بسم الله الرحمن الرحيم

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

نقاط ثابت مشترک در بهترین تقریب برای جفت عملگرهای باناخ با نوع سیریک I- انقباضی

استاد راهنما:

دکتر عزیزاله عزیزی

استاد مشاور:

دکتر عبدالرحمن رازانی

توسط:

رضا قلعه قوند

کلیه حقوق مادی و نتایج

مطالعات،ابتکارات و نوآوری های ناشی

از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) است.

تقدیم به

پدر بزرگوار

و

مادر عزیزتر از جانم

تشکر وقدردانی

در این کلام کوتاه از استاد فرزانه، دکتر عزیزاله عزیزی،نهایت سپاس و قدردانی خود را ابراز می دارم.هم چنین از تمامی اساتید و بزرگوارانی که در امر تحصیل بنده را یاری نموده اند تشکر می نمایم.

چکیده

در این پایان نامه در مورد وجود نقاط ثابت مشترک برای جفت عملگرهای باناخ[۱] بحث می‌کنیم. سپس با استفاده از شرط انقباضی سیریک[۲] وجود یک نقطه ی ثابت مشترک برای جفت عملگرنای باناخ در بهترین تقریب را به اثبات می رسانیم.در پایان در مورد وجود نقطه ی ثابت مشترک برای جفت عملگرهای باناخ در فضاهای توپولوژیکی متر پذیر می پردازیم.

کلمات کلیدی: نقاط ثابت مشترک، نگاشت های سازگار، جفت عملگر باناخ، شرط انقباضی سیریک، بهترین تقریب.

منبع اصلی این پایان نامه مقاله ی زیر می باشد.

N.Hussain, Common fixed Point in best approximation for Banach operator pairs with Ciric type I-contraction (2008).

---

[۱] Banach
[۲] Ciric

فهرست مطالب

۳ جفت عملگرهای باناخ در فضاهای برداری توپولوژیکی

پیشگفتار

نقطه ی ثابت مشترک از جمله مفاهیم پرکاربرد در شاخه های مختلف ریاضیات است.بحث اصلی این پایان نامه به وجود نقطه ی ثابت مشترک در بهترین تقریب برای جفت عملگرهای باناخ نوع سیریک I–انقباضی اختصاص دارد. دسته ی جدیدی از عملگرهای غیرجابجایی که توسط چن[1] و لی[2] معرفی شده اند،جفت عملگرهای باناخ می باشند که حسین،وجود نقطه ی مشترک در بهترین تقریب برای جفت عملگرهای باناخ با نوع سیریک I–انقباضی را به اثبات می رساند.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد.در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند،آورده شده است.سپس به معرفی تعدادی از نگاشت های جابجایی و غیرجابجایی پرداخته شده است.

در فصل دوم،جفت عملگرهای باناخ که دسته ای جدید از نگاشت های غیرجابجایی هستند، معرفی شده است.به دنبال آن به مطالعه ی نقاط ثابت مشترک برای این دسته از نگاشت ها که در شرط انقباضی سیریک صدق می کنند پرداخته شده است.همچنین وجود نقطه ی ثابت مشترک برای جفت عملگرهای باناخ روی

[1] Chen
[2] Li

کلاس زیرمجموعه های بسته ی محدب از فضای X که شامل صفر می باشند نیز مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در فصل سوم،جفت عملگرهای باناخ روی فضاهای توپولوژیکی مورد بررسی قرار می گیرد،و وجود نقاط ثابت مشترک برای این دسته از عملگرها روی فضاهای برداری توپولوژیکی متر پذیر به اثبات می رسد.

لازم به ذکر است که منابع اصلی این پایان نامه را در مقالات [۱]،[۳]،[٤]،[۷]،[۹]،[۱۳]، [۱٤]،[۱۸]،[۲۰]،[۲۳]،[۳۳]،[۳٦] و [۳۹] می توان یافت.

فصل اول

پیش نیاز

۱.۱.تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ یک فضای برداری روی میدان K عبارت است از یک مجموعه ی E همراه با یک عمل دوتایی "+" به نام عمل جمعی و یک ضرب اسکالر که (α, x) در $\mathrm{K} \times \mathrm{E}$ را به αx در E می نگارد و برای هر $x, y, z \in \mathrm{E}$ و هر $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $x + y = y + x$؛

۲) $(x + y) + \mathrm{z} = x + (y + z)$؛

۳) عنصر $\circ \in \mathrm{E}$ به نام بردار صفر وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \mathrm{E}$ داشته باشیم:

$x + \circ = x$؛

٤) برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، عنصر $-x \in \mathrm{E}$ به نام معکوس جمعی وجود دارد به طوری که

$x + (-x) = \circ$ ؛

٥) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$؛

٦) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$؛

٧) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$؛

۸) $1.x = x$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری روی میدان K و $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}^+$ یک تابع باشد،

گوییم $\|\cdot\|$یک نرم است هرگاه

۱) $\|x\| = 0$اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

۲) برای هر $x \in E$ و هر $\lambda \in K$ داشته باشیم $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$ ؛

۳) برای هر $x, y \in E$ داشته با شیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

زوج $(E, \|\cdot\|)$ را یک فضای برداری نرم دار می گوییم .

تعریف ۳.۱.۱ فضای بردای نرم دار کامل را فضای باناخ گوییم .

تعریف ٤.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی و τ گردایه ای از زیرمجموعه های X باشد.τ را یک توپولوژی روی X نامیم هر گاه

۱) $\phi, X \in \tau$ ؛

۲) τ تحت اجتماع های دلخواه بسته باشد؛

۳) τ تحت اشتراک های متناهی بسته باشد.

زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیک گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی و $d{:}\,\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}^{+}$ یک تابع باشد.d را یک متر روی X گوییم هرگاه

۱) برای هر $x,y\in\mathrm{X}$ ، داشته باشیم $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$؛

۲) برای هر $x,y\in\mathrm{X}$ ، داشته باشیم $d(x,y)=d(y,x)$؛

۳) برای هر $x,y,z\in\mathrm{X}$ ، داشته باشیم $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

زوج (X,d) را فضای متریک گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید M یک زیر مجموعه از فضای نرم دار$(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ باشد و$\mathrm{I}{:}\,\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ یک نگاشت باشد.نگاشت $\mathrm{T}{:}\,\mathrm{M}\to\mathrm{M}$، I – لیپشیتس[1] نامیده می شود هر گاه$k\geq 0$ موجود باشد طوری که برای هر $x,y\in\mathrm{M}$ داشته باشیم $d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)\leq kd(\mathrm{I}x,\mathrm{I}y)$ اگر $k<1$ ،آنگاه نگاشتT را I – انقباضی[2] می نامیم.به k عامل انقباض گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم M یک زیر مجموعه از فضای نرم دار $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$باشد و $\mathrm{I},\mathrm{T}{:}\,\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ ،دو نگاشت روی M باشند،نقطه $x\in\mathrm{M}$ نقطه ی انطباق[3] برایI وT می باشد هرگاه داشته باشیم:

$$\mathrm{I}x=\mathrm{T}x$$

مجموعه نقاط انطباق دو نگاشتI وT را با نماد$C(\mathrm{I},\mathrm{T})$ نمایش می دهیم.

[1] Lipschitz
[2] contraction
[3] coincidence

تعریف ۸.۱.۱ گویند $x \in \mathrm{X}$ ،نقطه ی ثابت نگاشت $\mathrm{I}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ است اگر داشته باشیم $\mathrm{I}x = x$.

مجموعه نقاط ثابت نگاشت I را با نماد $\mathrm{F(I)}$ نمایش می دهند به عبارت دیگر

$$\mathrm{F(I)} = \{x \in \mathrm{X}: \mathrm{I}x = x\}$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم M یک زیر مجموعه از فضای X باشد و $\mathrm{I}, \mathrm{T}: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ دو نگاشت

روی M باشند،نقطه $x \in \mathrm{M}$ نقطه ی ثابت مشترک برای I و T می باشد هرگاه داشته باشیم:

$$\mathrm{I}x = \mathrm{T}x = x$$

مثال ۱.۱.۱ مجموعه ی $\mathrm{X} = (-\infty, \infty)$ را با متر معمولی در نظر بگیرید.اگر نگاشت های

$\mathrm{I}, \mathrm{T}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathrm{T}x = \begin{cases} ۱ & ; x \in (-\infty, -۱] \\ x & ; x \in (-۱, ۱) \\ -۱ & ; x \in [۱, \infty) \end{cases}$$

و

$$\mathrm{I}x = \begin{cases} \dfrac{۱ + x}{۲} & ; x \in (-۱, ۰] \\ \dfrac{۱ - x}{۲} & ; x \in (۰, ۱) \\ ۰ & ; x \in (-\infty, -۱) \cup [۱, \infty) \end{cases}$$

در این صورت $x = \frac{۱}{۳}$ ، نقطه ی ثابت مشترک دو نگاشت I و T می باشد .

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد.مجموعه ی همه ی تبدیلات خطی و کران دار از X به توی میدان(حقیقی یا مختلط) K را با X^* نمایش می دهند وآن را دوگان X می نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم دار و $\{x_n\}$ دنباله ای در آن باشد،گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $x \in X$ همگرا است، هرگاه برای هر $f \in X^*$ داشته باشیم

$f(x_n) \to f(x)$ وقتی که $n \to \infty$.

قضیه ۱.۱.۱ حد ضعیف هر دنباله یکتا است.

اثبات:به مرجع [۴۱] مراجعه شود.

تعریف ۱۲.۱.۱ بستار ضعیف زیرمجموعه ی M از فضای نرم دار X عبارت است از مجموعه ی همه ی نقاط حدی ضعیف M ، به عبارت دیگر x به بستار ضعیف M تعلق دارد هرگاه دنباله ای از نقاط M موجود باشد که به طور ضعیف به x همگرا باشد.

بستار زیر مجموعه ی M را با نماد $cl(M)$ و بستار ضعیفM را با نماد $wcl(M)$ نمایش می دهند .

تعریف ۱۳.۱.۱ زیر مجموعه ی M از فضای نرم دار X به طور ضعیف کران دار است هرگاه به ازای هر $f \in X^*$، مجموعه ی $f(M)$ در K کران دار باشد .

قضیه ۲.۱.۱ زیرمجموعه ی M از فصای نرم دار X کران دار است اگر و تنها اگر M به طور ضعیف کران دار باشد.

اثبات:به مرجع[٤١] رجوع شود.

تعریف ١٤.١.١ خود نگاشت f از فضای نرم دار X را به طور ضعیف پیوسته گویند اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ و هر دنباله ی $\{x_n\}$ در X که به طور ضعیف به x همگراست داشته باشیم

$f(x_n) \to f(x)$ به طور ضعیف.

تعریف ١٥.١.١ خود نگاشت f از فضای نرم دار X را به طور قوی پیوسته (کاملاً پیوسته) گویند اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ و هر دنباله ی $\{x_n\}$ در X که به طور ضعیف به x همگراست داشته باشیم $f(x_n) \to f(x)$.

تعریف ١٦.١.١ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد؛ گوییم X خاصیت اوپیال[٤] دارد، هرگاه برای هر دنباله همگرای ضعیف $\{x_n\}$ در X با حد ضعیف x داشته باشیم:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

برای هر $y \in X$ و $y \neq x$.

[٤] Opial

تعریف ۱۷.۱.۱ نگاشت $T: M \to X$ را نیم بسته در صفر گوییم، هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ در M که به طور ضعیف به x همگرا است و دنباله $\{Tx_n\}$ که به صفر همگراست، داشته باشیم:

$$Tx = ۰$$

تعریف ۱۸.۱.۱ زیر مجموعه ی M از فضای نرم دار X را نسبتاً فشرده گویند،اگر بستار آن فشرده باشد. به عبارت دیگر M نسبتاً فشرده است هرگاه هر دنباله در M ،زیردنباله ای همگرا در X داشته باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ زیرمجموعه ی C از فضای نرم دار X محدب نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in [۰,۱]$ داشته باشیم $\lambda x + (۱ - \lambda)y \in C$.

قضیه ۳.۱.۱ هر زیر مجموعه ی محدب و بسته از یک مجموعه ی فشرده ی ضعیف ، فشرده ی ضعیف است.

اثبات:به مرجع [۴۰] رجوع کنید.

قضیه ٤.۱.۱ فرض کنید M یک زیر مجموعه ی محدب از فضای برداری نرم دار X باشد.M بسته است اگر وتنها اگر به طور ضعیف بسته باشد.

اثبات: به مرجع [٤۰] رجوع کنید.

قضیه ۵.۱.۱ هر زیر مجموعه ی فشرده ی ضعیف از فضای باناخ X ،کراندار است.

اثبات: به مرجع [٤٠] رجوع کنید.

تعریف ۲۰.۱.۱ مجموعه ناتهیM را فشرده ی ضعیف موضعی گوییم ، هرگاه هر زیر مجموعه ی محدب ، بسته و کراندار M فشرده ی ضعیف باشد.

قضیه ٦.۱.۱ فرض کنید $\{x_n\}$دنباله ای در فضای باناخ X باشد.اگرx_{n} به طور ضعیف به $x \in \mathrm{X}$ همگرا باشد،آنگاه$\{x_n\}$کراندار است و $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

اثبات: به مرجع [٤٠] رجوع کنید.

قضیه ۷.۱.۱(ابرلین-شمولیان[٥]) اگر X یک فضای باناخ و M زیرمجموعه ای از آن باشد،

گزاره های زیر معادلند:

۱) هر دنباله از عناصر M زیر دنباله ای به طور ضعیف همگرا دارد.

۲) هر دنباله از عناصر M یک نقطه ی حدی ضعیف دارد.

۳) M به طور ضعیف فشرده است.

اثبات:به مرجع [٤١] رجوع کنید.

[٥] Eberlein-Smulian

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنید M زیر مجموعه ای ازفضای نرم دار X باشد و نقطه ی $u \in \mathrm{X}$ بیرون

از مجموعه ی M قرار دشته باشد به مجموعه ی

$$P_{\mathrm{M}}(u) = \{x \in \mathrm{M}: \|x-u\| = dist(u,\mathrm{M})\}$$

مجموعه بهترین تقریب[۶] نقطه ی $u \in \mathrm{X}$ می گوییم که در آن

$$dist(u,\mathrm{M}) = inf\ \{\|y-u\|: \mathrm{y} \in \mathrm{M}\}$$

در تعریف بالا اگر $u \in \mathrm{M}$ باشد آنگاه $P_{\mathrm{M}}(u) = \{u\}$ می باشد.

قضیه ۸.۱.۱ مجموعه ی $P_{\mathrm{M}}(u)$ بسته است و اگر M مجموعه ای محدب باشد، آنگاه $P_{\mathrm{M}}(u)$ محدب است.

اثبات:فرض کنید $\{x_n\}$دنباله ای در $P_{\mathrm{M}}(u)$ باشد که به $x_۰$ در X همگرا است.اکنون با توجه به تعریف $P_{\mathrm{M}}(u)$ و این که نرم تابعی پیوسته است، $x_۰ \in P_{\mathrm{M}}(u)$ در نتیجه $P_{\mathrm{M}}(u)$ بسته است.

اگر $P_{\mathrm{M}}(u)$ تهی یا دارای یک عضو باشد،مجموعه ای محدب است.فرض کنید $P_{\mathrm{M}}(u)$ بیش از یک عضو داشته باشد و قرار دهید $\delta = dist(u,M)$

بنا به تعریف برای هر $x,y \in P_{\mathrm{M}}(u)$ داریم

$$\|x-u\| = \|y-u\| = \delta$$

نشان می دهیم که برای هر $t \in [۰,۱]$ داریم:

$$z = tx + (۱-t)y \in P_{\mathrm{M}}(u)$$

---

[۶] best approximation

در واقع،از آنجا که $z \in \mathrm{X}$ پس داریم $\|z-u\| \geq \delta$.

همچنین داریم

$$\|z-u\| = \left\|t(x-u)+(1-t)(y-u)\right\|$$

$$\leq t\|x-u\|+(1-t)\|y-u\|$$

$$= t\delta+\left(1-t\right)\delta = \delta$$

بنابراین $\|z-u\| = \delta$.در نتیجه $z \in P_{\mathrm{M}}(u)$.و از آنجا که $x, y \in P_{\mathrm{M}}(u)$ دلخواه بود لذا

ثابت می شود $P_{\mathrm{M}}(u)$ محدب است.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید C زیر مجموعه ای ازفضای نرم دار X باشد، $\mathrm{I}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ و نقطه ی

$u \in \mathrm{X}$ بیرون از مجموعه ی C قرار دشته باشد. مجموعه ی $C_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}(u)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}(u) = \{x \in \mathrm{C}: \mathrm{I}x \in P_{\mathrm{C}}(u)\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱ مجموعه ی C برای $\mathrm{q} \in \mathrm{C}$ را q- ستاره گون[۷] گوییم اگربرای هر $x \in \mathrm{C}$

مجموعه ی $[\mathrm{q}, x] = \{(1-\lambda)\mathrm{q}+\lambda x: 0 \leq \lambda \leq 1\}$ داخل C باشد.

قضیه ۹.۱.۱(اصل انقباض باناخ[۸]) فرض کنید $\mathrm{T}: \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ یک نگاشت انقباضی با عامل k روی فضای

متریک کامل $\left(\mathrm{X}, d\right)$باشد،آنگاه T یک نقطه ی ثابت یکتا دارد.

---

۷ starshaped