بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سَرِ فکرتِ ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.
گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.
خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

۱۲۸۲۸۷-۲۰۷۰۴۸

دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

قاب فیوژن پیوسته و بررسی قاب‌ها از دیدگاه پیوستگی

استاد راهنما:

دکتر محمد حسن فاروقی

استاد مشاور:

دکتر اصغر رحیمی

پژوهشگر:

رضا احمدی

۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: احمدی نام: رضا

عنوان: قاب فیوژن پیوسته و بررسی قاب‌ها از دیدگاه پیوستگی

استاد راهنما: دکتر محمد حسن فاروقی

استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۸۵

کلید واژه‌ها: قاب، قاب فیوژن، انتگرال فیوژن، قاب فیوژن پیوسته، سیستم قاب فیوژن‌پیوسته، g ـ قاب، خطای بازیافتی حذف، g ـ قاب فیوژن پیوسته، پایه‌ی ریس، پایه‌ی متعامد یکه.

چکیده

در این رساله انتگرال فیوژن به عنوان یک انتگرال عملگر مقدار روی فضای هیلبرت معرفی می‌شود و برخی خواص آن با استفاده از مفاهیم انتگرال لبگ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ارتباط بین قاب‌های موضعی برای زیر فضاها و قاب فیوژن پیوسته مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از انتگرال فیوژن روابط بازیافتی برای اعضای $\mathcal{H}$ بدست آمده‌است. خطای بازیافتی حذف برای قاب فیوژن پیوسته پارسوال و سیستم قاب فیوژن پیوسته تعریف و برای آنها کران بالا محاسبه شده است. پریشندگی قاب فیوژن پیوسته و سیستم قاب فیوژن پیوسته تعریف و بررسی شده است. قاب فیوژن پیوسته به g ـ قاب فیوژن پیوسته تعمیم داده شده و کران‌های بهینه برای آن محاسبه شده و پریشندگی g ـ قاب فیوژن پیوسته مورد بررسی قرار گرفته است. عملگر قاب در دو حالت قاب فیوژن پیوسته و g ـ قاب فیوژن پیوسته تعریف و بررسی شده است.

تقدیم به:

دختر عزیزم آیدا

بنام خدا

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای پروفسور محمد حسن فاروقی، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از اساتید گرامی و کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

رضا احمدی

۱۳۸۸

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۵۲ دافین [۱] و شیفر [۲] که در زمینه‌ی سری‌های فوریه‌ی غیرهارمونیک کار می‌کردند، مفهوم قاب را برای فضاهای هیلبرت معرفی کردند و برخی از ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. در واقع قاب برای یک فضای هیلبرت توسیع پایه‌ی متعامد یکه در فضای هیلبرت است ولی انعطاف قاب خیلی بیشتر از یک پایه‌ی متعامد یکه است و در بسیاری از مواقع می‌توان یک قاب با شرایط اضافی مورد نیاز پیدا کرد. قاب‌ها قبل از دهه‌ی ۸۰ نقش زیادی را در آنالیز ایفا نمی‌کرد تا این که در سال ۱۹۸٦ دابیچیز [۳]، گراسمان [۴] و می‌یر [۵] با انتشار مقاله‌ی [۱٦]، قاب‌ها را به عنوان یک ابزار مفید در نظریه‌ی موجک‌ها مطرح کردند که خود نظریه‌ی موجک‌ها از یافته‌های جدید ریاضیدانان است که هم در تحقیقات ریاضی و هم در کاربردها جایگاه بسیار مهمی دارد و در سال‌های اخیر پیشرفت‌های خیره‌کننده‌ای داشته است. بعد از انتشار این مقاله، نظریه‌ی قاب‌ها در سطح وسیعی مورد مطالعه قرار گرفت. برای مشاهده برخی از کارهای مهم در زمینه قاب‌ها را که زمینه بدست آمدن نتایج تازه‌ای در این شاخه از ریاضیات شده‌اند، می‌توان به مراجع [۳]، [۴]، [۵]، [۷]، [۸] و [۱۴] مراجعه نمود.

معرفی قاب‌های فیوژن به عنوان تعمیمی از قاب‌ها توسط کاسازا [٦]، کاتینیوک [۷] و لی [۸] در [۱۰] صورت گرفت. همچنین تعمیم جامع از قاب‌ها که در برگیرنده‌ی g ـ قاب‌ها می‌باشد توسط وینچنج سان [۹] معرفی شده است [۳۲].

این رساله در سه فصل تنظیم شده است.

در فصل اول، مفاهیم اولیه‌ی مربوط به قاب‌ها، قاب‌های پیوسته، قاب‌های فیوژن، g ـ قاب‌ها و g ـ قاب‌های پیوسته به همراه برخی از خواص آنها بیان شده است. و جهت بیان آنها از مراجع [۱۱]، [۲۱]، [۲۹]، [۲۸]، [۲۷] و [۱] استفاده شده است.

در فصل دوم که بر اساس [۱۸] تدوین شده است، انتگرال فیوژن به عنوان یک انتگرال عملگر مقدار روی فضای هیلبرت معرفی می‌شود و این عملگر والحاقی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. کران‌های بهینه

---

[۱] Duffin

[۲] Schaeffer

[۳] Daubechies

[۴] Grossmann

[۵] Meyer

[٦] Casazza

[۷] Kutyniok

[۸] Li

[۹] Wenchang Sun

برای عملگر قاب فیوژن و همچنین ارتباط بین قاب‌های موضعی پیوسته و قاب فیوژن پیوسته در این فصل مشخص شده است. خاصیت جمعی ناشمارا از انتگرال فیوژن نیز در این فصل مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل سوم بر اساس [۱۹] و [۲۰] تدوین شده است. در این فصل ابتدا مساله حذف زیر فضاها به صورت حذف بخشی از دامنه قاب فیوژن پیوسته بررسی شده و خطای بازیافتی حذف برای این حالت تعریف و یک کران بالا برای آن محاسبه شده است. سیستم قاب فیوژن پیوسته و تعریف شده و خطای بازیافتی حذف برای این حالت نیز تعریف و یک کران بالا برای آن بدست آمده است. پریشندگی قاب فیوژن پیوسته و همچنین سیستم قاب فیوژن پیوسته در این فصل مشخص شده است. عملگر قای برای زوج فیوژن و ارتباط آن با قاب فیوژن پیوسته مطرح و یک قضیه در ارتباط با آن اثبات شده است. در قسمت آخر این فصل، قاب‌های فیوژن پیوسته به g ـ قاب‌های فیوژن پیوسته تعمیم داده شده و نتایجی در ارتباط با کران‌های بهینه برای عملگر قاب و پریشندگی آن حاصل شده است.

فصل ۱

پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی

در سر تا سر این فصل، $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت[۱] جدایی پذیر، I یک مجموعه‌ی شمارا و (X,μ) یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ خواهد بود.

۱.۱ پایه‌ها در فضاهای باناخ

مفهوم پایه برای فضاهای خطی نرم‌دار توسط شاودر[۲] در سال ۱۹۲۷ معرفی شد [۳۱]. با توجه به اهمیت پایه در فضاهای هیلبرت و ارتباط زیاد آن با قاب‌ها ابتدا مطالبی در مورد مفهوم پایه از مرجع [۱۲] می آوریم.

تعریف ۱.۱.۱ اگر $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد، سری $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ را به طور نامشروط همگرا گوییم هرگاه هر ترتیب از آن همگرا باشد.

تعریف ۲.۱.۱ دنباله‌ی $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را در نظر می گیریم.

الف) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک **پایه‌ی شاودر** برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$ اسکالرهای منحصر به‌فرد $\{c_i(f)\}_{i=1}^{\infty}$ موجود باشند به طوری که

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i. \qquad (1.1)$$

ب) پایه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه نامشروط است هرگاه سری (۱.۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$ به طور نامشروط همگرا باشد.

ج) پایه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه گفته می‌شود هرگاه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد یکه باشد. به عبارت دیگر برای هر i,j داشته باشیم

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & if\ i = j \\ 0 & if\ i \neq j \end{cases}.$$

قضیه زیر شرط‌های هم‌ارز را برای تبدیل شدن یک دستگاه متعامد یکه به یک پایه متعامد یکه به‌دست می‌دهد.

---

[۱] Hilbert

[۲] Schauder

قضیه ۳.۱.۱ برای دستگاه متعامد یکه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ احکام زیر هم ارزند

الف) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است،

ب) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i\rangle e_i$،

ج) برای هر $f, g \in \mathcal{H}$، $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i\rangle\langle e_i, g\rangle$،

د) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^2 = \|f\|^2$،

ه) $\overline{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathcal{H}$،

و) برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\langle f, e_i\rangle = 0$ آنگاه $f = 0$.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۲]، صفحه ۵۶ قضیه ۳.۲.۲. ∎

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه آنگاه هر $f \in \mathcal{H}$ دارای یک بسط به صورت

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i\rangle e_i$$

می‌باشد که سری فوق به طور نامشروط همگراست.

لم‌های زیر در بیشتر مواقع مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

لم ۴.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ یک عملگر کراندار با برد بسته‌ی $\mathcal{R}_U$ باشد. در آن صورت عملگر کراندار $U^{\dagger} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{R}_U$ خواهیم داشت

$$UU^{\dagger} f = f, \ \ U^{\dagger} f = U^*(UU^*)^{-1} f.$$

$U^{\dagger}$ را شبه وارون برای U می‌نامند.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۲]، صفحه ۴۱ لم ۲.۵.۱. ∎

لم ۵.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ یک عملگر کراندار با برد بسته‌ی $\mathcal{R}_U$ باشد. احکام زیر برقرار است

الف) تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ بروی $\mathcal{R}_U$ با $UU^{\dagger}$ داده می‌شود،

ب) تصویر متعامد از $\mathcal{K}$ بروی $\mathcal{R}_{U^{\dagger}}$ با $U^{\dagger}U$ داده می‌شود،

ج) برد U^* بسته است و $(U^*)^{\dagger} = (U^{\dagger})^*$،

د) روی $\mathcal{R}_U$ عملگر $U^{\dagger}$ به صورت زیر مشخص می‌شود

$$U^{\dagger} = U^*(UU^*)^{-1}.$$

اثبات. مراجعه کنید به [۱۲]، صفحه ۴۱ لم ۲.۵.۲. ∎

۲.۱ قاب‌ها در فضای هیلبرت

قاب‌ها زیر مجموعه‌هایی از یک فضای هیلبرت هستند که فضا را تولید می‌کنند ولی لزوماً مستقل خطی نیستند. ارتباط قاب‌ها با مفاهیم بدست آمده روی فضاهای باناخ [۳] و نظریه عملگرها موجب شده‌است که نظریه قاب‌ها به عنوان شاخه‌ای از آنالیز هارمونیک مورد توجه زیادی قرار بگیرد. کاربردهای دیگری از قاب‌ها در سایر شاخه‌های علوم را می‌توان در مراجعی مانند [۲۲] و [۲۳] مشاهده نمود.

تعریف ۱.۲.۱ دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$

الف) یک **قاب** نامیده می‌شود اگر اعداد ثابت $0 < A \le B < \infty$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^2 \le \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le B\|f\|^2. \tag{۲.۱}$$

ب) در $\mathcal{H}$ کامل نامیده می‌شود هرگاه $\overline{\text{span}}\{f_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$.

اعداد ثابت A و B **کران‌های قاب** نامیده می‌شوند و زمانی این کران‌ها بهینه هستند که بزرگترین مقدار ممکن برای A و کمترین مقدار ممکن برای B باشند که در رابطه‌ی (۲.۱) صدق کنند. اگر $A = B$، قاب را **تُنُک** و اگر $A = B = 1$، قاب را **قاب پارسوال** [۴] می‌نامند. اگر نابرابری سمت راست در (۲.۱) برقرار باشد، دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ یک **دنباله‌ی بسل** [۵] در $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

به راحتی ثابت می‌شود که برای برقراری رابطه‌ی (۲.۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$، کافی است رابطه‌ی (۲.۱) برای هر f از یک زیرمجموعه‌ی چگال $\mathcal{H}$ برقرار باشد.

همچنین اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه با توجه به رابطه‌ی (۲.۱)، می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید

$$\ell_2(I) = \Big\{ \{c_i\}_{i\in I} : c_i \in \mathbb{C}, \ \sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty \Big\}.$$

اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد در آن صورت عملگر

$$T : \ell_2(I) \to \mathcal{H}, \quad T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

---

[۳] Banach

[۴] Parseval

[۵] Bessel

یک عملگر کراندار خواهد بود که آن را **عملگر ترکیب** می‌نامند. به سادگی می‌توان نشان داد که عملگر الحاقی T به صورت زیراست

$$T^*:\mathcal{H}\rightarrow \ell_2(I), \quad T^*f=\{\langle f,f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

اغلب عملگر T^* را **عملگر تجزیه** می‌نامند. با ترکیب عملگرهای T و T^*، **عملگر قاب** حاصل می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}, \quad Sf=TT^*f=\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle f_i.$$

اگر A و B کران‌های قاب باشند در آن صورت $AI\leq S\leq BI$ و در نتیجه S یک عملگر کراندار، وارون‌پذیر و مثبت است و $B^{-1}I\leq S^{-1}\leq A^{-1}I$.

کریستینسن [۶] در [۱۲] قاب‌ها را بر حسب عملگر ترکیب قاب‌ها توصیف کرده است:

قضیه ۳.۲.۱ $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر عملگر

$$T:\ell_2(I)\rightarrow\mathcal{H}, \quad T\{c_i\}_{i\in I}=\sum_{i\in I}c_if_i$$

خوشتعریف و پوشا باشد.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۱۰۲ قضیه ۵.۵.۱. ■

همچنین در قضیه‌ی زیر از [۱۳]، کران‌های بهینه‌ی قاب‌ها بر حسب عملگرهای ترکیب و قاب بیان شده است.

قضیه ۴.۲.۱ اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S و عملگر ترکیب T باشد، آنگاه کران‌های بهینه برای قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ عبارتند از

$$A=\|S^{-1}\|^{-1}=\|T^{\dagger}\|^{2}, \; B=\|S\|=\|T\|^{2}.$$

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۹۷ قضیه ۵.۴.۴. ■

لم ۵.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S و کران‌های A و B باشد، در آن صورت $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S^{-1} و کران‌های B^{-1} و A^{-1} خواهد بود. قاب $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ را **قاب دوگان استاندارد** برای قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ می‌نامند.

[۶] Christensen

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۹۱ قضیه ۵.۱.۵ بند (ii). ■

در حالت کلی اگر α عدد حقیقی باشد، در آن صورت بسادگی ثابت می‌شود که $\{S^{\alpha} f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر قاب $S^{2\alpha+1}$ و کران‌های $A^{2\alpha+1}$ و $B^{2\alpha+1}$ خواهد بود. مخصوصاً $\{S^{-1/2} f_i\}_{i\in I}$ یک قاب پارسوال است.

از مهمترین نتایج در مورد قاب آن است که هر عضو فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به صورت ترکیب خطی شمارا از اعضای قاب نوشته می‌شود ولی لزومی ندارد این نمایش منحصر بفرد باشد. در واقع اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S باشد، در آن صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$ خواهیم داشت:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1} f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S^{-1} f_i = \sum_{i\in I}\langle f, S^{\alpha} f_i\rangle S^{-1-\alpha} f_i.$$

نمایش فوق ما را به تعریف زیر راهنمایی می‌کند:

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ باشند. دنبالهٔ $\{g_i\}_{i\in I}$ دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i. \tag{۳.۱}$$

اگر U عملگر ترکیب برای قاب $\{g_i\}_{i\in I}$ و T عملگر ترکیب برای قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ فرض شود، در آن صورت رابطهٔ (۳.۱) به این معنی است که $TU^* = I$. بنابراین به سادگی می‌توان نشان داد که اگر قاب $\{g_i\}_{i\in I}$ دوگان قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد، در آن صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ نیز دوگان $\{g_i\}_{i\in I}$ است. لم زیر از [۱۱] ارتباط بین یک قاب و دوگان آن را بیشتر روشن می‌کند.

لم ۷.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌های بسل برای $\mathcal{H}$ باشند. احکام زیر معادل هستند

الف) برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $f = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, g_i\rangle f_i$،

ب) برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $f = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle g_i$،

ج) برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle\langle g_i, g\rangle$.

در صورتی که یکی از احکام فوق برقرار باشد، $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب دوگان برای یکدیگر هستند.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۱۱۲ لم ۵.۶.۲. ■

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد.

الف) اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$ باشد، در آن صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک دنباله قاب می‌نامیم.

ب) قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ خاصیت زیر قاب دارد اگر برای هر زیرمجموعه‌ی J از I، $\{f_i\}_{i\in J}$ یک دنباله قاب باشد.

پ) اگر قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ خاصیت زیر قاب داشته و اعداد ثابت و مثبت A و B کران‌های مشترک برای هر دنباله قاب باشد، قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک **قاب ریس** [۷] می‌نامیم.

ت) اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ قابی برای $\mathcal{H}$ باشد، آن را یک **قاب دقیق** گوییم هر گاه برای هر $j\in I$ دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ قاب برای $\mathcal{H}$ نباشد.

ث) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ **مینیمال** است هر گاه برای هر $j\in I$ داشته باشیم: $f_j\notin\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$.

ج) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ **مستقل خطی** است اگر هر زیرمجموعه‌ی متناهی از $\{f_i\}_{i\in I}$ مستقل خطی باشد.

چ) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ را ωـ **مستقل خطی** می‌نامند اگر برای دنباله‌ی $\{c_i\}_{i\in I}$ از اسکالرها، $\sum_{i\in I}c_if_i=0$ آنگاه برای هر $i\in I$ داشته باشیم $c_i=0$.

با توجه به تعریف، هر دنباله‌ی مینیمال یک دنباله‌ی ωـ مستقل خطی و هر دنباله‌ی ωـ مستقل خطی یک دنباله‌ی مستقل خطی است ولی عکس آنها درست نیست. به مثال زیر از [۱۱] توجه کنید:

مثال ۹.۲.۱ فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد.

الف) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب ریس پارسوال است.

ب) فرض کنید

$$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}:=\{e_1,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\dots\}$$

در این صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب پارسوال برای $\mathcal{H}$ است ولی $\{f_i\}_{i\in I}$ خاصیت زیرقاب ندارد زیرا زیرخانوادهٔ $\{\frac{e_i}{\sqrt{i}}\}_{i=1}^{\infty}$ از $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله قاب نیست.

پ) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}:=\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}e_i,e_1,e_2,\dots\}$ مستقل خطی است ولی ωـ مستقل خطی نیست.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ قاب‌هایی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ **مشابه** نامیده می‌شوند هرگاه یک نگاشت خطی کراندار و وارون‌پذیر $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i\in I$ داشته باشیم: $Tg_i=f_i$.

[۷] Riesz

تعریف ۱۱.۲.۱ دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، یک پایه‌ی ریس نامیده می‌شود اگر یک پایه‌ی متعامد یکه $\{e_i\}_{i\in I}$ برای $\mathcal{H}$ و یک نگاشت خطی کراندار و وارون‌پذیر $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i\in I$ داشته باشیم: $Te_i=f_i$.

با توجه به تعریف پایهٔ ریس، می‌توان نتیجه گرفت که پایهٔ ریس یک پایه است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که یک پایه‌ی ریس برای $\mathcal{H}$، علاوه بر پایه بودن، یک قاب نیز برای $\mathcal{H}$ است. قضیه‌ی زیر پایه‌های ریس را توصیف کرده است (ر. ک. [۳۳] صفحه‌ی ۳۲، قضیه‌ی ۹).

قضیه ۱۲.۲.۱ شرایط زیر هم ارزند:

الف) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است.

ب) دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است و اعداد ثابت $0<A\le B<\infty$ وجود دارند به طوری که برای هر عدد صحیح مثبت n و برای هر دنباله از اسکالرهای $c_1,c_2,\dots,c_n$ داریم:

$$A\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\le\left\|\sum_{i=1}^{n}c_if_i\right\|^2\le B\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2.$$

پ) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است و ماتریس گرام [۸] $\{\langle f_i,f_j\rangle\}_{i,j\in I}$ یک عملگر کراندار وارون‌پذیر روی $\ell_2(I)$ تعریف می‌کند.

ت) دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ بسل و کامل است و یک دنباله‌ی بسل و کامل مانند $\{g_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که دنباله‌های $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو به دو متعامدند؛ به عبارتی برای هر $i\neq j$ داریم:

$$\langle f_i,g_j\rangle=0.$$

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ٦٦ قضیه ٣.٦.٦. ■

دیدیم که مینیمال بودن و ω ـ مستقل خطی بودن یک دنباله، مفاهیم متفاوتی هستند. قضیه‌ی زیر از [۱۱] معادل بودن این دو مفهوم را برای قاب‌ها بیان می‌کند.

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی ریس برای $\mathcal{H}$ است.

ب) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب دقیق برای $\mathcal{H}$ است.

پ) $\{f_i\}_{i\in I}$ مینیمال است.

ت) دنباله‌ای مانند $\{g_i\}_{i\in I}$ از $\mathcal{H}$ وجود دارد که $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو به دو متعامد هستند.

---
[۸] Gram

ث) $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ و $\{f_i\}_{i\in I}$ دو به دو متعامدند.

ج) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله‌ی ω ـ مستقل خطی است.

چ) اگر $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$ و $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$ آنگاه برای هر $i \in I$ خواهیم داشت $c_i = 0$.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۱۲۴ قضیه ۶.۱.۱. ■

مثال زیر از [۱۱] می‌تواند در جهت روشن شدن مطالب فوق مفید باشد.

مثال ۱۴.۲.۱ فرض کنید $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد. برای هر $k \in \mathbb{N}$ قرار دهید

$$f_k = e_k + e_{k+1},$$

در این صورت احکام زیر برای $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ برقرار است

الف) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ کامل و مینیمال است و دنباله منحصر به‌فرد دو به دو متعامد آن برای k فرد به صورت

$$g_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} e_n.$$

و برای k زوج به صورت

$$g_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n} e_n,$$

داده می‌شود.

ب) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است ولی یک قاب نمی‌باشد.

قضیه و گزاره زیر از [۱۱] در جهت استفاده و تعمیم آنها در انواع دیگر قاب‌ها مورد استفاده هستند.

قضیه ۱۵.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. با حذف یک بردار f_j از این قاب، یک قاب یا یک مجموعه غیر کامل باقی می‌ماند و به صورت دقیقتر داریم

الف) اگر $\langle f_j, S^{-1}f_j\rangle \neq 1$ آنگاه $\{f_k\}_{k\neq j}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ می‌باشد.

ب) اگر $\langle f_j, S^{-1}f_j\rangle = 1$ آنگاه $\{f_k\}_{k\neq j}$ کامل نمی‌باشد.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۱۰۰ قضیه ۵.۴.۷. ■

گزاره ۱۶.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب دقیق برای $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دو به دو متعامد بوده و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ می‌باشد.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۱]، صفحه ۱۰۱ گزاره ۵.۴.۸. ■

۳.۱ قاب‌های فیوژن گسسته

در سر تا سر این بخش $\{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و I یک مجموعه‌ی اندیسگذار شمارا خواهد بود. قاب‌های فیوژن از دیدگاهی تعمیم نظریه‌ی قاب‌ها است و در [۱۰] توسط کاسازا[۹] و کاتینیوک[۱۰] معرفی شده است.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید $v = \{v_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از اعداد حقیقی مثبت(خانواده‌ٔ وزن‌ها) و $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. خانواده‌ٔ $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ را یک **قاب فیوژن** برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم هرگاه اعداد ثابت و مثبت $0 < C \leq D < \infty$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 \leq D\|f\|^2. \tag{۴.۱}$$

که در آن برای هر $i \in I$، $\pi_{W_i} : \mathcal{H} \to W_i$ تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ بروی W_i است.

اعداد ثابت C و D را **کران‌های قاب فیوژن** می‌نامند. قاب فیوژن **تُنُک** نامیده می‌شود هرگاه $C = D$ و در این‌صورت آن را قاب فیوژن C–تُنُک گوییم. زمانی قاب فیوژن **پارسوال** نامیده می‌شود که $C = D = 1$. خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ را یک **پایه‌ی متعامد یکه** از زیرفضاها می‌نامند هرگاه $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} W_i$. قاب فیوژن را v ـ **یکنواخت** می‌نامند اگر برای هر $i, j \in I$، $v := v_i = v_j$. قاب فیوژن **یکنواخت** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in I$، $v_i = 1$. خانواده‌ی **بسل فیوژن** با کران بسل B نامیده می‌شود در صورتی که فقط نابرابری سمت راست در(۴.۱) برقرار باشد.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب فیوژن برای $\mathcal{H}$ و برای هر $i \in I$ فرض کنید $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک قاب برای W_i باشد. آنگاه $(\mathcal{F}, v, f) = \{(W_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک دستگاه قاب فیوژن نامیده می‌شود. اگر C و D کران‌های قاب فیوژن $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ باشند آنگاه C و D را کران‌های وابسته قاب فیوژن گوییم. همچنین A و B کران‌های قاب موضعی گوییم هرگاه برای هر $i \in I$، کران‌های مشترک برای قاب‌های موضعی $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ باشند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که می‌توان از قاب فیوژن $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ برای $\mathcal{H}$، قابی برای $\mathcal{H}$ ساخت. جزئیات این کار در قضیه‌ی زیر از [۱۰] آمده است:

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید $\{v_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از وزن‌ها و $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی $\mathcal{H}$ باشد. برای هر $i \in I$ فرض کنید $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک قاب برای W_i با کران‌های A_i و B_i باشد. با

---

[۹] Casazza

[۱۰] Kutyniok

فرض $0 < \inf_{i\in I} A_i = A \leq B = \sup_{i\in I} B_i < \infty$ گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\{v_i f_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

ب) $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب فیوژن برای $\mathcal{H}$ است.

در حالت خاص اگر $(\mathcal{F}, v, f) = \{(W_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک دستگاه قاب فیوژن برای $\mathcal{H}$ با کران‌های قاب فیوژن C و D باشد آنگاه $\{v_i f_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با کران‌های AC و BD می‌باشد. همچنین اگر $\{v_i f_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با کران‌های C و D باشد آنگاه $(\mathcal{F}, v, f) = \{(W_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک دستگاه قاب فیوژن برای $\mathcal{H}$ با کران‌های قاب فیوژن $\frac{C}{B}$ و $\frac{D}{A}$ می‌باشد.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۰]، قضیه ۳.۳. ■

نتیجه ۴.۳.۱ فرض کنید $\{v_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از وزن‌ها و $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی $\mathcal{H}$ باشد. برای هر $i \in I$ فرض کنید $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک قاب پارسوال برای W_i باشد. علاوه بر این فرض کنید $C > 0$ مقدار ثابتی باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\{v_i f_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب C–تُنُک برای $\mathcal{H}$ است.

ب) $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب فیوژن C–تُنُک برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. مراجعه کنید به [۱۰]، نتیجه ۳.۴. ■

چون مفهوم قاب فیوژن از دیدگاهی تعمیمی از مفهوم قاب‌ها است، بنابراین برخی از تعاریف در نظریه‌ی قاب‌ها موجب می‌شود که مشابه این تعاریف را در موضوع قاب فیوژن نیز مطرح شوند.

تعریف ۵.۳.۱ خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ از زیرفضاهای $\mathcal{H}$ را کامل گوییم هرگاه $\overline{\text{span}}\{W_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$.

بنابر لم ۳.۴ از [۹]، اگر $(\mathcal{F}, v) = \{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب فیوژن برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ کامل است. همچنین برای بررسی کامل بودن یک خانواده از زیرفضاها، می‌توان از لم زیر که در [۹] آمده است استفاده کرد.

لم ۶.۳.۱ فرض کنید $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی $\mathcal{H}$ بوده و برای هر $i \in I$ فرض کنید $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای W_i باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\mathcal{F} = \{W_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است.

ب) $\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ در $\mathcal{H}$ کامل است.

اثبات. مراجعه کنید به [۹]، لم ۳.۵. ■

برای تعریف عملگر تجزیه و عملگر ترکیب مربوط به قاب فیوژن، بایستی فضای هیلبرت $\ell_2(I)$ را تعمیم دهیم.