بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض — آنالیز

نقاط ثابت مشترک یک جفت از نگاشت‌های ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی روی فضاهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر سید محمد مشتاقیون

استاد مشاور:

دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق

پژوهش و نگارش:

مرضیه سورانی یانچشمه

مهرماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

مهربانترین معلمان و معلمان مهربانی

پدر و مادرم

تقدیر و تشکر

ستایش خدایی را سزد که هر حرکتی در گرو لطف و عنایت اوست، خالق زیبایی‌ها و نظم‌ها. بخشنده‌ای که از کرم عطا می‌کند و عزیزی که جز به احسان او چشم امیدی نیست.

در ابتدا از زیباترین واژگان هستی، بهترین مخلوقات الهی، پدر و مادرم و نیز از اعضای خانواده‌ام تشکر می‌کنم.

از راهنمایم، برترین استاد دوران تحصیلم، جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون به خاطر راهنمایی و همراهی‌شان که همواره حرکت را برایم سهل و آسان می‌نمود و شاگردیشان بر من افتخاری است بسیار سپاسگزارم و از خداوند منان برای ایشان سلامتی و سربلندی مسئلت می‌نمایم.

از استاد بزرگوارم، آقای دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق که مشاوره این رساله را عهده‌دار بودند کمال تشکر را دارم. همچنین از آقای دکتر حمید مظاهری و جناب آقای دکتر مجید فخار عضو هیئت علمی دانشگاه اصفهان که در طول مدت تحصیل نیز از محضرشان بهره‌های فراوان برده‌ام، به خاطر قبول داوری این پایان‌نامه سپاسگزارم و از خالق بزرگ برای همه این عزیزان توفیق روزافزون خواستارم.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	**صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد**	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامــه تحصیلی خانم مرضیه سورانی یانچشمه دانشجوی کارشناسی ارشد

رشتــه/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: نقاط ثابت مشترک یک جفت از نگاشت‌های نا انبساطی و ناانبساطی مجانبی روی فضاهای باناخ

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۷/۷/۲۷ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده وبیست و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	سیدمحمد مشتاقیون	
استاد/ استادان مشاور:	سیدمحمدصادق مدرس مصدق	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	حمید مظاهری تهرانی	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	مجید فخار	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)
نام ونام خانوادگی: علی بنویدی
امضاء:

چکیده

هدف این رساله بررسی روش‌هایی برای یافتن نقاط ثابت نگاشت‌های ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی است که در چهار فصل تنظیم شده است. در دو فصل اول بیشتر به جنبه تئوری موضوع و قضایای وجودی نقطه ثابت، توجه کرده و در دو فصل سوم و چهارم به معرفی روش‌ها و الگوریتم‌هایی برای یافتن نقاط ثابت نگاشت‌های ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی روی زیرمجموعه‌های ناتهی، محدب، بسته و کراندار از فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب پرداخته‌ایم. در فصل یک مفاهیم و مقدماتی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم آورده شده است. در فصل دوم خاصیت نقطه ثابت در فضاهای باناخ را معرفی می‌کنیم و نشان خواهیم داد که هر نگاشت ناانبساطی مجانبی روی یک مجموعه ناتهی، محدب، بسته و کراندار از یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب، همواره دارای نقطه ثابت است که اساس کار ما بر پایه آن بنا نهاده شده است. در فصل سوم، سه الگوریتم بسیار مهم و پرکاربرد مان، ایشیکاوا و سه گامی که، برای یافتن نقاط ثابت وجود دارد بررسی می‌شوند. الگوریتم‌های موجود برای این منظور بسیار متنوعند، اما آنچه که باعث توجه بیشتر ما به این سه الگوریتم خاص شده است، پایه‌ای بودن و شباهت روش‌های دیگر با این الگوریتم‌ها و اهمیت این سه روش خاص می‌باشد. در سه بخش این فصل، هر کدام از این الگوریتم‌ها به صورت جداگانه بررسی شده و در پایان هر بخش همگرایی آن‌ها به اثبات می‌رسد. در فصل چهارم پا را فراتر نهاده و الگوریتمی را معرفی می‌کنیم که تحت شرایط مناسب، دنباله ارائه شده به صورت ضعیف و یا در نرم به سمت نقطه ثابت مشترکی از دو نگاشت ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی همگرا باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل سعی بر آن است تا با آوردن تعاریف و مفاهیم کلی مورد استفاده در این پژوهش، خواننده را با فضای مورد بحث و نگاشت‌های مورد نظر آشناتر کنیم. در سراسر متن فرض بر آن است که خواننده با مفاهیم اولیه آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی آشناست. اگر X یک فضای باناخ باشد گوی یکه و کره یکه X را به ترتیب با B_X و S_X، دوگان X را با X^* و دوگان دوم آن‌را با X^{**} نمایش می‌دهیم. همچنین $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{N}$ را به ترتیب برای نمایش اعداد حقیقی، اعداد حقیقی نامنفی $[0,\infty)$ و اعداد طبیعی به‌کار می‌بریم. فصل حاضر مشتمل بر سه بخش است که در آن ابتدا به تعریف فضاهای به طور یکنواخت محدب می‌پردازیم، سپس در بخش دوم نگاشت‌های انقباضی، ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی را معرفی می‌کنیم و در بخش سوم مسأله نقاط ثابت را مطرح خواهیم کرد. شایان ذکر است که اساس کار این رساله برمبنای نگاشت‌های ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی پایه گذاری شده و نگاشت‌های انقباضی صرفاً به منظور مقایسه قضایای نقطه ثابت بیان شده‌اند.

۱.۱ فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب

در این بخش ابتدا فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب، سپس مفهوم پیمانه تحدب را معرفی می‌کنیم و بعد از آن به بیان قضایایی در این نوع از فضاها می‌پردازیم.

۱.۱.۱ تعریف

فضای باناخ X را به طور یکنواخت محدب گوییم هرگاه به ازای هر ϵ در $(0,2]$، $\delta(\epsilon) > 0$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر x و y در X که $\|x\| \leq 1$ ، $\|y\| \leq 1$ و $\|x-y\| > \epsilon$ باشد، درستی نامساوی $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta(\epsilon)$ را بتوان نتیجه گرفت.

۲.۱.۱ مثال

فضاهای $L_p(\mu)$ و به خصوص l^p به ازای $۱ < p < \infty$ و فضاهای هیلبرت نمونه‌هایی از فضاهای به طور یکنواخت محدب می‌باشند.

برهان. برای اثبات به مرجع [۸] مراجعه کنید.□

۳.۱.۱ تعریف

تابع $\delta_X : [۰, ۲] \longrightarrow [۰, ۱]$، که به صورت زیر تعریف می‌شود را پیمانه تحدب فضای باناخ X می‌گوییم:

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\{ ۱ - \|\frac{x+y}{۲}\| : \ \|x\| \ \leq ۱, \ \|y\| \ \leq ۱, \ \|x-y\| \geq \epsilon\}.$$

به عبارتی می‌توان این‌گونه استنباط نمود که به ازای هر $\epsilon > ۰$ ، $\delta_X(\epsilon)$ بزرگترین عددی است که به ازای هر x و y در X به طوری که $\|x\| \leq ۱$ و $\|y\| \leq ۱$ و $\|x-y\| \geq \ \epsilon$ داشته باشیم $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta_X(\epsilon)$.

به عبارتی دیگر به ازای هر x ، y و p در فضای باناخ X، $R > ۰$ و r در $[۰, ۲R]$ برقراری شروط $\|x-p\| \leq R$ و $\|y-p\| \leq R$ و $\|x-y\| \geq r$ برقراری $\|p - \frac{x+y}{۲}\| \leq \ (۱ - \delta(\frac{r}{R}))\ R$ را ایجاب می‌کند.

۴.۱.۱ قضیه

اگر X فضایی باناخ با پیمانه تحدب δ باشد، آن‌گاه تابع δ روی بازه $[۰, ۲)$ و در صورتی که فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد روی $[۰, ۲]$، پیوسته خواهد بود.

برهان. برای اثبات به مرجع [۸] مراجعه کنید.□

به وضوح فضای X به طور یکنواخت محدب می‌باشد اگر و تنها اگر به ازای هر $۰ < \epsilon \leq ۲$ ، $\delta_X(\epsilon) > \ ۰$ باشد. همچنین به آسانی دیده می‌شود که اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X باشند، شرایط

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲}\|x_n + y_n\| = ۱$$

تساوی $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ را ایجاب می‌نماید.

قضیه‌ای که در زیر به آن خواهیم پرداخت یکی از قضایای جالب و در عین حال پر کاربرد در این پژوهش می‌باشد. لازم به ذکر است که اثبات این قضیه در کتاب‌های کلاسیک از جمله [۲۰] آمده است اما، ما در این‌جا به دلیل اهمیت این قضیه اثبات آن را نیز بیان می‌کنیم.

۵.۱.۱ قضیه میلمن[۱]، پتیس[۲]

هر فضای باناخ به طور یکنواخت محدب بازتابی است.

برهان. فرض کنید X فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد، برای این‌که ثابت کنیم X بازتابی است، ثابت می‌کنیم نگاشت طبیعی Q، که به صورت زیر تعریف می‌شود نگاشتی پوشاست.

$$Q : X \to X^{**}$$
$$Q(x)(x^*) = x^*(x)$$

که در آن x در X و x^* عضوی از X^* است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم اگر x^{**} عضوی دلخواه در $S_{X^{**}}$ باشد آن‌گاه x^{**} در برد نگاشت Q می‌باشد. ابتدا با استفاده از قضیه گلدشتاین می‌دانیم $Q(B_X)$ در $B_{X^{**}}$، به‌طور ضعیف ستاره چگال می‌باشد و لذا تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ با مجموعه اندیس جهت‌دار I، در B_X چنان موجود است که $Q(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. حال اگر ترتیب را روی $I \times I$ به صورت

$$(\alpha_1, \beta_1) \preccurlyeq (\alpha_2, \beta_2) \text{ هرگاه } \alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2 \text{ و } \beta_1 \preccurlyeq \beta_2$$

در نظر بگیریم $I \times I$ به مجموعه‌ای جهت دار تبدیل شده و به این ترتیب تور $(Q(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)))_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ به‌دست می آید.

از آن‌جایی‌که $Q(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} x^{**}$ خواهیم داشت $Q(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. از طرفی می‌دانیم که

[۱] Milman
[۲] Pettis

تابع نرم w^*—نیم پیوسته پایینی است، یعنی برای هر تور w^*—همگرای (y_α) در یک فضای دوگان $\|w^* - \lim y_\alpha\| \leq \liminf \|y_\alpha\|$. لذا

$$\|w^* - \lim_{(\alpha,\beta)\in I\times I} Q(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta))\| \leq \liminf_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|Q(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta))\|,$$

و یا

$$\|x^{**}\| \leq \liminf_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|\frac{1}{2}Q(x_\alpha + x_\beta)\|.$$

حال از این‌که x^{**} در $S_{X^{**}}$ می‌باشد، $\|x^{**}\| = 1$ است و همچنین از آن‌جایی‌که x_α و x_β در B_X هستند و نگاشت طبیعی Q، یکریختی طولپا از X به‌توی X^{**} می‌باشد خواهیم داشت

$$1 \leq \liminf_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| \leq \limsup_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| \leq 1.$$

پس

$$\liminf_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| = \limsup_{(\alpha,\beta)\in I\times I} \|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| = 1.$$

لذا $\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| \to 1$ و چون X فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب می‌باشد داریم $\|x_\alpha - x_\beta\| \longrightarrow 0$. لذا تور (x_α) در X کشی است و چون X باناخ است، x_0 ای در X موجود است که $x_\alpha \to x_0$. همچنین بنابر پیوستگی نگاشت Q، $Q(x_\alpha) \to Q(x_0)$، پس $Q(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} Q(x_0)$.و از یکتایی حد داریم $x^{**} = Q(x_0)$. این نشان می‌دهد که هر x^{**} در $S_{X^{**}}$، متعلق به برد نگاشت Q است. از این رو فضای X بازتابی است.$\square$

۶.۱.۱ مثال

فضاهای $L_p(\mu)$ و l^p به ازای $p = 1$ و $p = \infty$، همچنین فضای c_0 به طور یکنواخت محدب نمی‌باشند، زیرا بازتابی نیستند.

۷.۱.۱ قضیه

فرض کنید X فضای باناخ به طور یکنواخت محدب و b و c اعدادی حقیقی و (t_n)

دنباله‌ای در $[b,c]$ که در آن $0 < b < c < 1$، باشد. اگر به ازای ثابت $a \geq 0$ داشته باشیم:

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq a \ \ , \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = a$$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

برهان. در حالتی که $a = 0$ باشد تساوی به وضوح برقرار است. برای حالتی که $a > 0$ باشد ابتدا نگاشت φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < \frac{1}{2} \\ \\ 2 - 2t & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

حال اگر به برهان خلف فرض کنیم $(x_n - y_n)$ به صفر همگرا نباشد آن‌گاه به ازای $\epsilon > 0$ ای زیردنباله‌ای چون $(x_{n_k} - y_{n_k})$ از $(x_n - y_n)$ وجود دارد به قسمی که برای هر k، $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| > \epsilon$، که البته در این‌جا برای راحتی کار زیر دنباله را مجدداً با $(x_n - y_n)$ نشان می‌دهیم.

اکنون با توجه به تعریف φ داریم:

$$\varphi(t_n) = \begin{cases} 2t_n \geq 2b & 0 < t_n < \frac{1}{2} \\ \\ (2 - 2t_n) \geq (2 - 2c) & \frac{1}{2} \leq t_n < 1 \end{cases}$$

و اگر d را به صورت $\min\{2b, 2 - 2c\}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\varphi(t_n)\|x_n - y_n\| \geq d\|x_n - y_n\| > d\epsilon, \ n \in \mathbb{N}.$$

حال اگر ϵ' در $(0, 1)$ را به گونه‌ای اختیار کنیم که $\epsilon' < 1$ و $\epsilon'(a+1) < d\epsilon$ باشد، از آن‌جایی‌که $0 < \delta(\epsilon') < 1$ می‌توانیم $a < R < a + 1$ را به قسمی اختیار کنیم که $(1 - \delta(\epsilon'))R < a$. در حقیقت با توجه به این‌که $a < \frac{a}{1-\delta(\epsilon')}$ می‌توانیم R را با شرط زیر اختیار کنیم:

$$a < R < \min\{a + 1, \frac{a}{1 - \delta(\epsilon')}\}$$

و چون $a < R$ می‌باشد لذا

$$\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| < R \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| < R$$

از این‌رو $N > ۰$ ای موجود است که به ازای هر $n > N$، $\|x_n\| < R$ و $\|y_n\| < R$. حال اگر به ازای $۰ < t_n < \frac{۱}{۲}$، (u_n) و (v_n) را به صورت:

$$u_n = y_n \quad , v_n = ۲t_nx_n + (۱ - ۲t_n)y_n$$

و به ازای $\frac{۱}{۲} \leq t_n < ۱$، به صورت

$$u_n = x_n \quad , v_n = (۲t_n - ۱)x_n + (۲ - ۲t_n)y_n$$

اختیار کنیم، در هر دو حالت $\|u_n\| < R$ و $\|v_n\| < R$. همچنین

$$\|u_n - v_n\| = \varphi(t_n)\|x_n - y_n\| > \epsilon'(a + ۱) > \epsilon' R.$$

از آن‌جایی‌که E فضای باناخ به طور یکنواخت محدب می‌باشد نکته بعد از تعریف (۳.۱.۱)، نشان می‌دهد که برای هر n،

$$\begin{aligned}\|t_nx_n + (۱ - t_n)y_n\| &= \|\frac{u_n + v_n}{۲}\| \\ &\leq (۱ - \delta(\frac{\epsilon' R}{R}))R = (۱ - \delta(\epsilon'))R < a.\end{aligned}$$

از نامساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{n\to\infty} \|t_nx_n + (۱ - t_n)y_n\| \leq (۱ - \delta(\epsilon'))R < a$$

که با فرض در تناقض است و لذا حکم درست می‌باشد.□

۸.۱.۱ قضیه

هرگاه (a_n) و (b_n) و (c_n) دنباله‌هایی از اعداد حقیقی نامنفی باشند که به ازای هر

$n \geq ۱$ در شرط‌های $a_{n+۱} \leq (۱+c_n)a_n + b_n$، $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n < \infty$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} c_n < \infty$ صدق کنند، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد.

برای اثبات این قضیه، لم زیر مورد نیاز است که در ابتدا به آن می‌پردازیم.

۹.۱.۱ لم

فرض کنید (a_n) و (b_n) دنباله‌هایی از اعداد حقیقی نامنفی باشند که به ازای هر $n \geq ۱$ در نامساوی $a_{n+۱} \leq a_n + b_n$ و شرط $\sum\limits_{i=۱}^{\infty} b_i < \infty$ صدق می‌کنند، در این صورت $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد.

برهان. از آن‌جایی‌که $a_{n+۱} \leq a_n + b_n$ می باشد، برای هر $n, m \geq ۱$ داریم:

$$a_{n+m+۱} \leq a_{n+m} + b_{n+m} \leq a_{n+m-۱} + b_{n+m} + b_{n+m-۱} \leq \cdots \leq a_n + \sum_{j=n}^{n+m} b_j$$

و از آن‌جا نامساوی زیر را برای هر $n \geq ۱$، خواهیم داشت:

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \limsup_{m\to\infty}(a_n + \sum_{j=n}^{n+m} b_j) = a_n + \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n}^{n+m} b_j \leq a_n + \sum_{j=n}^{\infty} b_j$$

همگرایی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ نشان می‌دهد که حدود بالایی و پایینی دنباله (a_n)، در نامساوی

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

صدق می‌کند. از این‌رو $\lim a_n$ موجود است.□

برهان قضیه (۸.۱.۱). طبق فرض

$$\begin{aligned}
a_{n+۱} &\leq (۱+c_n)a_n + b_n \\
&\leq (۱+c_n)[(۱+c_{n-۱})a_{n-۱} + b_{n-۱}] + b_n \\
&\leq \cdots \leq \prod_{j=۱}^{n}(۱+c_j)a_۱ + \prod_{j=۱}^{n}(۱+c_j)\sum_{j=۱}^{n} b_j \\
&\leq \prod_{j=۱}^{\infty}(۱+c_j)a_۱ + \prod_{j=۱}^{\infty}(۱+c_j)\sum_{j=۱}^{\infty} b_j < \infty
\end{aligned}$$

نامساوی آخر به دلیل این که طبق فرض $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ می‌باشد درست است.

از نامساوی بالا نتیجه می‌شود که $\{a_n\}$ کراندار است و لذا $M > 0$ ای موجود است که به ازای هر $n \geq 1$، $a_n \leq M$. پس:

$$a_{n+1} \leq (1 + c_n)a_n + b_n \leq a_n + Mc_n + b_n = a_n + \sigma_n$$

که در آن $\sigma_n = Mc_n + b_n$، همچنین از فرض قضیه نتیجه می‌شود که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ لذا شرایط لم قبل احراز شده و $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود است.□

در این مرحله تلاش می‌کنیم مشخصه مناسبی برای فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب برحسب توابع محدب و صعودی اکید ارائه نماییم که البته اطلاعات جامع‌تری را در مرجع [۳۰] می‌توان دید. برای این منظور به دو قضیه و تعاریفی نیاز است که در زیر آن‌ها را بیان می‌کنیم و قضایا را بدون اثبات می‌پذیریم.

۱۰.۱.۱ تعریف

اگر f تابع حقیقی و تعریف شده روی فضای X باشد، نمودار بیرونی تابع f که آن را با $epi(f)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$epi(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq \alpha\}$$

همچنین $co(f)$ تابعی است که نمودار بیرونی آن برابر غلاف محدب $co(epi(f))$ از مجموعه $epi(f)$ می‌باشد. به عبارتی دیگر

$$co(f)(x) = \inf\{\alpha \ : \ (x, \alpha) \in co(epi(f))\}.$$

همچنین

$$\overline{co}(f)(x) = \inf\{\alpha \ : \ (x, \alpha) \in \overline{co}(epi(f))\}.$$

۱۱.۱.۱ تعریف

فرض کنید X فضای باناخ حقیقی و K زیرمجموعه ناتهی و محدب از آن باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را روی K به طور یکنواخت محدب گوییم هرگاه نگاشتی چون $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ موجود باشد به قسمی‌که در دو شرط زیر صدق نماید:

۱. $\mu(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$

۲. به ازای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ و هر x و y در K داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\mu(\|x-y\|).$$

۱۲.۱.۱ قضیه

فضای باناخ X به طور یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $1 < p < \infty$ و $r > 0$ تابع محدب و صعودی اکید $g_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ به قسمی موجود باشد که $g_r(0) = 0$ و به ازای هر x و y در B_r و هر $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - \lambda(1-\lambda)g_r(\|x-y\|).$$:

به عبارتی تابع $\|.\|^p$ تابعی به طور یکنواخت محدب می‌باشد.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۵] مراجعه کنید.□

۱۳.۱.۱ قضیه

تابع حقیقی f، روی X تابعی محدب است اگر و تنها اگر $epi(f)$ محدب باشد.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲۵] مراجعه کنید.□

۱۴.۱.۱ قضیه

فضای باناخ X به طور یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر به ازای اعداد حقیقی و ثابت $p > 1$ و $r > 0$، تابع پیوسته، محدب و صعودی اکید $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ موجود باشد به

قسمی که $g(\circ) = \circ$ و به ازای هر $\circ \leq \lambda \leq ۱$ و x و y در B_r

$$\|\lambda x + (۱-\lambda)y\|^p \leq \lambda\|x\|^p + (۱-\lambda)\|y\|^p - \omega_p(\lambda)g(\|x-y\|) \qquad (۱.۱.۱)$$

که در آن $B_r = \{u \in X \ : \ \|u\| \leq r\}$ و $\omega_p(\lambda) = \lambda(۱-\lambda)^p + \lambda^p(۱-\lambda)$.

برهان. فرض کنید X فضای به طور یکنواخت محدب باشد. در این صورت بنا به قضیه (۱۲.۱.۱)، تابع $\|.\|^p$ تابعی به طور یکنواخت محدب روی B_r می‌باشد. حال اگر تابع $\mu(t)$ را روی بازه $\circ < t \leq ۲r$ به صورت

$$\mu(t) = \inf\{\tfrac{\lambda\|x\|^p+(۱-\lambda)\|y\|^p-\|\lambda x+(۱-\lambda y)\|^p}{\omega_p(\lambda)} : x, y \in B_r, \ \|x-y\| = t, \circ < \lambda < ۱\}$$

و به ازای $t = \circ$ صفر تعریف کنیم با توجه به قضیه (۱۲.۱.۱) به ازای $\circ < t \leq ۲r$، $\mu(t) > \circ$ می‌باشد. حال با توجه به ضابطه تابع μ داریم $\mu(t) = t^p\mu(۱)$. از طرفی $\mu(۱) > \circ$ از این رو μ، تابعی صعودی اکید و محدب روی $[\circ, ۲r]$ می‌باشد. حال نگاشت g را به صورت $g = \overline{co}(\mu)$ در نظر بگیرید در این صورت با توجه به قضیه (۱۳.۱.۱)، نگاشت g محدب می‌باشد. از طرفی g نگاشتی صعودی اکید است زیرا:

$$g(x) = \inf\{\alpha \ : \ (x, \alpha) \in \overline{co}(epi(\mu))\}.$$

فرض کنید $x_۱ < x_۲$، در این صورت اگر $(x_۲, \alpha)$ عضوی از $\overline{co}(epi(\mu))$ باشد آن‌گاه $\mu(x_۲) \leq \alpha$ و چون تابع μ، صعودی اکید است، $\mu(x_۱) < \mu(x_۲) \leq \alpha$ و از آن $(x_۱, \alpha)$ در $\overline{co}(epi(\mu))$ است لذا $g(x_۱) < g(x_۲)$ است و g صعودی اکید است.

از طرفی $\circ \leq g(x) \leq \mu(x)$ می‌باشد زیرا $epi(g) = \overline{co}(epi(\mu))$ و چون

$$(x, \mu(x)) \in \overline{co}(\{(x, \alpha) \ : \ \mu(x) \leq \alpha\})$$

است لذا $(x, \mu(x))$ در $epi(g)$ است و از آن $g(x) \leq \mu(x)$ می‌باشد. $g \geq \circ$ است زیرا نگاشت $\mu \geq \circ$ می‌باشد. از طرف دیگر $\circ \leq g(\circ) \leq \mu(\circ) = \circ$، پس $g(\circ) = \circ$ است.

همچنین از این‌که $g(\|x-y\|) \leq \mu(\|x-y\|)$، به ازای هر x و y در B_r رابطه (۱.۱.۱)

برقرار است. از این رو تابع g در تمام شرایط مورد نظر صدق می‌کند.

در جهت عکس ثابت می‌کنیم برای هر $۰ < \epsilon \leq ۲$، فضای X به طور یکنواخت محدب می‌باشد. کافی است ثابت کنیم $\delta_X(\epsilon) > ۰$ است. می دانیم

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\{ ۱ - \|\frac{x+y}{۲}\| \ : \|x\| = ۱, \|y\| = ۱, \|x-y\| = \epsilon\}.$$

برای هر x و y که $\|x\| = ۱$، $\|y\| = ۱$ و $\|x-y\| = \epsilon$، با اختیار $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ در رابطه (۱.۱.۱) داریم:

$$\|\frac{x+y}{۲}\|^p \leq ۱ - \omega_p(\frac{۱}{۲})g(\|x-y\|) = ۱ - ۲^{-p}g(\epsilon)$$

و از آن

$$۰ < ۱ - (۱ - ۲^{-p}g(\epsilon))^{۱/p} \leq ۱ - \|\frac{x+y}{۲}\|$$

لذا $\delta_X(\epsilon) > ۰$ و X فضایی به طور یکنواخت محدب می‌باشد.□

۲.۱ نگاشت‌های ناانبساطی و ناانبساطی مجانبی

در سراسر این بخش E فضایی نرمدار و K زیر مجموعه‌ای ناتهی از آن می‌باشد.

در این بخش ابتدا به تعریف چند نگاشت مهم می‌پردازیم. یکی از مهم‌ترین انواع آن‌ها، نگاشت ناانبساطی مجانبی است که برای اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط گوبل[1] و کرک[2] در [۷] معرفی شد که در فصول آتی به بیان خواصی از آن خواهیم پرداخت.

۱.۲.۱ تعریف

فرض کنید $T : K \longrightarrow K$ نگاشت دلخواهی باشد. آن‌گاه:

[1] Goebel

[2] Kirk