بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

دینامیک نگاشتهای بازه ای بی دور

استاد راهنما :

دکتر علی پارسیان (دانشگاه تفرش)

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل نظری (دانشگاه تفرش)

دانشجو :

محمد خداداد

مرداد ۱۳۹۰

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

دینامیک نگاشتهای بازه ای بی دور

دانشجو :   محمد خداداد

استاد راهنمای اول : دکتر علی پارسیان   (دانشگاه تفرش)   امضاء:

استاد مشاور: دکتر اسماعیل نظری (دانشگاه تفرش)   امضاء :

داور داخلی:دکتر رمضانی (دانشگاه تفرش)   امضاء :

داور خارجی: دکتر اکبری (دانشگاه شاهد)   امضاء :

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که زحمات بسیاری برایم کشیده اند و تمام عمر مدیون ایشان میباشم

و

همسر مهربانم

سپاسگزاری

در اینجا بر خود واجب می دانم از استاد ارجمند دکتر پارسیان که صبورانه مرا راهنمایی نمودند و دکتر نظری کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین ازحمایت های همیشگی برادرانم به ویژه آقای احمد خداداد و همکار ی صمیمانه دوستان عزیزم آقایان سید مهدی حسینی و مصطفی رحمانی که مرا در این امر یاری کردند کمال قدر دانی را دارم.

و تقدیر و تشکر از تمام کسانی که به نحوی مرا در این پژوهش یاری نمودند.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

۲ بی دوری و همگرایی

۳ مدل های جمعیتی عمومی

۴ .پایدارموضعی و سراسری مدل جمعیتی

لیست تصاویر

چکیده

بررسی رفتارهای سیستم های دینامیکی و معادلات تفاضلی یکی از اساسی ترین موضوعات و مفاهیم ریاضیات نوین می باشد که کاربردهای فراوانی در بسیاری از علوم مختلف نظیر زیست شناسی، مهندسی، فیزیک و....... دارد. هدف اصلی این پایان نامه بررسی شرایطی است که نگاشت ها بی دور می شوند و در ادامه کاربردهایی از این مفاهیم را در مدلهای جمعیتی عمومی ارایه خواهیم کرد که تعمیمی از نظریه مدلهای جمعیتی پروفسور $Cull$ می باشد. همچنین به مقایسه نتایج بدست آمده توسط پروفسور $Cull$ و پروفسور $Huang$ با مطالب بیان شده خواهیم پرداخت. سرانجام شرایطی را که نگاشت ها دورهایی با تناوب ۲ خواهند داشت بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: سیستمهای دینامیکی، مدلهای جمعیتی، نقاط متناوب، نقاط ثابت و مشتق شوارزین.

پیش گفتار

درسالهای اخیر افزایش علاقه به سیستمهای دینامیکی بسیار شگرف بوده است. دانشمندان در همه زمینه ها به قدرت و زیبایی تکنیکهای کیفی و هندسی ارایه شده در این رشته پی برده اند. به ویژه آنها قادر بوده اند که این تکنیکها را برای مسایل غیر خطی در فیزیک، شیمی، بوم شناسی، اقتصاد و ..... به کار ببرند. نظریه سیستمهای دینامیکی مدرن تاریخچه نسبتا کوتاهی دارد و با پوانکاره[۱] که انقلابی در مطالعه معادله های دیفرانسیلی غیرخطی پدید آورد شروع شد. او با معرفی تکنیکهای کیفی از هندسه و توپولوژی علاوه بر روشهای آنالیزی به بررسی ویژگی های این سیستمها پرداخت. به پیروی از او بیرکهوف[۲] در اوایل قرن بیستم به اهمیت مطالعه نگاشتها پی برد، و بر دینامیکهای گسسته به عنوان ابزاری برای درک دینامیک های پیچیده ترکه از معادلات دیفرانسیل به وجود می آید تاکید کرد. گسترش تکنیکهای توپولوژی و هندسه در این مدت به تدریج منجر به دور شدن ریاضیدانان از مطالعه سیستمهای دینامیکی گردید، شاخه هایی مثل توپولوژی دیفرانسیل و توپولوژی جبری به وجود آمدند و پیشرفتهایی که در این زمینه ها حاصل شد در ارایه تکنیک های متفاوت و جدید برای حل مسایل هندسی بسیار موثر بود. در همین زمان مطالعه سیستمهای دینامیکی کمرنگ شد، به جز در جماهیر شوروی ریاضیدانانی نظیر لیاپانوف[۳] و

---

[1]. Poincare
2. Birkhoff
3. Liapounov

پونتریاگین[1] و آندرونوف[2] و دیگران که سیستمهای دینامیکی را از نقطه نظرهای متفاوتی مطالعه می کردند. اما این رویه از ۱۹۶۰ به بعد عمدتاً با کارهای موزر[3] و اسمیل[4] در آمریکا، پیکسوتو[5] در برزیل،کولوموگروف[6] و آرنولد[7] و سیانی[8] در جماهیر شوروی تغییر گردید. اسمیل و پیکسوتو پیکسوتو از تکنیکهای توپولوژی دیفرانسیل برای فهم رفتار آشوبناک کلاس گسترده ای از سیستمهای دینامیکی بسیاراستفاده کردند. همچنین کولوموگروف و آرنولد و موزر برای پیشبرد اهدافشان در سیستم های دینامیکی از هندسه وآنالیز بسیار سود بردند. یکی از موضوعات مورد بحث در سیستمهای دینامیکی مدلهای جمعیتی است،(مراجع[۲]،[۳]،[۴]،[۶]،[۹]) بررسی این مدلها به ویژه پایدار سراسری بودن آنها همواره از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده که ا بتدا توسط فیشر[9] انجام شد، سپس سینگر[10] و کول[11] و هانگ[12] و ... روشهای متفاوتی برای بررسی پایدار سراسری بودن این مدلها ارایه کردند. پیشرفت سیستمهای دینامیکی در ریاضیات، زیست شناسی، اقتصاد و ..... دانشمندان را از رشته های متفاوت به این رشته جذب کرده است. همه این پیشرفتها باعث شده سیستمهای دینامیکی یکی از شاخه های بسیار جذاب و مهم ریاضیات باشد. در حالیکه این رشته هنوز در ابتدای راه است اما تاثیر و نقش آن در رشته های دیگر اهمیت ویژه ای پیدا کرده است. در این پایان نامه در فصل اول با بیان تعاریف وقضایای مقدماتی و معرفی برخی از منابع معتبر که این تعاریف وقضایا از آنها استخراج شده است سعی در آشنایی خواننده با برخی از مفاهیم مهم سیستم های دینامیکی را داریم. (مراجع[۵]،[۶]،[۷]،[۹]،[۱۸]) سپس در فصل دوم

---

1. Pontryagin
2. Andronov
3. Moser
4. Smale
5. Peixoto
6. Kolomogrov
7. Arnold
8. Siani
9. Fisher
10. Singer
11. Cull
12. Haung

شرایطی را که تحت آنها یک نگاشت بی دور می شود و همچنین رابطه بین بی دوری وهمگرایی نگاشت ها را بررسی می کنیم. (مراجع [۱]،[۷]،[۱۷]،[۱۸]) در فصل سوم مدلهای جمعیتی عمومی را تعریف می کنیم ودر مورد بی دوری و همگرایی این مدلها بحث می کنیم و شرایط خاص دیفرانسیلی که نگاشتها تحت آنها بی دورند، بیان می کنیم. (مراجع [۲]،[۳]،[۴]،[۶]،[۷]) در فصل چهارم مدلهای جمعیتی تعریف شده توسط کول را معرفی کرده و با بیان تعریف پایدار موضعی و پایدار سراسری بودن این مدل ها، قضایا و مثالهایی مرتبط را آورده و در نهایت شرایط لازم برای وجود ۲ دورها دریک نگاشت را ارائه می کنیم. (مراجع [۲]،[۳]،[۴]،[۹])

امید داریم چنین تحقیقاتی باعث برانگیخته شدن انگیزه ها و پیشرفت هر چه بیشتر این رشته گردد.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم، لم ها و قضایای مقدماتی که درعین حال اساسی هستند را مرور می کنیم. قضایا را بدون اثبات بیان کرده و اثبات را در مراجع ارائه شده می توان ملاحظه کرد. تعاریف و قضایایی که در این بخش بیان شده است برای معادلات تفاضلی وابسته به زمان و مستقل از زمان به کار می روند.

۱-۲ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۲.۱: نگاشت $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را**خطی**[1] گوییم هر گاه $f(x) = ax$ که در آن a مقداری ثابت است. در غیر این صورت fرا غیر خطی گوییم.

تعریف ۲.۲.۱:فرض $\mathbb{R}$ مجموعه ی اعداد حقیقی و $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت پیوسته باشد در این صورت معادله ی

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

را یک **معادله ی تفاضلی**[2] مرتبه اول گوییم. بدیهی است که به ازای هر$x_0 \in \mathbb{R}$ دنباله $\{f^n(x_0)\}$ یک جواب با مقدار اولیه برای این معادله است.

تعریف ۳.۲.۱: نقطه$\bar{x}$یک **نقطه ثابت**[3] نگاشت f، یا یک نقطه ی تعادلی معادله (۲.۲.۱) نامیده می شود اگر $f(\bar{x}) = \bar{x}$ باشد.

تعریف ۴.۲.۱: نگاشت $f: I \longrightarrow I$که $I \subseteq \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید اگر $x_0 \in \mathbb{R}$باشد **مدار**[4] یا مسیر نقطه x_0 که آن رابا$o(x_0)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

1. Linear
2. Difference equation
3. Fixed point
4. orbit

$o(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..\}$ که در آن $f^2 = fof$ و $f^3 = fofof$ و ...
توجه شود که گاهی f^{n} را با f_{n} نمایش می دهیم و همچنین اگر $\bar{x}$ یک نقطه ی ثابت نگاشت f باشد $o(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

تعریف ۵.۲.۱: یک نقطه ی x در **نهایت متناوب**[1] نگاشت f نامیده می شود هر گاه عدد صحیح مثبت r و نقطه ثابت $\bar{x}$ چنان موجود باشند که $f^r(x) = \bar{x}$ ، اما $f^{r-1}(x) \neq \bar{x}$.

فرض کنید x^* در دامنه f واقع شده باشد، آنگاه x^* نقطه **متناوب**[2] با تناوب k نگاشت f است، هرگاه برای عدد صحیح و مثبت k داشته باشیم $f^k(\,x^*) = \ x^*$.

بعلاوه $f^r(\,x^*) \neq \ x^*$ برای $0 < r < k$ آنگاه k **تناوب اول**[3] x^* نامیده می شود.

همچنین x^* نقطه ی متناوب نهایی نامیده می شودهر گاه برای $m \in \mathbb{Z}^+$ ، $f^m(\,x^*)$ یک نقطه متناوب f باشد، به عبارت دیگر $f^{k+m}(\,x^*) = f^m(\,x^*)$ برای $k \in \mathbb{Z}^+$.

تعریف ۶.۲.۱: مدار x را یک **دور**[4] ، یا به طور دقیق تر یک k دور می نامیم اگر k کوچکترین تناوب آن در شرط $k \geq 2$ صدق کند و هنگامی که هیچ دوری وجود ندارد f را بی دور می نامیم.

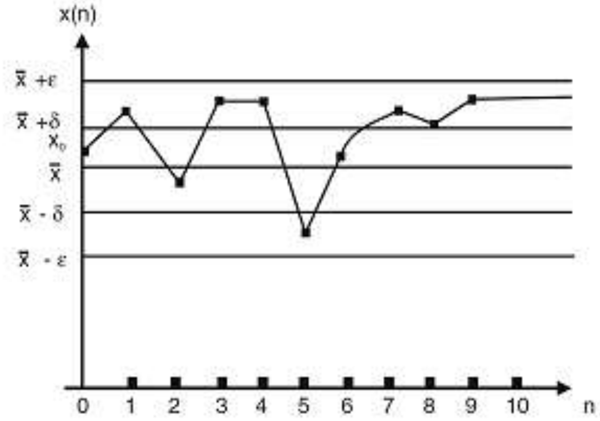
تعریف ۷.۲.۱: فرض کنید $f: I \longrightarrow I$ یک نگاشت پیوسته و $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت f باشد، همچنین I بازه ای درمجموعۀ اعداد حقیقی است، آنگاه:

الف) $\bar{x}$ **پایدار**[5] است اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ و برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه:

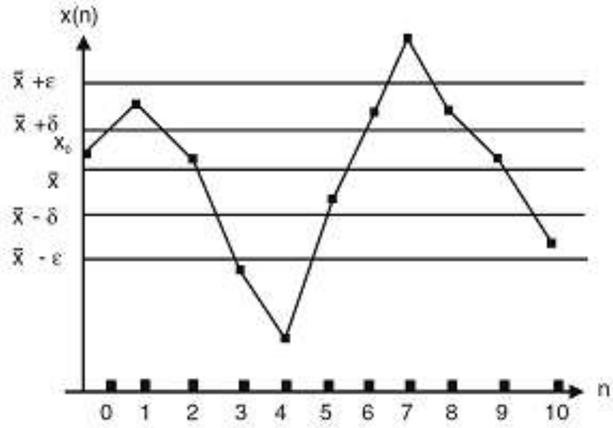
$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow |f^n(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$$

اگر $\bar{x}$ پایدار نباشد، ناپایدار[6] نامیده می شود.

1. Eventually periodic
2. Periodic
3. Prime periodic
4. Cycle
5. stable
6. Unstable



شکل ۱.۱) **پایداری**

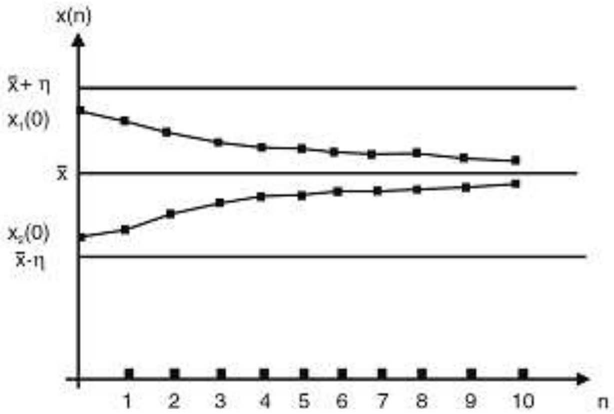


شکل ۲.۱) **ناپایداری**

ب) $\bar{x}$ **جاذب**[1] نامیده می شود اگر $\eta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$|x_0 - \bar{x}| < \eta \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f^n(x_0) = \bar{x}$$

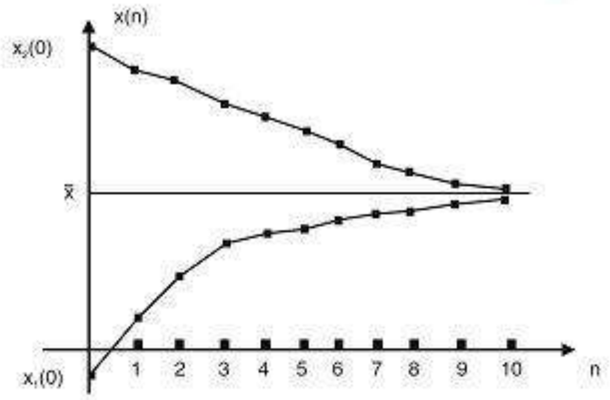
ج) $\bar{x}$ **پایدار مجانبی**[2] نامیده می شود اگر هم پایدار و هم جاذب باشد.



شکل ۳.۱) **پایدار مجانبی**

1. Attractive
2. Asymptotically stable

اگر $\eta = \infty$ در این صورت $\bar{x}$ پایدار مجانبی فراگیر[1] (سرتاسری) نامیده می شود.



شکل ۴.۱) پایدارمجانبی سراسری

قضیه)۸.۲.۱ : فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، که در آن f یک نگاشت پیوسته و مشتق پذیر در $\bar{x}$ است آنگاه:

الف) اگر $|f'(\bar{x})| < 1$ آنگاه $\bar{x}$ یک نقطه پایدار مجانبی است.

ب)اگر $|f'(\bar{x})| > 1$ آنگاه $\bar{x}$ یک نقطه ناپایدار است.

اثبات: مرجع[۷]

قضیه)۹.۲.۱ : فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت f باشد بطوریکه $f'(\bar{x}) = 1$. اگر $f'''(\bar{x}) \neq 0$ و پیوسته باشد گزاره های زیر برقرار اند:

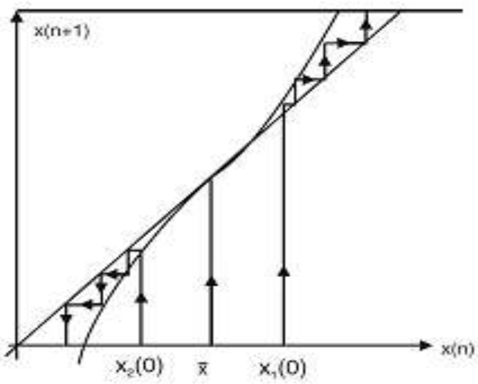
الف) اگر $f''(\bar{x}) \neq 0$ آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

ب)اگر $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) > 0$ آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

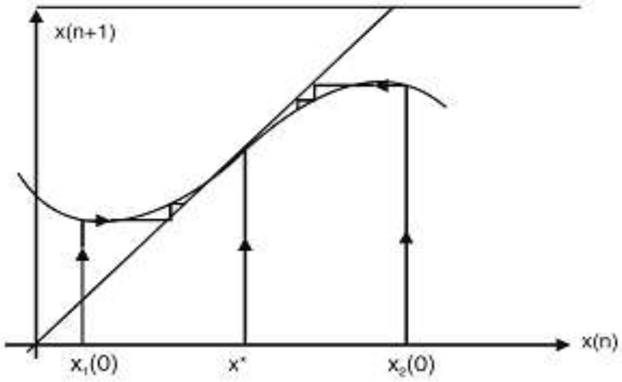
ج) اگر $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) < 0$ آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

اثبات : مرجع شماره[۷]

1. Globally asymptotically stable



شکل ۵.۱) اگر $f'(\bar{x}) = 1$ و $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) > 0$ آنگاه $\bar{x}$ ناپایداراست.



شکل ۶.۱) اگر $f'(\bar{x}) = 1$ و $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) < 0$ آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

تعریف ۱۰.۲.۱:(**مشتق شوارزین**[1]): Sf تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

قضیه ۱۱.۲.۱:فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت f ، بطوریکه $f'(\bar{x}) = -1$ باشد، اگر $f'''(x)$ پیوسته باشد، آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

الف)اگر $Sf(\bar{x}) < 0$ آنگاه $\bar{x}$ یک نقطه ی پایدار مجانبی می باشد.

ب)اگر $Sf(\bar{x}) > 0$ آنگاه $\bar{x}$ یک نقطه ی ناپایدار می باشد.

اثبات: مرجع شماره [۷]

1. Schwarzian derivative

تعریف ۱۲.۲.۱: فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ی ثابت پایدار مجانبی نگاشت f باشد، **مجموعه پایداری** $\omega^s(\bar{x})$[1] به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega^s(\bar{x}) = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = \bar{x}\right\}$$

لم ۱۳.۲.۱: اگر $\bar{x}$ یک نقطه ی جاذب برای نگاشت f باشد در این صورت $\omega^s(\bar{x})$ شامل یک بازه ی باز حول $\bar{x}$ است.

اثبات : مرجع شماره[۷]

تعریف ۱۴.۲.۱: مجموعه نقاط حدی مدار x را با $\omega(x)$ نشان می دهیم.

نقطه ی x **همگرا**[2] است اگر $\omega(x)$ یک نقطه ی ثابت باشد. هر گاه همه ی نقاط دامنه f همگرا باشند، f نیز همگرا نامیده می شود.

تعریف ۱۵.۲.۱: نگاشت f را **همئومورفیسم**[3] نامند هرگاه f، یک به یک و پوشا است، f و f^{-1} نیزپیوسته باشند.

تعریف ۱۶.۲.۱: دو نگاشت $f: A \to A$ و $g: B \to B$ **مزدوج**[4] نامیده می شوند و با $f \approx g$ نمایش داده می شوند هرگاه یک نگاشت همئومورفیسم $h: A \to B$ چنان موجود باشد که $hof = goh$.

مثال ۱۷.۲.۱: نگاشت های $f_\mu(x) = \mu x(1-x) \;\; ; \;\; 0 < \mu \leq 4$ و
$Q(x) = ax^2 + bx + c \;\; ; \; c = \frac{b^2-\mu^2-2b}{4a} \;\; ; \; a \neq 0$ با نگاشت همئومورفیسم
$h(x) = -\frac{\mu}{a}x + \frac{\mu-b}{2a}$ مزدوج هستند.

---

1. Stable set
2. Convergent
3. Homeomorphism
4. Conjugate

قبل از آن که به بیان قضیه شارکوفسکی[1] بپردازیم ابتدا ترتیب شارکوفسکی[2] از اعداد صحیح مثبت را بیان می کنیم.

۱۸.۲.۱ ترتیب شارکوفسکی:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots$$
$$\ldots \prec 2 \times 3 \prec 2 \times 5 \prec 2 \times 7 \prec \cdots$$
$$\ldots \prec 2^2 \times 3 \prec 2^2 \times 5 \prec 2^2 \times 7 \prec \cdots$$
$$\ldots \prec 2^n \times 3 \prec 2^n \times 5 \prec 2^n \times 7 \prec \cdots$$
$$\ldots \prec 2^n \prec \cdots \prec 2^3 \ldots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

واضح است که این ترتیب همه اعداد صحیح مثبت را در بر می گیرد.

توجه شود که $m \prec n$ نشان دهنده این است که m در ترتیب شارکوفسکی قبل از n قرار می گیرد.

قضیه ۱۹.۲.۱:(شارکوفسکی)

اگر $f: I \longrightarrow I$ یک نگاشت پیوسته روی بازه ی I (که I ممکن است متناهی، نامتناهی یا تمام اعداد حقیقی باشد) و f یک نقطه متناوب از تناوب k داشته باشد. آن گاه f یک نقطه متناوب از تناوب r برای همه r هایی که $k \prec r$ دارد.

اثبات : مرجع شماره[۵]

لم ۲۰.۲.۱: اگر f یک نقطه با تناوب n (n زوج) داشته باشد، آنگاه f یک نقطه با تناوب ۲ دارد.

اثبات : مرجع شماره[۵]

1. Sharkovski theorem
2. Sharkovski order