بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

۱۳۸۳/۸/۲۶

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه :

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته آنالیزریاضی

عنوان :

قضیهٔ کرانداری یکنواخت در مخروط های موضعاً محدب

استاد راهنما :

دکتر حسین سیفلو

استاد مشاور :

دکتر محمد حسن فاروقی

پژوهشگر :

داود سعیدی

شهریور ۸۳

تقدیم به :

شهدای گمنام هشت سال دفاع مقدس

تقدیر نامه

سپاس خداوند را که همهٔ علم از اوست.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر سیفلو به خاطر راهنما یی ها وکمک های شان در نوشتن این رساله تشکر می نمایم. همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر فاروقی و سایر اساتید دانشکدهٔ ریاضی و آقای دکتر رنجبر به خاطر تهیه مقالات ومنابع لازم تشکر وقدردانی می نمایم .

از آقایان مرادلو، حسینی، شهریاری، عبادی، ملیح ملکی وسایر دوستان که مرا در نوشتن این رساله یاری کردند تشکر می کنم .

از پدر ومادر بزرگوارم ، برادران و خواهرا نم که با دعای خیرشان همیشه مرایاری کرده اند تشکر می‌کنم و همچنین از همسر مهربانم به خاطر تشویق این جانب و تحمل مشکلات فراوان زندگی در این مدت صمیمانه تقدیر وتشکر می کنم .

بسمه تعالی

نام خانوادگی دانشجو: سعیدی **نام :** داود	
عنوان پایان نامه : قضیه کرانداری یکنواخت برای مخروط های موضعاً محدب	
استاد راهنما: جناب آقای دکتر حسین سیفلو	
استاد مشاور: جناب آقای دکتر محمد حسن فاروقی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی **گرایش :** آنالیز **دانشگاه :** تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** شهریور ماه۸۳ **تعداد صفحه:** ۶۸	
کلید واژه ها: قضیه کرانداری یکنواخت، مخروط های موضعاً محدب	

چکیده مقاله :

این پایان نامه بر اساس مقاله ای از پروفسور **W.Roth** تحت عنوان

A Uniform Boundedness Theorem For Locally Convex Cones

نوشته شده است .

قضیه کرانداری یکنواخت در فضاهای برداری توپولوژیک یکی از سه قضیه مهم در این فضاها است . در این پایان نامه ابتدا مخروط های موضعاً محدب معرفی شده سپس نوع خاصی از مخروط ها به نام مخروط های بشکه ای تعریف شده و نوعی کامل بودن برای مخروط ها ،که بشکه ای بودن را ثابت می کند تعریف شده است . در فصل سوم با بیان قضیه کرانداری یکنواخت برای فضاهای موضعاً محدب بشکه ای ،قضیه کرانداری یکنواخت برای مخروط های موضعاً محدب بشکه ای بیان و ثابت شده است.

فهرست مطالب

مقدمه وپیشینهٔ پژوهش:

بررسی هاو تلاشهای اولیه برای قضیه کرا نداری یکنواخت اولین بار توسط H. Lebesgue در سال ۱۹۰۹ شروع شد و بعد در سال ۱۹۲۷ توسط S. Banach و P. Steinhaus به صورت رسمی بیان شد.این قضیه از کارهای بسیار مهم ریاضی در آن زمان بود به طوری که بسیاری از نتایج و قضایای مهم در آنالیز تابعی به آن قضیه بر می گردد.

قضیه کرانداری یکنواخت برای فضاهای باناخ به صورت زیر بیان می شود:

اگر $\{T_n\}_{n\in N}$ گردایه ای از عملگرهای خطی کراندار از فضای باناخ X به فضای نرمدار Y و باشد به طوری که برای هر $x \in X$ دنبالهٔ $\{\|T_n(x)\|\}$ کراندار است یعنی M_x ای هست که به از هر n، $\|T_n(x)\| \leq M_x$ آنگاه M ی هست که $n = 1,2,3,\dots$ ، $\|T_n\| \leq M$.

این قضیه برای فضاهای برداری توپولوژیک به صورت زیر بیان می شود :

فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیک باشند و Γ گردایه ای از نگاشت های خطی پیوسته از X به Y و $B = \{x \in X : \Gamma(x)$ کراندار است $\}$ اگر B در X ازرستهٔ دوم باشد، آنگاه $B = X$ و Γ همپیوسته است $[8, Th.2.5]$.

نتیجه ای از این قضیه به صورت زیر بیان می شود:

اگر Γ گردآیه ای از نگاشت های خطی و پیوسته بر یک $F-$فضا مانند X به توی یک فضای برداری توپولوژیک Y باشد واگر مجموعه های $\Gamma(x)$ به ازای هر $x \in X$ در Y کراندار باشند،آنگاه Γ همپیوسته است $[8, Th.2.6]$.

شکل نهایی قضیهٔ کرانداری یکنواخت در فضاهای برداری توپولوژیک به صورت زیر است :

اگر E یک فضای بارلد(بشکه ای) و F یک فضای موضعاً محدب باشد ، هر مجموعه از نگاشتهای خطی پیوسته بر E به توی F که به طور نقطه وار کراندار باشد،همپیوسته است . $[4, Ch.IV, Th.3]$

می خواهیم در این پایان نامه مشابه قضیه فوق را برای مخروط ها بیان و اثبات کنیم . در صورت کلی قضیه برای فضاهای برداری توپولوژیک و فضاهای باناخ یک توپولوژی روی فضا داریم، پس برای مخروط نیز باید یک توپولوژی ایجاد کرد که در فصل اول این کار را انجا م می دهیم. ابتدا مخروط را معرفی کرده و یک ساختار توپولوژیک روی آن ایجاد می کنیم.در فصل دوم نوع خاصی از مخروط ها را بررسی می کنیم .این مخروط ها برای استفاده در قضیهٔ مورد نظر،یعنی قضیه کرانداری یکنواخت، مناسب هستند .در فصل سوم به بیان واثبات قضیه کرانداری یکنواخت می پردازیم .قضیه(۲-٦) از فصل دوم در اصلاح وتعمیم یک پیشنهاد مقاله توسط خودمان بیان وثابت شده است .

فصل اول

تعاریف وقضایای مقدماتی

مخروط ها وزیر مخروط ها

(۱–۱)تعریف:یک مخروط عبارت است از یک مجموعه مانند P همراه با دو عمل جمع $(a,b)\to a+b$ و ضرب اسکالر $(\alpha,a)\to \alpha a$ برای اعداد حقیقی $\alpha\geq 0$ به طوری که اعمال تعریف شده دارای خواص زیر باشد:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \forall a,b,c\in P$$
$$a+b=b+a \qquad \forall a,b\in P$$
$$\exists 0\in P \quad s.t. \quad a+0=a \qquad \forall a\in \mathrm{P}$$

و

$$\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a \qquad \forall\alpha,\beta\geq 0,\forall a\in P$$
$$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a \qquad \forall\alpha,\beta\geq 0,\forall a\in P$$
$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b \qquad \forall\alpha\geq 0,\forall a,b\in P$$
$$1.a=a,0.a=0 \qquad \forall a\in P$$

(۱–۲)مثال: مجموعه $\overline{R}=R\bigcup\{+\infty\}$ همراه با جمع معمولی و ضرب اسکالر با اعداد نامنفی یک مخروط است (بررسی خواص ساده است).

(۱–۳)تعریف: اگر P یک مخروط باشد $A\subset P$ را محدب گویند،هرگاه

$$\lambda a+(1-\lambda)b\in A \qquad \forall a,b\in A,0\leq\lambda\leq 1$$

مجموعه تمام زیر مجموعه های محدب و غیر خالی P را با $Conv(P)$ نشان می دهند.

روی این مجموعه اعمال جمع و ضرب عددی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\} \qquad \forall A,B\in Conv(P)$$
$$\alpha A=\{\alpha a|a\in A\} \qquad \forall A\in Conv(\mathrm{P}),\forall\alpha\geq 0$$

مجموعهٔ $Conv(\mathrm{P})$ همراه با اعمال جمع و ضرب عددی تعریف شده به صورت فوق یک مخروط می باشد.

وجود خواص لازم واضح است.فقط خاصیت $\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A$ را بررسی می کنیم.

با فرض $c\in(\alpha+\beta)A$، a ای متعلق به Aوجود دارد به طـوری کـه $c=(\alpha+\beta)a$. در نتیجه $c=\alpha a+\beta a\in\alpha A+\beta A$ ، یعنی $(\alpha+\beta)A\subset\alpha A+\beta A$.

برای اثبات رابطهٔ عکس گوییم اگر $\alpha=\beta=0$ تساوی واضح است ،پس فرض مـی کنیـم حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد در این صورت با فرض $c\in\alpha A+\beta B$ ، a و b ای متعلـق به A وجود دارند به طوری که $c=\alpha a+\beta b$ ، بنابراین چون A محدب است لذا

$$c=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha a}{\alpha+\beta}+\frac{\beta b}{\alpha+\beta}\right)\in(\alpha+\beta)A$$

پس

$$\alpha A+\beta B\subseteq(\alpha+\beta)A$$

در نتیجه

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

(۱-۴)تعریف: رابطه انعکاسی و متعدی $\leq$در Pرا با خواص زیر :

$$a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c \qquad \forall a,b,c\in P$$

$$a\leq b\Rightarrow \alpha a\leq\alpha b \qquad \forall a,b\in P,\forall\alpha\geq 0$$

یک شبه ترتیب روی مخروط P می نامند. این رابطـــه لزومـاً پـاد متقـارن نیســت یعنــی اگــر $a\leq b$ و $b\leq a$، نمی توان نتیجه گرفت $a=b$.

مخروط P همراه با شبه ترتیب $\leq$ را یک مخروط شبه مرتب می گویند وبا علامت $(\mathrm{P},\leq)$ نشان می دهند .

مخروط P همراه با $\leq$را یک مخروط مرتب می نامند اگر $\leq$ علاوه بر انعکاسی و متعدی بودن پادمتقارن نیز باشد.

به طور مثال مخروط $\overline{R}$ باترتیب معمولی و $Conv(\mathrm{P})$با ترتیب شمول $(\subseteq)$یک مخروط مرتب است.

چون رابطه تساوی در مخروط ها یک چنین ترتیبی است،بنابراین هر مخروط می تواند دارای ترتیب باشد و تمام نتایج ما در مورد مخروط های بدون ساختار ترتیبی نیز به خوبی برقرار خواهد بود . به علاوه در هر مخروط می توان یک عمل ترتیبی دیگر به نام ترتیب طبیعی به صورت زیر تعریف کرده ،آن را به مخروط مرتب تبدیل کنیم.

برای هر $a,b\in P$ تعریف می کنیم $a\leq b$ هر گاه عضوی مانند c در P باشد به طوری که $a+c=b$.

تعریف(۱-۵): فرض کنیم $(\mathrm{P},\leq)$ یک مخروط مرتب باشد، $L\subset \mathrm{P}$ را صعودی گوییم اگر برای هر $a\in \mathrm{P}$ و $c\in L$ که $c\leq a$ آنگاه $a\in L$.

L را نزولی گوییم هر گاه برای هر $a\in \mathrm{P}$ و $c\in L$ که $a\leq c$ آنگاه $a\in L$.

(۱-۶)تعریف: زیر مجموعه غیر خالی Q از مخروط Pرا یک زیر مخروط می نامیم هر گاه Q نسبت به اعمال جمع و ضرب عددی نامنفی تعریف شده در P بسته باشد. یعنی :

اگر $\forall a,b\in Q,\forall\alpha\geq 0$ آنگاه $\alpha a\in Q \quad , \quad a+b\in Q$

لازم به توضیح است که ترتیب P در Q نیز القاء می شود.

(۱–۷)تعریف:نگاشت $\mu : P \to \overline{R}$ را که

$$\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b) \qquad \forall a,b \in P$$
$$\mu(\alpha a) = \alpha\mu(a) \qquad \forall a \in P, \forall \alpha \geq 0$$

یک تابعک خطی روی P می نامند.

توجه می کنیم که در $\overline{R}$ اعمال جمع و ضرب معمولی را در نظر می گیریم یعنی:

$$\alpha + (+\infty) = +\infty \qquad \forall \alpha \in R$$
$$0.(+\infty) = 0, \alpha.(+\infty) = +\infty \qquad \forall \alpha > 0$$

تابعک μ را یکنوا می نامیم هر گاه اگر $a \leq b$ آنگاه $\mu(a) \leq \mu(b)$.

دستگاه 0– همسایگی های مجرد

(۱–۸)تعریف :اگر P یک مخروط شبه مرتب باشد، $V \subset P$ را یک دستگاه 0– همسایگی مجرد گویند هر گاه دارای خواص زیر باشد:

الف) $v > 0$, $\forall v \in V$ ($v > 0$ یعنی $v \geq 0$ و $v \neq 0$)

ب) $w \leq u, w \leq v$ $s.t.$ $\exists w \in V$ $\forall v,u \in V$

پ)برای هر $v,u \in V$ و $\alpha > 0$ ، $u+v \in V$ و $\alpha v \in V$(یعنی V یک زیر مخروط Pاست بدون عنصر صفر).

اگر $a \in P$، $a+v$ برای هر $v \in V$ یک همسایگی مجرد برای a خواهد بود ، یعنی $\{a+v | v \in V\}$ یک دستگاه همسایگی ها برای a است.

(۱–۹) تعریف: زیر مجموعه $U \subset V$ را یک پایه از دستگاه 0– همسایگی مجرد V گفته می شود هر گاه برای هر $v \in V$ یک $u \in U$ و یک $\alpha > 0$ موجود باشد به طوری که $\alpha u \leq v$.

در حالت کلی $U \subset P$ یک پایه از دستگاه 0-همسایگی های مجرد است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند.

الف) $\forall u \in U \quad , \quad u > 0$

ب) $\forall u,v \in U \quad , \quad \exists w \in U, \alpha > 0 \quad s.t. \quad \alpha w \le u, \alpha w \le v$

چنین Uای یک پایه صفر همسایگی گفته می شود و مجموعه تمام ترکیبات متناهی به صورت $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ با $\alpha_i \ge 0$ و $u_i \in U$ یک دستگاه 0-همسایگی خوا هد بود(بررسی خواص ساده است).

توپولوژی های موضعاً محدب

اگر P یک مخروط شبه مرتب و Vیک دستگاه 0- همسایگی مجرد در P باشد برای هر $a \in P$ وهر $v \in V$ تعریف می کنیم.

$$v(a) = \{b \in \mathrm{P} | b \le a + v\}$$

و

$$(a)v = \{b \in \mathrm{P} | a \le b + v\}$$

و

$$v(a)v = v(a) \bigcap (a)v$$

این مجموعه ها را به ترتیب همسایگی های بالایی،پایینی و متقارن a می نامیم که هر کدام از این نوع همسایگی ها یک توپولوژی در P ایجاد می کند که به ترتیب توپولوژی بالایی،توپولوژی پایینی و توپولوژی متقارن نامیده می شود .

محدب بودن همسایگی های تعریف شده در فوق به سادگی قابل بررسی است.

توپولوژی های بالایی و پایینی در P ها سدورف نیستند،زیرا ترتیب تعریف شده شبه ترتیب است. مثلاً برای هر دو عضو $a,b \in \mathrm{P}$ $(a \neq b)$ وهر $v \in V$،همسایگی های $v(b), v(a)$ همیشه دارای اشتراک خواهند بود.

(۱–۱۰) تبصره: اگر Q یک زیر مخروط P باشد و $a \in Q$ و V دستگاه 0– همسایگی مجرد در P باشد ،یک توپولوژی از P به Q القاء می شود که برای هر $v \in V$همسایگی های بالایی وپایینی ومتقارن درتوپولوژی القایی به صورت زیر است :

$$v_Q(a) = v(a) \cap Q = \{b \in Q | b \leq a + v\}$$

$$(a)_Q v = (a)v \bigcap Q = \{b \in Q | a \leq b + v\}$$

$$v_Q(a)_Q v = v(a)v \bigcap Q$$

(۱–۱۱)تعریف:اگر P یک مخروط شبه مرتب و V یک دستگاه 0– همسایگی در P باشد برای هر $v \in V$ ، $a \in P$ را v– کراندار بالا گوییم هرگاه $\lambda > 0$ ای موجود باشد به طوری که $a \leq \lambda v$.

$a \in \mathrm{P}$ را v–کراندار پایین گوییم هر گاه $\lambda' > 0$ ای موجود باشد به طوری که $0 \leq a + \lambda' v$

، a را v– کراندار گوییم هر گاه v– کراندار بالا و پایین باشد.

$a \in \mathrm{P}$ را از بالا کراندار گوییم هرگاه به ازای هر $v \in V$، v–کراندار بالا باشد . به طریق مشابه اعضای کراندار از پایین وکراندار تعریف می شوند .