بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

مقایسه بین نرمهای فازی روی فضای خطی

استاد راهنما:

دکتر اکبر نظری

مؤلف:

جواد عباسی

بهمن ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزتر از جانم که همواره روشنی بخش زندگی ام هستند وتقدیم به همسرمهربانم با عشق

تشکر و قدردانی:

حمد و سپاس پرورگار بلند مرتبه را که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود که اگرپرتوی فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی شدم.

ابتدا لازم می دانم ازپدرو مادر عزیزم و همسر مهربانم که من را همواره با صبر ودلسوزی مورد مهر و حمایت خود قرار دادند تشکر کنم.

از استاد ارجمند و مهربانم جناب آقای دکتر اکبر نظری به عنوان یک استاد کامل به خاطر راهنمایی های ارزنده و دقت نظر فوق العاده ایشان در تمام امور و صبر و حوصله ای که صرف این پایان نامه کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از اساتید عالی مقام جناب آقای دکتر آقاملایی و جناب آقای دکتر دعاگویی که دعوت و داوری این پایان نامه را پذیرفتند، نیز بسیار سپاس گذارم. توفیق روز افزون، سلامتی و سعادت همه ی اساتید بزرگوار را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

چکیده:

در این پایان نامه نرم های فازی فلبین[۱]، کاتساراس[۲]، بگ[۳] و سامانتا[۴] و n- نرم معرفی می شوند و سپس مقایسه بین نرمهای فازی فلبین، کاتساراس و بگ و سامانتا انجام می گیرد. مشاهده می شود که نرم فازی تعریف شده توسط بگ و سامانتا شبیه کاتساراس است که او آن را با روشی متفاوت تعریف کرده است. از طرف دیگر، نرم فازی نوع فلبین با یک زوج نرم فازی و پاد نرم فازی متناظر است.

[1] Felbin
[2] Katsaras
[3] Bag
[4] Samanta

مقدمه

مفهوم نرم فازی روی فضای خطی نسبتا جدید است. کاتساراس [۶] با مطالعه فضاهای برداری توپولوزیک فازی، اولین بار ایده نرم فازی روی فضای خطی را در ۱۹۸۴ بیان کرد. به دنبال این اثر آغازین فلبین[۴] در ۱۹۹۲ تعریف دیگری از نرم فازی روی فضای خطی ارائه داد. مولفین حاضر در نتیجه چنین تکاملی از مفهوم نرم فازی روی یک فضای خطی و با بدست آوردن یک تعریف از دیگر تعریف نرم، که ممکن است توانایی موثرتری از نظر کاربردی در زمینه های مختلف داشته باشد، به نتایجی رسیده اند. بعضی از نتایج همچنین، در فضای خطی نرمدار فازی از نوع فلبین (برای منابع لطفا [۲,۳,۴] را ببینید) بدست می آیند. از آنجا که با استفاده از این نتایج انواع متفاوتی از نرمهای فازی بدست می آید، بنابراین به طور بدیهی مقایسه روابط بین این نرمهای فازی پیشنهاد می شود. در این پایان نامه تلاش برای پیدا کردن چنین رابطه ای با انجام یک مطالعه مقایسه ای از نرمهای فازی تعریف شده توسط کاتساراس و فلبین وبگ وسامانتا صورت گرفته است. مشاهده شده است که نرم فازی تعریف شده توسط بگ و سامانتا شبیه کاتساراس است که او آن را با روش متفاوتی تعریف کرده است.از طرف دیگر، نرم فازی نوع فلبین با یک زوج نرم فازی و پاد نرم فازی متناظر است.

در فصل اول این پایان نامه تعاریف و نتایج اولیه بیان می شود. در فصل دوم فضای خطی n- نرم فازی تعریف و قضایا ومثالهای مربوط به آن بیان می شود.در فصل سوم بعضی خواص B–S– نرم فازی و B– S–پاد نرم فازی آورده می شود.در فصل چهارم مقایسه بین فلبین نرم فازی وB–S–نرم فازی انجام می گیرد.در فصل پنجم مقایسه بین کاتساراس نرم فازی وB–S–نرم فازی انجام می گیرد.

بنابراین هدف این پایان نامه مقایسه بین چند نرم فازی می باشد.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

تعاریف ونتایج اولیه

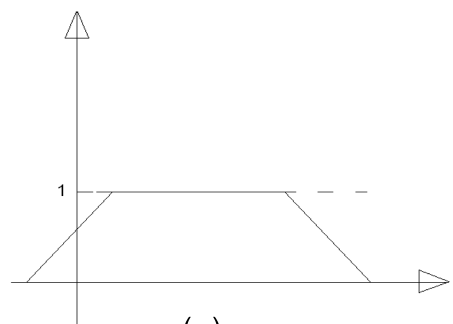
۱: تعاریف ونتایج اولیه

در این فصل، ابتدا بعضی از تعاریف و قضایایی که در سرتاسر پایان نامه به آن نیاز می باشد ارائه می گردد؛ از جمله: عدد فازی، تابع محدب ، تابع نرمال ، عدد فازی نامنفی، بازه $\propto$ -برش از یک عدد فازی. سپس اعمال روی بازه ها، اعمال روی $\propto$- برشها، ماکزیمم ومینیمم اعداد فازی را بیان می کنیم و در ادامه B-S- نرم فازی را تعریف می کنیم .

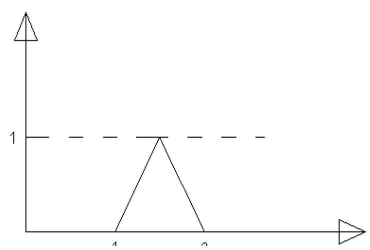
۱.۱: تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. [۷]: هر تابع مانند $\chi: R \rightarrow [0,1]$ یک عدد فازی نامیده می شود.

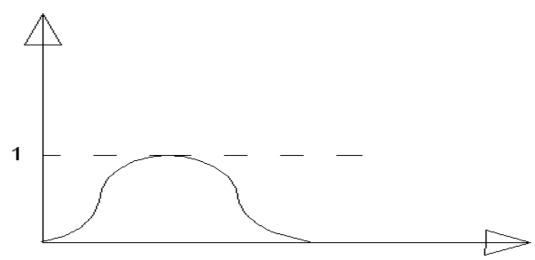
مثال ۲.۱.۱: نمودارهای زیر نمایش دهنده اعداد فازی هستند.



(ب)



(الف)

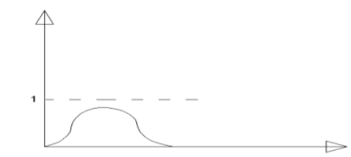


(ج)

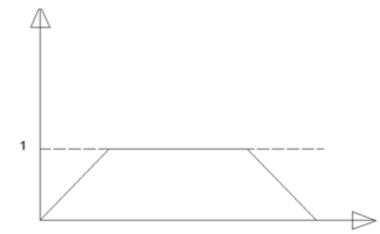
تعریف ۳.۱.۱ : عدد فازی χ محدب نامیده می شود هرگاه:

$\chi(t) \geq \min(\chi(s), \chi(r))$, $s \leq t \leq r$.

مثال ۴.۱.۱ : نمودارهای زیر نمایش دهنده اعداد فازی محدب هستند.

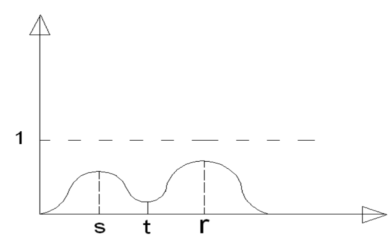


(الف)



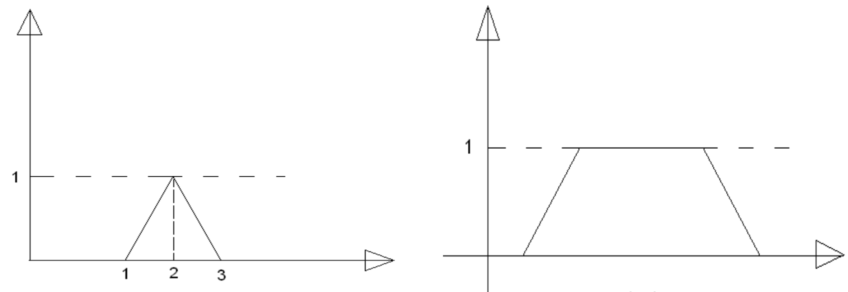
(ب)

مثال ۵.۱.۱ : نمودار زیر نمایش دهنده عدد فازی محدب نیست.



تعریف ۶.۱.۱ : عدد فازیχ نرمال نامیده می شود هرگاه وجود داشته باشد $t_0 \in R$ به طوریکه $\chi(t_0) = 1$.

مثال ۷.۱.۱ : نمودارهای صفحه بعد نمایش دهنده اعداد فازی نرمال هستند.

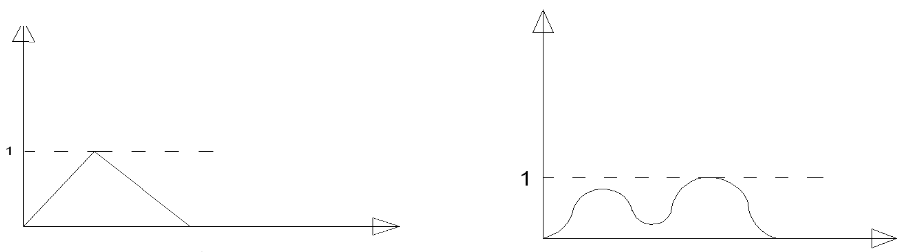


(الف) (ب)

تعریف ۸.۱.۱ : عدد فازی χ نامنفی نامیده می شود هرگاه:

$$\chi(t) = 0 \ , \quad \forall t < 0.$$

مثال ۹.۱.۱ : نمودارهای زیرنمایش دهنده اعداد فازی نامنفی می باشند.



(الـف) (ب)

تعریف ۱۰.۱.۱: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. زیر مجموعه فازی X توسط تابع $A: X \rightarrow [0,1]$ تابع عضویت نامیده می شود که در آن برای هر $x \in X$ عدد حقیقی $A(x)$ میزان عضویت x در آن مجموعه را مشخص می کند.

مجموعه تمام زیر مجموعه های فازی X را با $F(X)$ نمایش می دهیم و بنابراین:

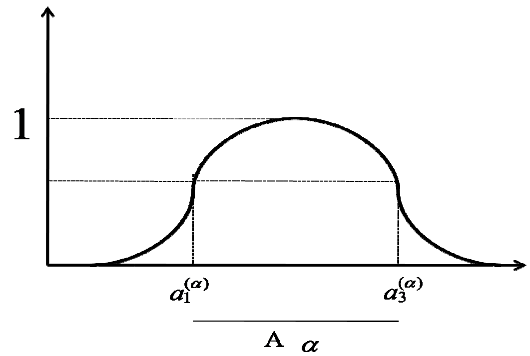
$$F(X) = \{A \mid A: X \rightarrow [0,1]\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ : فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و $A \in F(X)$. برای عدد حقیقی $\alpha \in (0,1]$ مجموعه $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه α - برش A می نامیم.

بازه ∝–برش ازعدد فازی A که با $A_\propto$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد.

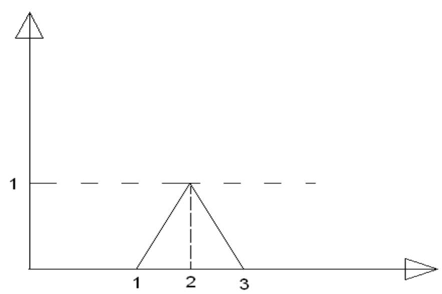
$$A_\propto := \left[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}\right].$$

در شکل زیر یک ∝- برش نمایش داده شده است.



مثال ۱۲.۱.۱ : در شکل زیر برای هر $\propto\in(0,1]$ داریم

$$A_\propto = [1+\propto, 3-\propto].$$



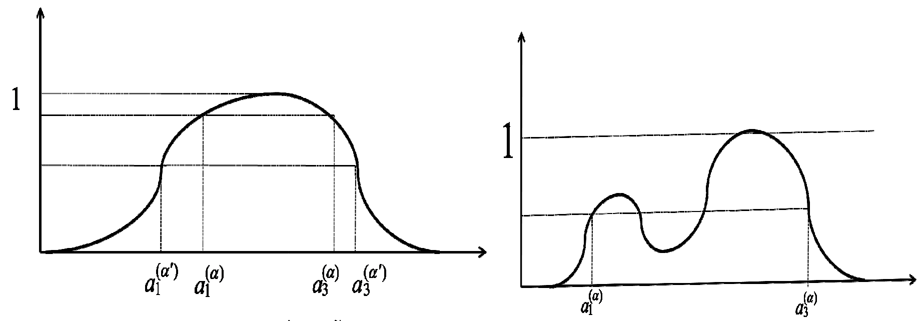
(الف)

نکته: اگر $A_\propto$, $A_{\propto'}$ دو ∝- برش باشند و $\propto'<\propto$ آنگاه داریم:

$$a_1^{(\propto')} \le a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto')} \ge a_3^{(\propto)}.$$

شرط محدب باعث می شود خط$\propto$ - برش پیوسته باشد. دراین حالت برای $\propto' < \propto$ داریم:

$$[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}] \subset [a_1^{(\propto')}, a_3^{(\propto')}] \Rightarrow A_{\propto} \subset A_{\propto'} .$$



الف-α-برش پیوسته است

ب-α-برش پیوسته نیست

تعریف ۱۳.۱.۱ (نیم پیوسته بالایی): فرض کنید f یک تابع حقیقی بر فضای توپولوژیک X است. هرگاه $\{x \in X \mid f(x) < \propto \ \ \forall \propto \in R\}$ باز باشد، آنگاه به تابع f نیم پیوسته بالایی گوئیم.

همچنین با توجه به اینکه در فصل پنجم برای تابع $N: X \times R \to [0,1]$ (خواص آن در فصل پنجم بیان می شود) ، احتیاج به بررسی نیم پیوسته بالایی این تابع می باشد، لذاتعریف دیگری از نیم پیوسته بالایی برای این گونه توابع به صورت زیر می باشد.

تابع $N(x,.)$ نیم پیوسته بالایی در $t = 0$ برای $x \neq \underline{0}$ می باشد هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists(-t_0, t_0) \qquad s.t \ \ \forall t \in (-t_0, t_0) \qquad N(x.t) < \varepsilon.$$

تعریف۱۴.۱.۱: اگر $0 < \propto \leq 1$ ، آنگاه$\propto$- تراز یک عدد فازی نرمال، محدب، نیم پیوسته بالایی مانند x ، بازه بسته $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ می باشد که با $[x]_{\propto}$ نمایش داده می شود. در اینجا$a_{\propto} = -\infty$ و$b_{\propto} = +\infty$ قابل قبول می باشند.

برای مثال وقتی که $a_{\propto} = -\infty$ آنگاه بازه $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ به صورت بازه$(-\infty, b_{\propto}]$ می باشد. به طور مشابه $b_{\propto} = +\infty$ آنگاه بازه $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ به صورت $[a_{\propto}, +\infty)$ است.

قرارداد: فلبین[۱] [۴] مجموعه همه اعداد فازی نیم پیوسته بالایی، نرمال و محدب را بوسیله R(I) ومجموعه همه اعداد فازی نیم پیوسته بالایی، نرمال و محدب نامنفی را به صورت $R^*(I)$ نمایش

[1] - Felbin

داد. چون برای هر $r \in R$ می توان عدد فازی $\bar{r}$ که به صورت زیر تعریف می شود را در نظر گرفت

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1 & t = r, \\ 0 & t \neq r. \end{cases}$$

بنابراین R را می توان در R(I) نشاند.

یک مرتب سازی $\preccurlyeq$ در R(I) به صورت $\mu \preccurlyeq \delta$ اگر و فقط اگر $a_{\propto}^{1} \preccurlyeq a_{\propto}^{2}$ و $b_{\propto}^{1} \preccurlyeq b_{\propto}^{2}$ برای $\propto \epsilon\ (0,1]$ تعریف می شود . در اینجا $[\delta]_{\propto} = [a_{\propto}^{2}, b_{\propto}^{2}]$ و $[\mu]_{\propto} = [a_{\propto}^{1}, b_{\propto}^{1}]$.

نامساوی اکید در R(I) به صورت $\mu \prec \delta$ اگر و فقط اگر $a_{\propto}^{1} \prec a_{\propto}^{2}$ و $b_{\propto}^{1} \prec b_{\propto}^{2}$ ، برای

$\propto \in (0,1]$ تعریف می شود. برای $k > 0$، $k\mu$ به صورت $(k\mu)(t) = \mu(t/k)$ تعریف می شود.

همچنین $0\mu = \bar{0}$ تعریف می شود.

لم ۱.۱.۱۵. [۵] : فرض کنید $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ یک خانواده از بازه های ناتهی برای $0 < \propto \leq 1$ باشند. همچنین اگر:

$$\left[a_{\propto_1}, b_{\propto_1}\right] \supseteq \left[a_{\propto_2}, b_{\propto_2}\right], \forall\ 0 < \propto_1 \leq \propto_2\ , \qquad \text{(i)}$$

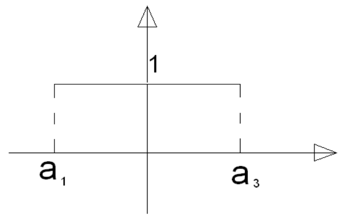
$$[\lim_{k\to\infty} a_{\propto_k}, \lim_{k\to\infty} b_{\propto_k}] = [a_{\propto}, b_{\propto}]. \qquad \text{(ii)}$$

و $\{\propto_k\}$ یک دنباله افزایشی در $(0,1]$ همگرا به $\propto$ باشد، آنگاه خانواده $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ مجموعه های $\propto$- تراز، از یک عدد فازی می باشند.

برعکس: اگر $[a_{\propto}, b_{\propto}]$ و $0 < \propto \leq 1$ مجموعه های $\propto$- تراز از یک عدد فازی باشند، آنگاه شرایط (i) و (ii) برقرارند.

نکته ۱.۱.۱۶ : با توجه به این که هر بازه چون $A = [a_1, a_3]$ یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی است و لذا هر بازه را نیز می توان به صورت یک عدد فازی به فرم زیر نمایش داد.

$$x_A(t) = \begin{cases} 0 & t < a_1\ , \\ 1 & a_1 \leq t \leq a_3, \\ 0 & t > a_3. \end{cases}$$



نمودار $x_A(t)$

اگر $a_3 = a_1$ در این صورت این بازه یک نقطه مانند $[a_1, a_1] = a_1$ را نمایش می دهد.

۲.۱ : اعمال روی بازه ها:

قرارداد: در عبارات زیر به جای maxو min به ترتیب از نمادهای V و $\wedge$ استفاده می کنیم.

به ازای $a_1, a_3, b_1, b_3 \in R$ بازه های $A = [a_1, a_3]$ و $B = [b_1, b_3]$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3], \quad \text{(i)}$$
$$[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_1, a_3 - b_3],$$
$$[a_1, a_3](\times)[b_1, b_3] =$$
$$= [a_1 \times b_1 \wedge a_1 \times b_3 \wedge a_3 \times b_1 \wedge a_3 \times b_3, a_1 \times b_1 \vee a_1 \times b_3 \vee a_3 \times b_1 \vee a_3 \times b_3],$$
$$[a_1, a_3](/)[b_1, b_3] = \quad \text{(ii)}$$
$$= [a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_1 \wedge a_3/b_3, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3].$$

به جز در حالتیکه $b_1 = 0$ یا $b_3 = 0$.

وقتی مجموعه های A وB روی اعداد حقیقی R^+ تعریف می شوند، برای عملگرهای ضرب و تقسیم داریم:

$$[a_1, a_3](\times)[b_1, b_3] = [a_1 \times b_1, a_3 \times b_3] \quad \text{(iii}')$$

$$[a_1, a_3](/)[b_1, b_3] = [a_1/b_3, a_3/b_1]. \quad \text{(iv}')$$

مثال ۱.۲.۱ : برای دو بازه $A = [3,5]$, $B = [-2,7]$ داریم:

$A(+)B = [3-2, 5+7] = [1,12],$

$A(-)B = [3-7, 5-(-2)] = [-4,7],$

$$A(\times)B = \\ = [3\times(-2) \wedge 3\times 7 \wedge 5\times(-2) \wedge 5\times 7, 3\times(-2) \vee 3\times 7 \vee 5\times(-2) \vee 5\times 7] = [-10,35],$$

$$A(/)B = [3/(-2) \wedge 3/7 \wedge 5/(-2) \wedge 5/3, 3/(-2) \vee 3/7 \vee 5/(-2) \vee 5/7] = [-2\cdot 5, 0\cdot 7].$$

۳.۱ : اعمال روی $\propto$ - برش ها:

برای$\propto$ - برش اعداد فازی $A = [a_1, a_3]$ و $B = [b_1, b_3]$ به صورت:

$$A_\propto = [a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}], \forall \propto \in (0,1], a_1, a_3, a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} \in R,$$

$$B_\propto = [b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}], \forall \propto \in (0,1], b_1, b_3, b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)} \in R,$$

اعمال جبری جمع، تفریق وتقسیم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](+)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = [a_1^{(\propto)} + b_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} + b_3^{(\propto)}],$$

$$[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](-)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = \left[a_1^{(\propto)} - b_3^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} - b_1^{(\propto)}\right],$$

$$[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](\times)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = [a_1^{(\propto)} \times b_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} \times b_3^{(\propto)}],$$

$$[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](/)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = [a_1^{(\propto)} / b_3^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} / b_1^{(\propto)}],$$

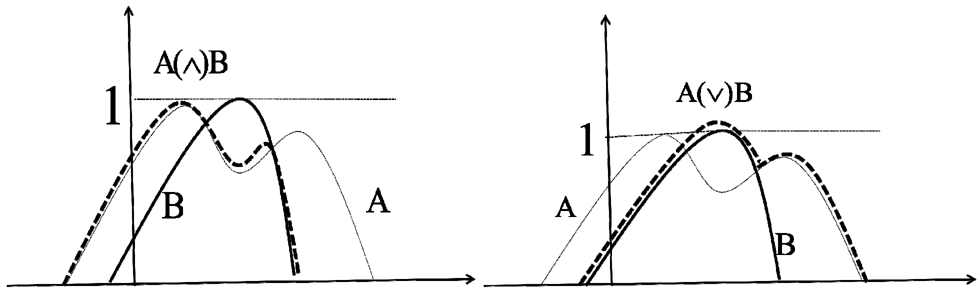
$$k \times A_\propto = [k,k](\times)\left[a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}\right] = \left[k a_1^{(\propto)}, k a_3^{(\propto)}\right] \qquad \forall k \in R.$$

۴.۱ : ماکزیمم و مینیمم اعداد فازی:

دو عدد فازی $A = [a_1, a_3], B = [b_1, b_3]$ را در نظر می گیریم، برای $\propto \in (0,1]$ تعریف می کنیم:

$$A_\propto(\wedge)B_\propto = [a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](\wedge)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = [a_1^{(\propto)} \wedge b_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} \wedge b_3^{(\propto)}],$$

$$A_{\propto}(V)B_{\propto} = [a_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)}](V)\left[b_1^{(\propto)}, b_3^{(\propto)}\right] = [a_1^{(\propto)} V b_1^{(\propto)}, a_3^{(\propto)} V b_3^{(\propto)}] \cdot$$



تعریف ۱.۴.۱ : اگر o یک عمل دوتایی روی R باشد، آنگاه می توان این عمل را روی F(R) به صورت زیر تعریف کرد:

نمادگذاری: می توان به جای sup و inf به ترتیب از نمادهای V و Λ استفاده کرد که در آن سوپریمم و اینفیمم روی مجموعه تهی، صفر تعریف می شود، بنابراین داریم:

فرض کنید A و B دو عدد فازی روی مجموعه اعداد حقیقی باشند در این صورت برای x , y, z ∈ R داریم:

$$A\,(+)\,B\,(z) = \underset{z = x + y}{V\{\Lambda(A(x), B(y)\},}$$

$$A\,(-)\,B\,(z) = \underset{z = x - y}{V\{\Lambda(A(x), B(y)\},}$$

$$A\,(\times)\,B\,(z) = \underset{z = x \times y}{V\{\Lambda(A(x), B(y)\},}$$

$$A\,(/)\,B\,(z) = \underset{z = x / y}{V\{\Lambda(A(x), B(y)\},}$$

$$A\,(\wedge)\,B\,(z) = \bigvee_{z = x \wedge y} \{ \wedge(A(x), B(y)\},$$

$$A\,(\vee)\,B\,(z) = \bigvee_{z = x \vee y} \{ \wedge(A(x), B(y)\}.$$

مثال ۲.۴.۱ : دو مجموعه فازی A و B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \{(2,1),(3,0\cdot 5)\}, B = \{(3,1),(4,0\cdot 5)\},$$

سپس داریم:

اگر $z < 5$ در این صورت:

$$z = x + y < 5 \Rightarrow A(+)B(z)=0.$$

اگر $z = 6$ در این صورت:

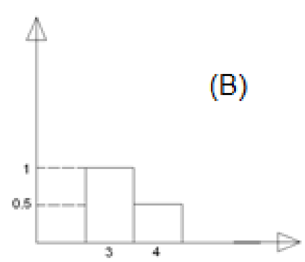
$$z = x + y = 2 + 4 \quad , \qquad z = x + y = 3 + 3\,,$$

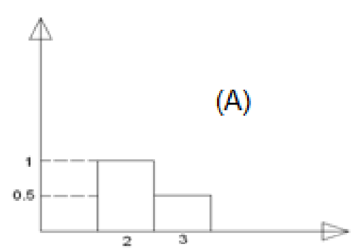
$$A(3) \wedge B(3) = 0\cdot 5 \wedge 1 = 0\cdot 5,$$

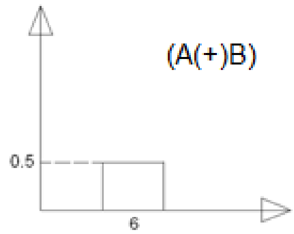
$$A(2) \wedge B(4) = 1 \wedge 0\cdot 5 = 0\cdot 5,$$
$$\Rightarrow A(+)B(6) = \vee(0\cdot 5, 0\cdot 5) = 0\cdot 5\ .$$

$$6 = 3 + 3$$

$$6 = 2 + 4$$





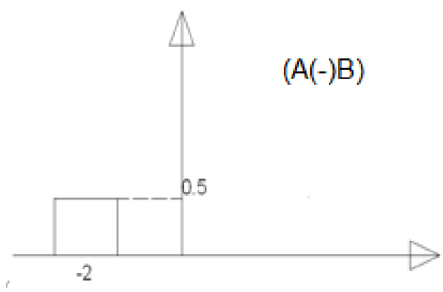


اگر $z=-2$ در این صورت:

$z = x - y = 2 - 4\,,$

$A(2)\wedge B(4) = 1\wedge 0\cdot 5 = 0\cdot 5,$

$A(-)B(-2) = 0\cdot 5\quad .$



اگر $z=4$ در این صورت:

$z = x \vee y = 3\vee 4 \quad , \quad z = x \vee y = 2\vee 4\,,$

$A(2)\wedge B(4) = 1\wedge 0\cdot 5 = 0\cdot 5,$

$A(3)\wedge B(4) = 0\cdot 5\wedge 0\cdot 5 = 0\cdot 5\,,$

$\Rightarrow A(\vee)B(4) = \vee(0\cdot 5, 0\cdot 5).$

$4 = 2\vee 4$

$4 = 3\vee 4$