند و $L(H,K)$ فضای باناخ عملگرهای خطی و کراندار از H به K باشد که از این به بعد آن را با $L(H,H)=L(H)$ نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که فضای $L(H)$ همراه با نرم $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant ۱}\|Tx\|$ باناخ است. می‌دانیم که اگر H یک فضای متناهی‌البعد باشد آنگاه گوی واحد بسته در H فشرده است. (چون بسته و کراندار است) و سوپریمم فوق به ماکزیمم تبدیل می‌شود. (چون سوپریمم خود را روی گوی واحد بسته اختیار می‌کند.)

به عبارت دیگر اگر بعد H متناهی باشد و $T \in L(H,K)$ باشد آنگاه وجود دارد یک $x \in B_{۱}^{H}(۰)$ به طوری‌که $\|Tx\|=\|T\|$. اگر چه در فضاهای با بعد نامتناهی این خاصیت مهم لزوما"وجود ندارد. البته برای عملگرهای فشرده صحیح باقی می‌ماند. به این معنی که دنباله (x_n) در گوی واحد بسته Hوجود دارد به طوری‌که $\|Tx_n\|\longrightarrow\|T\|$(چون طبق خاصیت سوپریمم، این دنباله هست) طبق قضیه باناخ-آلاقلو یک عنصر x در گوی واحد بسته هست به طوری‌که زیر دنباله (x_{n_k}) از (x_n) به آن x به طور ضعیف همگراست (چون H انعکاسی می‌باشد پس طبق قضیه گوی واحد بسته H به طور ضعیف فشرده است.) بنابراین چون T یک

عملگر فشرده می‌باشد پس طبق این قضیه که (اگر $T: X \longrightarrow Y$ فشرده خطی باشد و $x_n \xrightarrow{w} x$ در نتیجه $\{Tx_n\}$ در Y به Tx همگرای قوی می‌باشد) داریم:

$$\|Tx_{n_k}\| \longrightarrow \|Tx\|$$

پس

$$\|T\| = \|Tx\|$$

بنابراین هر عملگر فشرده نرمش را روی کره واحد می پذیرد.

اگر H یک فضای هیلبرت با پایه یکانی E باشد آنگاه یک عملگر T را هیلبرت-اشمیت [1] می‌نامند هرگاه

$$\sum_{u_\alpha \in E} \|Tu_\alpha\|^۲ < \infty$$

ازطرفی می‌دانیم؛ $\sum_{u_\alpha} \|T^* u_\alpha\|^۲ = \sum_{u_\alpha} \|Tu_\alpha\|^۲ < \infty$ پس مجموعه $F = \{u_\alpha | T^* u_\alpha \neq ۰\}$ شماراست.

حال فرض کنید $F = \{w_n\}$. دراین صورت برای هر x عضو H داریم

$$Tx = \sum_{u_\alpha} \langle Tx, u_\alpha \rangle u_\alpha = \sum_{u_\alpha} \langle x, T^* u_\alpha \rangle u_\alpha = \sum_{n \geqslant ۱} \langle x, T^* w_n \rangle w_n$$

اگر E فقط شامل یک تعداد متناهی باشد آنگاه بعد برد T متناهی خواهد بود و بنابراین دراین حالت T فشرده است. حال فرض کنید که E نامتناهی باشد. برای $m = ۱, ۲, ۳, ...$ فرض کنید

$$T_m x = \sum_{n=۱}^{m} \langle x, T^* w_n \rangle w_n \quad ; \forall x \in H$$

دراین صورت $\{T_m\} \in L(H)$ از بعد متناهی می باشد و بنابراین فشرده است. از طرفی با استفاده از خاصیت $\{w_n\}$ داریم،

$$\begin{aligned} \|(T_m - T)x\|^۲ &= \| \sum_{n=m+۱}^{\infty} \langle x, T^* w_n \rangle w_n \|^۲ \\ &= \sum_{n=m+۱}^{\infty} \| \langle x, T^* w_n \rangle w_n \|^۲ \\ &= \sum_{n=m+۱}^{\infty} | \langle x, T^* w_n \rangle |^۲ \\ &\leqslant \sum_{n=m+۱}^{\infty} \|x\|^۲ \|T^* w_n\|^۲ \quad ; \forall x \in H \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

بنابراین چون T عملگر هیلبرت-اشمیت است، لذا

$$\|T_m - T\| \leqslant \Big(\sum_{n=m+۱} \|T^* w_n\|^۲ \Big)^{۱/۲} \longrightarrow ۰$$

[1] Hilbert_Schmidt

پس داریم $T_m \longrightarrow T$ درنتیجه T فشرده می باشد. بنابراین نتیجه گرفتیم که عملگرهای هیلبرت–اشمیت فشرده می باشند ولذا طبق آنچه بیان شد نرمشان را روی کره واحد می‌پذیرند.

حال طبیعی است که این سوال را پیشنهاد کنیم؛ چگونه عملگرهایی که نرمشان را روی کره واحد می‌پذیرند، توصیف کنیم؟

تعریف ۱.۱.۱. یک عملگر $T \in L(H,K)$ در خاصیت N صدق می‌کند هرگاه یک عنصرx درکره واحد باشد به طوری‌که

$$\|T\| = \|Tx\|$$

تحدید یک عملگر فشرده به یک زیر فضا، یک عملگر فشرده است. (اگر Mزیر فضای Hباشد در این صورت چون داریم:

$$\overline{T(B_1^M(0))} = \overline{T(B_1^X(0) \cap M)} \subseteq \overline{T(B_1^X(0))}$$

لذا چون T فشرده است پس سمت راست فشرده می‌باشد لذا زیر مجموعه بسته از مجموعه فشرده نیز فشرده است.) در نتیجه می‌توان مشاهده کرد که اگر (x_n) در اشتراک گوی واحد بسته H و M به عنوان زیر فضایی از H باشد و $x_n \xrightarrow{w} x$ آنگاه $x \in M$. از آنجایی که M بسته می‌باشد. در غیر این‌صورت اگر $x \notin M$ در این صورت $x^* \in H^*$ موجودست که

$$x^*(x) \neq 0 \quad \& \quad x^*|_M = 0$$

ولی طبق فرض داریم $x^*(x_n) = 0 \longrightarrow x^*(x) \neq 0$ که تناقض است. حال برای اثبات این‌که $T|_M$ هم خاصیت N را دارد اگر

$$\{x_n\} \subset B \cap M, \quad x_n \xrightarrow{w} x$$

آن‌گاه طبق آنچه بیان شد $x \in B \cap M$. که بیانگر این است که عملگر فشرده نرم را مطلقاً می پذیرد.

تعریف ۲.۱.۱. $T \in L(H,K)$ یک AN عملگر است (در خاصیت AN صدق می‌کند) هرگاه برای هر زیر فضای

$$\{0\} \neq M \subset H$$

$T|_M$ درخاصیت N صدق می کند.

در پایان این قسمت بعضی از نمادگذاری‌ها ونشانه‌ها را که در آنالیز استفاده می‌شود را معرفی می‌کنیم. در قسمت ۲ عملگرهایی که در خاصیت N صدق می‌کنند را مطالعه می‌کنیم و همچنین رابطه بین خاصیت Nو آنالیز محدب و توسیع طبیعی N^* و AN^* را نیز بررسی می‌کنیم. قسمت ۲ را با محاسبه تابعی برای عملگرهایی

که در خاصیت N صدق می‌کنند به پایان می‌رسانیم. بخش آخر که مهمترین بخش می‌باشد به‌خصوص مثال اصلی ۲.۱.۳ و قضایای ۶.۱.۳، ۱۲.۱.۳ و ۸.۲.۳. در پایان قصد داریم حدسی در باره ساختار عملگرهای AN داشته باشیم.

۲.۱ نمادگذاری و پیش‌نیازها

به وسیله $\langle H, \langle \circ, \circ \rangle\rangle$ همواره یک فضای هیلبرت مختلط را نامگذاری می‌کنیم. کره واحد در H را با S یعنی $S := \{x | \|x\| = ۱\}$ و گوی واحد بسته را با B یعنی $B := \{x | \|x\| \leqslant ۱\}$ نمادگذاری می‌کنیم. فضای $L(H)$ فقط یک فضای باناخ نیست بلکه یک جبر نیز می‌باشد و علاوه بر آن توان عملگر $T \in L(H)$ را به صورت

$$T^n = TT^{n-1}, \quad T^{\circ} = I$$

تعریف می‌کنیم.

اگر $T \in L(H, K)$، در این صورت عملگر الحاقی T را با نماد $T^* \in L(K, H)$ نشان می‌دهیم که

$$\|T\| = \|T^*\|$$

طیف $T \in L(H)$ را به صورت $(\sigma(T))sp(T)$ نشان می‌دهیم که مجموعه همه اعداد مختلط λ است به طوری‌که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نیست. بنابراین $T - \lambda I$ یک به یک یا برو نمی‌باشد.

به λ یک مقدار ویژه برای T گویند هرگاه $x \in H$ موجود باشد به طوری‌که $Tx = \lambda x$. یعنی فضای $N(T - \lambda I)$ غیرصفر باشد. مجموعه تمام مقادیر ویژه T را با نماد σ_e نشان می‌دهیم. همچنین به x یک بردار ویژه وابسته به λ گوییم.

فرض کنید (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد. مهمترین مثال فضای هیلبرت $L^{۲}(X, \mu)$ می‌باشد به‌خصوص وقتی که μ یک اندازه شمارش[1] نیز باشد با $l^{۲}(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک عملگر $P \in L(H)$ را مثبت گوییم هرگاه برای هر x عضو H داشته باشیم، $\langle Px, x\rangle \geqslant \circ$، که با $P \geqslant \circ$ نمایش می‌دهیم.

حال مشاهده خواهیم کرد که اگر $P \geqslant \circ$ باشد آنگاه $\sigma(P) \subseteq [\circ, \infty)$.

اگر $W(P) = \{\langle Px, x\rangle | \|x\| = ۱\}$ و P از پایین کراندار باشد، یعنی یک $\alpha > \circ$ موجود باشد که

$$\alpha \|x\| \leqslant \|Px\|$$

و $\sigma_a(P) = \{\lambda |$ از پایین کراندار نیست $P - \lambda I\}$ را تعریف کنیم؛ در این صورت داریم:

$$sp(P) = \sigma_e(P) \cup \sigma_a(P)$$

[1] counting measure

چون اگر $\lambda \in \sigma_e(P)$ آنگاه $\lambda \in sp(P)$. و اگر $\lambda \in \sigma_a(P)$ بنابراین (از آنجا که T از پایین کراندار است اگر وفقط اگر T^{-1}کراندار باشد) اگر $(P-\lambda I)^{-1}$ موجود باشد کراندار نمی‌باشد پس $\lambda \in sp(P)$.

اکنون اگر $\lambda \not\in \sigma_e(P)$ و $\lambda \not\in \sigma_a(P)$ آن گاه $P - \lambda I$ یک‌به‌یک است. دراین صورت $N(P-\lambda I) = \{0\}$.

پس از آنجا که

$$\{0\} = N(P-\lambda I) = R(P^* - \bar{\lambda} I)^{\perp}$$

داریم

$$H = \overline{R(P^* - \bar{\lambda} I)}$$

حال اگر دنباله $\{y_n\} \subseteq R(P^* - \bar{\lambda} I)$ باشد به طوری‌که $y_n \to y$، که $y \in H$ دلخواه است، آنگاه $\{x_n\} \subseteq H$ موجودست که $(P^* - \bar{\lambda} I)(x_n) = y_n$.

اما داریم؛

$$\exists \alpha > 0; \quad \alpha \|x\| \leqslant \|(P-\lambda I)(x)\|$$

و از آنجا که P خودالحاق است بنابراین نرمال است لذا داریم

$$\|P(x)\| = \|P^*(x)\|$$

چون

$$\begin{aligned} \|P(x)\|^2 &= \langle P(x), P(x) \rangle \\ &= \langle x, P^*P(x) \rangle \\ &= \langle x, PP^*(x) \rangle \\ &= \langle P^*(x), P^*(x) \rangle \\ &= \|P(x)^*\|^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leqslant \frac{1}{\alpha} \|(P^* - \bar{\lambda} I)(x_n - x_m)\| \\ &= \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\| \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

لذا $\{x_n\}$ کوشی است، پس $x \in H$ موجودست که $x_n \longrightarrow x$. بنابراین؛

$$y_n = (P^* - \bar{\lambda} I)(x_n) \longrightarrow (P^* - \bar{\lambda} I)(x) = y$$

پس

$$H = R(P^* - \bar{\lambda} I) \tag{4.1}$$

بنابراین $(P^*-\bar{\lambda}I)$ یک به یک و برو است و $\bar{\lambda}\notin sp(P^*)$ لذا $\lambda\notin sp(P)$.

حال می‌توان نشان داد $sp(P)\subseteq\overline{W(P)}$.

چون اگر $\lambda\in sp(P)=\sigma_e(P)\cup\sigma_a(P)$، در این صورت اگر $\lambda\in\sigma_e(P)$ آنگاه xی هست که $\|x\|=1$ و $Px=\lambda x$ بنابراین

$$\langle Px,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle \quad = \quad \lambda\langle x,x\rangle=\lambda$$

و لذا $\lambda\in W(P)$.

و اگر $\lambda\in\sigma_a(P)$باشد، آنگاه $(P-\lambda I)$ از پایین کراندار نیست، پس

$$\forall\alpha>0,\quad \exists x;\quad \alpha\|x\|\geqslant\|(P-\lambda I)(x)\|$$

بنابراین دنباله $\{x_n\}$ موجودست که؛

$$\|x_n\|=1\quad,\quad \|(P-\lambda I)(x_n)\|\longrightarrow 0$$

قرار می‌دهیم $\lambda_n:=\langle Px_n,x_n\rangle\subset W(P)$ و نشان می‌دهیم $\lambda_n\longrightarrow\lambda$.

در واقع؛

$$\begin{aligned}|\lambda_n-\lambda| &= |\langle Px_n,x_n\rangle-\lambda\langle x_n,x_n\rangle|\\ &= |\langle Px_n-\lambda x_n,x_n\rangle|\\ &\leqslant \|(P-\lambda I)(x)\|\|x_n\|\longrightarrow 0\end{aligned}$$

در نتیجه $\lambda\in\overline{W(P)}$. که این نتیجه می‌دهد $sp(P)\subset\overline{W(P)}$.

اکنون از آنجا که برای هر x، $\langle Px,x\rangle\geqslant 0$ بنابراین $W(P)\subset[0,\infty)$. در نتیجه

$$sp(P)\subset\overline{W(P)}\subset[0,\infty).$$

برای عملگر دلخواه $T\in L(H,K)$ عملگر منحصر به فرد P_T موجودست که؛ ریشه دوم مثبت T^*T نامیده می‌شود به طوری‌که

$$P_T^2=T^*T.$$

همچنین چون نگاشت P_Tمثبت می‌باشد پس $\langle P_Tx,x\rangle\geqslant 0$.

هر عملگر مثبت یک عملگرخودالحاق است. چون اگر برای هر$x\in H$، $\langle Px,x\rangle\geqslant 0$؛

$$\langle Px,x\rangle=\langle x,Px\rangle=\langle P^*x,x\rangle$$

در صورتی که عکس مطلب فوق صحیح نیست.

اکنون برای هر عملگر نرمال T عملگرهای منحصر به فرد خودالحاق مانند $T_۲, T_۱$ به صورت

$$T_۱ = \frac{T + T^*}{۲} \quad , \quad T_۲ = i\frac{T^* - T}{۲}$$

وجود دارند که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند و $T = T_۱ + iT_۲$. پس از این به بعد کافی است نمایش عملگرهای خودالحاق را به جای نرمال مطالعه کنیم.

به طور معمول اگر $x, y \in H$ باشند آنگاه گوییم x بر y عمود است هرگاه $\langle x, y\rangle = ۰$ و آن‌رابه صورت $x \perp y$ نمایش می‌دهیم. اگر $M \subset H$ باشد تعریف می‌کنیم،

$$M^{\perp} = \{x \in H | \langle x, y\rangle = ۰; \quad \forall y \in M\}$$

که زیرفضای بسته ای از H است. همچنین اگر M زیرفضای بسته H باشد آنگاه داریم،

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

یک پایه متعامد یکه برای H را به صورت $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ نمایش می‌دهیم و می‌دانیم که هر فضای هیلبرتی یک پایه متعامد یکه دارد و می‌توان هر$x \in H$ را به صورت $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ نمایش داد. همچنین H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر است اگر وفقط اگر هر پایه متعامد یکه آن شمارا باشد. به یک عملگر $T \in L(H, K)$ عملگراز بعد متناهی گوییم هرگاه برد T دارای بعد متناهی باشد. در این حالت برای هر$x \in H$ نمایش زیر را داریم،

$$T(x) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \langle x_i, e_i\rangle \varepsilon_i$$

این تساوی ار آن‌جا حاصل می‌شود که طبق قضیه (۲.۴.۶) در [۷] فضای عملگرهای با بعد متناهی توسط عملگرهای تصویری با بعد یک تولید می‌شود، لذا

$$\forall x \in H \quad , \quad Tx = \sum_{i}^{n} |\delta_i|^۲ (\xi_i \otimes e_i)(x)$$

که در آن عملگر $x \otimes y$به صورت $(x \otimes y)z = \langle z, y\rangle x$ تعریف می‌شود؛ آنگاه

$$Tx = \sum_{i}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \xi_i.$$

که در آن n بعد $T(H)$ می‌باشد و $\{e_i\}$ و $\{\varepsilon_i\}$ مجموعه‌های متعامد یکه برای K, H می‌باشند و $\{\lambda_i\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی است. یک عملگر از بعد متناهی یک عملگر فشرده می‌باشد. اگر یک زیر فضای $M \subseteq H$تحت $T \in L(H)$ پایا باشد آنگاه $M^{\perp}$تحت T^* پایا می‌باشد، یعنی اگر $T(M) \subseteq M$ باشد آنگاه $T^*(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$ است.

تعریف ۲.۲.۱. یک زیر فضای M از H ، T را می‌کاهد[1] وقتی که هم M و هم $M^{\perp}$ تحت T پایا باشند.

[1] reduce

واضح است که اگر T یک عملگرخودالحاق باشد در این صورت هر زیر فضای M که تحت T پایا باشد T را می‌کاهد. همگرای صعودی و نزولی را به صورت $\lambda_n \nearrow \lambda$ و $\lambda_n \searrow \lambda$ نشان می‌دهیم.

فصل ۲

خاصیت N

۱.۲ مقدمه

تعریف ۱.۱.۲. یک عملگر $U \in L(H,K)$ را یکمتری جزیی گوییم هرگاه روی $(kerU)^{\perp}$ یک یکمتری باشد. یعنی

$$\forall x \in (kerU)^{\perp} \quad , \quad \|Ux\| = \|x\|$$

که به $(kerU)^{\perp}$ دامنه داخلی گوییم و به برد U دامنه پایانی گوییم.

یادآوری ۲.۱.۲. *فرض کنید U یکمتری جزیی با دامنه درونی $(kerU)^{\perp}$ باشد. آنگاه داریم؛*

۱. *U^*U برابر با نگاشت تصویری روی $(kerU)^{\perp}$ است.*

۲. *UU^* برابر با نگاشت تصویری روی $(kerU^*)^{\perp}$ می‌باشد.*

۳. *U^* نیز یکمتری جزیی می‌باشد.*

برهان. ۱. فرض کنید P نگاشت تصویری روی $(kerU)^{\perp}$ باشد در این صورت برای هر $x \in kerU$،

$$\begin{aligned} \langle U^*Ux, x\rangle &= \langle Ux, Ux\rangle \\ &= \|Ux\|^{۲} = ۰ \end{aligned}$$

و همچنین $\langle Px, x\rangle = ۰$ بنابراین

$$\|Ux\|^{۲} = ۰ = \langle Px, x\rangle.$$

برای هر $x \in (kerU)^{\perp}$ از یکمتری بودن U داریم؛

$$\begin{aligned} \langle U^*Ux, x\rangle &= \langle x, x\rangle \\ &= \langle Px, x\rangle \end{aligned}$$

از طرفی برای هر $x \in H$ داریم $x = y + z$ که $y \in (kerU)^{\perp}$ و $z \in (kerU)$.
پس

$$\begin{aligned} \langle U^*U(x), x\rangle &= \langle U^*U(y) + U^*U(z), y + z\rangle \\ &= \langle U^*U(y), y\rangle + \langle U^*U(y), z\rangle + \langle U^*U(z), y\rangle + \langle U^*U(z), z\rangle \\ &= \langle P(y), y\rangle + \langle P(z), z\rangle + \langle P(y), z\rangle + \langle P(z), y\rangle \\ &= \langle P(x), x\rangle \\ &\Rightarrow \;\; U^*U = P. \end{aligned}$$

حال چون U یکمتری جزیی می‌باشد پس طبق قضیه ای در [۷] داریم؛

$$U = UU^*U$$

از طرفی برای هر $y \in \ker U$ داریم $\langle U^*Ux, y\rangle = \circ$ بنابراین برای هر $x \in H$ داریم $U^*Ux \in (kerU)^{\perp}$، پس

$$\|Ux\| = \|UU^*Ux\| = \|U^*Ux\|.$$

و این بدین معنی است که U^* نیز یکمتری جزیی با دامنه داخلی $U(H) = (kerU^*)^{\perp}$ می‌باشد.
چون برای هر $y \in (kerU^*)^{\perp} = U(H)$، xی عضو H هست که $y = Ux$. بنابراین

$$\|U^*y\| = \|U^*Ux\| = \|Ux\| = \|y\|$$

حال مشابه آنچه که در قسمت ۱ اثبات شد می‌توان نشان داد که UU^* نیز یک عملگر تصویری روی $(kerU^*)^{\perp}$ می‌باشد.

$\square$

مثال ۳.۱.۲. فرض کنید $\{e_j\}$ یک پایه متعامد یکه در $l^{۲}$ باشد و $a \in (\circ, ۱]$ و دنباله‌های $(b_j), (a_j)$ و از اعداد حقیقی طوری باشند که

$$\circ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a, \quad a_j \nearrow a, \quad a_j^{۲} + b_j^{۲} = ۱$$

حال فرض کنید T یک عملگر یکانی که $Te_j = \lambda_j e_j$ داده شده باشد به طوری‌که $\lambda_j = a_j + ib_j$.
در این‌صورت $T + I$ در شرط N صدق نمی‌کند.
در حقیقت برای هر $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^۲$ داریم؛

$$\|(T+I)(x)\|^۲ = \sum_j (|\lambda_j|^۲ + \lambda_j + \bar{\lambda_j} + ۱)|x_j|^۲$$

از آنجایی که اگر $x \in l^۲$ باشد، آنگاه

$$x = \sum_j \langle x, e_j\rangle e_j = \sum_j |x_j| e_j$$

بنابراین

$$Tx = \sum_j |x_j| \lambda_j e_j$$

ولذا از ترکیب دو تساوی فوق داریم،

$$Tx + x = \sum_j (۱ + \lambda_j)|x_j| e_j$$

پس

$$\|Tx + x\|^۲ = \sum_j |۱ + \lambda_j|^۲ |x_j|^۲ \ .$$

حال چون

$$\begin{aligned} |۱ + \lambda_j|^۲ &= (۱ + \lambda_j)(۱ + \bar{\lambda_j}) \\ &= ۱ + |\lambda_j|^۲ + \lambda_j + \bar{\lambda_j} \end{aligned}$$

لذا تساوی اول اثبات می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \|Tx + x\|^۲ &= \sum_j ۲(۱ + a_j)|x_j|^۲ \\ &< ۲(۱ + a) \sum_j |x_j|^۲ \\ &= ۲(۱ + a)\|x\|^۲. \end{aligned}$$

علاوه بر آن

$$\|(T+I)e_j\| = \sqrt{۲(۱ + a_j)}$$

بنابراین چون

$$\begin{aligned}\|(T+I)\|\geqslant \sup_j\|(T+I)e_j\| &= \lim_{j\to\infty}\|(T+I)e_j\|\\ &= \lim_{j\to\infty}\sqrt{۲(۱+a_j)}\\ &= \sqrt{۲(۱+a)}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|T+I\|=\sqrt{۲(۱+a)}.$$

در صورتی که برای هر $x\in S$ داریم؛

$$\|T+I\|>\|(T+I)(x)\|$$

پس $T+I$ در شرط N صدق نمی‌کند ولی T و I هر دو یکمتری می‌باشند. از آنجا که داریم؛

$$\begin{aligned}\|Tx\|^۲ &= \langle Tx,Tx\rangle\\ &= \langle x,T^*Tx\rangle\\ &= \langle x,x\rangle=\|x\|^۲\end{aligned}$$

قضیه ۴.۱.۲. *فرض کنید $T\in L(H)$ یک عملگر خودالحاق باشد. آنگاه T در شرط N صدق می‌کند اگر و فقط اگر $\|T\|$ یا $-\|T\|$ یک مقدار ویژه برای T باشند.*

برهان. ابتدا فرض کنید $\pm\|T\|$ یک مقدار ویژه برای T باشند بدین معنی که اگر $x\in H$ یک بردار مقدار ویژه وابسته به $\pm\|T\|$ باشد آنگاه $Tx=\pm\|T\|x$. قرار می‌دهیم $x_\circ=\dfrac{x}{\|x\|}\in S$، آنگاه

$$\begin{aligned}\|Tx_\circ\| &= \frac{۱}{|x\|}\|Tx\|\\ &= \frac{۱}{\|x\|}\|T\|\|x\|\\ &= \|T\|\\ &\Rightarrow \|Tx_\circ\|=\|T\|.\end{aligned}$$

حال برعکس؛ فرض کنید که $x_\circ\in S$ موجود باشد به طوری‌که $\|Tx_\circ\|=\|T\|$. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم $\|T\|=۱$ باشد. چون T خودالحاق است داریم،

$$\langle (I-T^۲)x_\circ,x_\circ\rangle = \langle x_\circ,x_\circ\rangle-\langle Tx_\circ{}^۲,x_\circ\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|x_\circ\|^{\text{۲}} - \langle Tx_\circ, Tx_\circ\rangle \\ &= \|x_\circ\|^{\text{۲}} - \|Tx_\circ\|^{\text{۲}} = \circ \end{aligned}$$

و از طرفی چون $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$، پس $(I-T^{\text{۲}}) \geqslant \circ$ است. بنابراین برای هر x،

$$\langle (I-T^{\text{۲}})x, x\rangle = \|x\|^{\text{۲}} - \|Tx\|^{\text{۲}} \geqslant \circ$$

لذا $(I-T^{\text{۲}})x_\circ = \circ$. چون

$$\langle (I-T^{\text{۲}})x_\circ, x_\circ\rangle = \langle (I-T^{\text{۲}})^{\text{۱}/\text{۲}}x_\circ, (I-T^{\text{۲}})^{\text{۱}/\text{۲}}x_\circ\rangle = \circ$$

بنابراین $(I-T^{\text{۲}})^{\text{۱}/\text{۲}}x_\circ = \circ$. پس داریم $(I-T^{\text{۲}})x_\circ = \circ$، لذا $x_\circ = Tx_\circ{}^{\text{۲}}$. در نتیجه

$$(I+T)(x_\circ - Tx_\circ) = \circ \quad \text{یا} \quad (I-T)(x_\circ - Tx_\circ) = \circ$$

اجازه دهید حالت ساده تر را بررسی کنیم و حالت دیگر نیز شبیه است. حال فرض کنیم $(I-T)(x_\circ - Tx_\circ) = \circ$ برقرار باشد. در این‌صورت اگر $(x_\circ - Tx_\circ) = \circ$ آنگاه چون $\|T\| = \text{۱}$ است، پس یک مقدار ویژه برای T وابسته به $x_\circ$ می‌باشد. در غیر این صورت اگر $z = (x_\circ - Tx_\circ) \neq \circ$. فرض کنید $z_\circ := \frac{z}{\|z\|}$، ایجاب می‌کند که $Tz_\circ = -z_\circ$ یعنی $z_\circ$یک بردار ویژه یکانی وابسته به مقدار ویژه $-\|T\| = -\text{۱}$ هست. حال اگر $\|T\| \neq \text{۱}$باشد در این صورت چون داریم $\|T\| = \|Tx_\circ\|$ پس

$$\left\|\frac{Tx_\circ}{\|T\|}\right\| = \left\|\frac{T}{\|T\|}\right\|$$

و در ادامه اثباتی که انجام شد به جای T از $\frac{T}{\|T\|}$ استفاده می‌کنیم. □

حال طبق قضیه‌ای که در بالا گفته شد اگر $P \in L(H)$ یک عملگر مثبت باشد و همچنین $x_\circ \in S$ موجود باشد به طوری‌که $\|P\| = \|Px_\circ\|$. آنگاه چون P مثبت است پس $sp(P) \subset [\circ, \infty)$ می‌باشد. بنابراین چون هر مقدار ویژه عضوی از $sp(P)$ می‌باشد، در این صورت مقادیر ویژه P نیز مثبت و حقیقی می‌باشند.

در این حالت در قضیه قبل فقط $\|P\|$ امکان دارد که مقدار ویژه P باشد و طبق روال اثبات قضیه داریم؛

$$Px_\circ = \|P\|x_\circ. \tag{۱.۲}$$

به طور مشابه عملگر دلخواه T در شرط N صدق می‌کند اگر وفقط اگر P_T در شرط N صدق کند. بدین جهت که چون P_T یک عملگر خودالحاق می‌باشد و داریم؛

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|P_T\|(\|T\|^{\text{۲}} = \|T^*T\| = \|P_T^{\text{۲}}\| = \|P_T\|^{\text{۲}}) \\ \|Tx\| &= \|P_Tx\|(\langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, P_T^{\text{۲}}x\rangle = \langle P_Tx, P_Tx\rangle) \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

نتیجه ۵.۱.۲. *یک عملگر دلخواه $T \in L(H,K)$ در شرط N صدق می‌کند اگر و فقط اگر $\|T\|$ یک مقدار ویژه برای P_T باشد.*