چکیده

نام خانوادگی: کمالوندیان **نام:** سعید
عنوان پایان‌نامه: بازگشت به مثلث
استاد راهنما: دکتر امیدعلی شهنی‌کرمزاده **استاد مشاور:** دکتر مهرداد نامداری
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **گرایش:** آموزش ریاضی **محل تحصیل:** دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ التحصیلی: ۸۹/۰۶/۳۰ **تعداد صفحات:** ۹۰
واژه‌های کلیدی: مرکز ثقل، مراکز مثلث، مثلث میانه‌ها، مزدوج همزاویه‌ای، دایره محاطی داخلی مثلث، دوایر محاطی خارجی مثلث، سواهای متقارب.

چکیده: یکی از دلایل کاهش علاقمندی دانش آموزان به هندسه عدم تدریس صحیح این درس، مخصوصا وجود بعضی از اثبات‌های نادرست می‌باشد که در اثر خطا در رسم اشکال هندسی به وجود می‌آید. در این پایان نامه ابتدا نتایج نادرستی که از اینگونه اشکال بدست می‌آید را با استدلال ریاضی اثبات می‌کنیم و در ادامه با نشان دادن خطای اعمال شده در شکل، نتیجه نادرست را رد و نتیجه صحیح را ثابت می‌کنیم. همچنین به برخی از مراکز مثلث که در اینجا با نرم‌افزار هندسی رسم شده اند اشاره‌ای خواهیم داشت و برخی ازآنها که مهم‌تر هستند را ثابت می‌کنیم. درادامه توجه خود را به خطوط سوایی متقارب در مثلث و بالاخص میانه‌ها جلب می‌کنیم و با روشهای مختلف هندسی و آنالیزی، ویژگی منحصر بفرد میانه‌ها، که همان تشکیل 'مثلث میانه‌ها' است، را در هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی ثابت می‌کنیم و همچنین مثال نقضی که نشان می‌دهد نیمسازها و ارتفاع‌ها نمی‌توانند مثلث تشکیل دهند، ارائه می‌دهیم. و در فصل آخر نیز با بیان قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که غیر از میانه‌ها، هیچ‌یک از خطوط سوایی متقارب در مثلث، نمی‌توانند تشکیل یک مثلث دهند.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۵۸ ژان‌پل دیودونه شعار معروف "لعنت بر اقلیدس و مرگ بر مثلث" را سر داد، که متاسفانه ریاضی‌دانان زیادی آن را تکرار کردند و همین امر باعث شد که در بیشتر کشورها از جمله ایران، از حجم مطالب هندسی تدریس در دبیرستان بطور چشم‌گیری کاسته شود. تنها کشورهایی نظیر شوروی سابق، هلند و ایتالیا و چند کشور دیگر تسلیم این شعار نشدند.

در همین زمینه بورباکی[۱]ها که گروهی از ریاضی‌دانان فرانسوی بودند که اعضای آنها کاملا مشخص نبودند و قصد داشتند، مسیر ریاضیات را به دلخواه و ابتکار خود تعیین کنند. که در این مسیر نیز تا اندازه‌ای نیز موفق شدند. آنهااز بکاربردن شکل و نمودار در کتاب‌ها و نوشته‌های خود، خودداری می‌کردند، چون با هندسه اقلیدسی به‌شکل کلاسیک آن مخالف بودند.

بورباکی‌ها معتقد بودند که اشکال و نمودارها، در هندسه ممکن است ما را به اثبات اشتباه هدایت کنند و در یك کلام، روشهای جبرخطی و هندسه تحلیلی را مناسب‌تر می‌دانستند.

متاسفانه چون در آن زمان گروه بورباکی همه از ریاضی‌دانان طراز اول جهان بودند، هرکسی جرات ابراز مخالفت نداشت. لازم به ذکر است که خود بورباکی‌ها ریاضی‌دانانی بودند که در دبیرستان، فراوان هندسه خوانده بودند.

در مورد اینکه هندسه بهتر است یا جبر، سر مایکل آتیا می‌گوید: تفاوت این دو مانند تفاوت انسان‌ها در مرد و زن بودن است. مهم انسان بودن این دو است. هندسه و جبر هر دو ریاضی هستند و هردو هم خیلی خوب هستند و خیلی به همدیگر نیز وابسته‌اند و هیچکدام نمی‌تواند به‌تنهایی جای دیگری را بگیرد. خوشبختانه در این سالهای غفلت از هندسه در مدرسه، شخصی مانند کاکستر[۲] ریاضی‌دان

[۱] Bourbaki

[۲] Coxeter

انگلیسی که ۹۶ سال عمر کرد و تمام سالهای کاری خود را، (بجز ۲ سال در پرینستون) در دانشگاه تورنتو کانادا گذرانید، به‌تنهایی هندسه را زنده نگه‌داشت و تحقیقات او در هندسه که ادامه کارهایش در هندسه اقلیدسی بود، باعث شد، گروههای کاکستر، در نظریه ابرریسمان و میکروبیولوژی کاربرد اساسی پیدا کند. خیلی‌ها از کاکستر به‌عنوان نجات دهنده هندسه نام می‌برند.

در یک جمله می‌توان گفت: هندسه تنها یك شاخه از ریاضیات در دبیرستان نیست که خوب باشد یا بد باشد، کاربرد داشته باشد یا نداشته باشد بلکه بدون شك، تفکر ریاضی را که لازمه هر کسی است که می‌خواهد ریاضی را دنبال کند به فرد می‌آموزد. به‌عبارت دیگر کاربرد هندسه در خود ریاضیات اساسی است.

فصل ۱

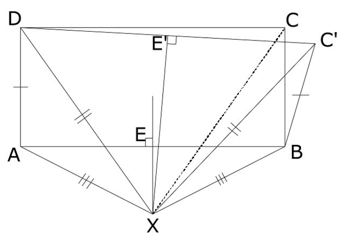
خطا در هندسه

در این فصل به دو نمونه اشاره می‌کنیم که، از کشیدن اشکال با دست نتایج نامعقولی حاصل می‌شود و آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ نمونه اول

قضیه: زوایای قائمه و منفرجه با هم همنهشت اند.

اثبات: فرض کنید $\square ABCD$ مستطیل باشد. از نقطه B پاره‌خط BC' را رسم می‌کنیم، به‌نحوی‌که $\overline{BC'} = \overline{BC}$ و $\angle ABC'$ منفرجه باشد. فرض کنید عمودمنصف $\overline{AB}$ ، عمودمنصف $\overline{DC'}$ را در X قطع کند. اگر X زیر $\overline{AB}$ باشد(شکل ۱.۱) .



شکل ۱.۱: X خارج از مستطیل

بنابر (ض‌ض‌ض) داریم:

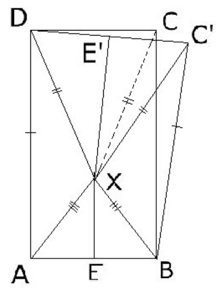
$\triangle AXD \cong \triangle BXC'$. بنابراین $\angle DAX = \angle C'BX$.

همچنین بنابه (ض‌ض‌ض) $\triangle EAX \cong \triangle EBX$ و $\angle EAX = \angle EBX$ و با تفریق بدست می‌آوریم $\angle DAE = \angle C'BE$. ■

اگر X بالای $\overline{AB}$ باشد. دقیقا مانند قبل داریم $\angle DAX = \angle C'BX$ و

$\angle EAX = \angle EBX$ با جمع کردن دو طرف تساوی داریم $\angle DAE = \angle C'BE$. ■

به (شکل ۲.۱) نگاه کنید.



شکل ۲.۱: X داخل مستطیل

چه اشتباهی موجب این تناقض می‌شود؟

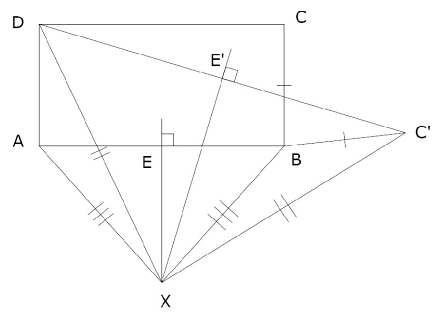
در ابتدا ثابت می‌کنیم که نتایج بالا نادرست اند.

اثبات: در هر دو حالت، امتداد پاره‌خط EX عمودمنصف DC نیز هست.

بنابراین $\overline{XC} = \overline{XD} = \overline{XC'}$.

پس بنابر (ض‌ض‌ض) $\triangle XCB \cong \triangle XC'B$ و $\angle XBC = \angle XBC'$ که خلاف فرض است.■

حال اگر شکل را به دقت رسم کنیم خواهیم دید که نقطه X زیر $\overline{AB}$ و مثلث $XC'B$ همواره بگونه‌ای خواهد بود که ضلع XC' سمت راست راس B قرار خواهد گرفت. یعنی اگر ضلع BC' را امتداد دهیم، عمودمنصف‌های مذکور را در نقطه‌ای بالاتر از X قطع خواهد کرد. (شکل ۳.۱)



شکل ۳.۱:

۲.۱ نمونه دوم

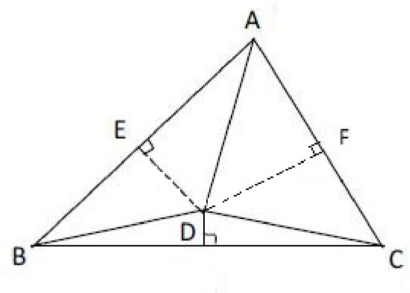
قضیه: هر مثلث دلخواه، متساوی‌الاضلاع است.

اثبات: مثلث ABC داده شده است. نیمساز زاویه دلخوه A و عمودمنصف ضلع BC ، روبروی $\angle A$ را رسم می‌کنیم و حالات مختلف این دو خط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت (۱) : نیمساز $\angle A$ وعمود منصف $\overline{BC}$ یا موازی یکدیگرند و یا یکی هستند. در هر دو حالت، نیمساز $\angle A$ عمود بر $\overline{BC}$ است و بنابر تعریف، ارتفاع است و بنابراین، مثلث متساوی‌الساقین است.■

اکنون فرض می‌کنیم نیمساز $\angle A$و عمودمنصف $\overline{BC}$ نه موازی باشند و نه منطبق. پس یکدیگر را درست در یک نقطه D قطع می‌کنند و سه حالت ممکن است پیش آید:

حالت (۲) : D درون مثلث واقع شود.



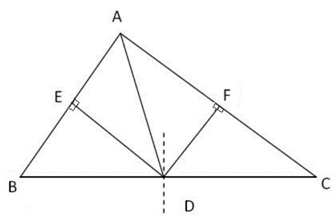
شکل ۴.۱: نقطه D درون مثلث

$\overline{DE}$ را عمود بر $\overline{AB}$ و $\overline{DF}$ را عمود بر $\overline{AC}$ رسم می‌کنیم و از D به رئوس B و C وصل می‌کنیم. در این حالت دو مثلث قائم الزاویه ADF و ADE بنابر وتر و یک زاویه، همنهشت اند. لذا $\overline{DE} = \overline{DF}$. از آن نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم الزاویه BDE و CDF بنابه وتر و یک ضلع همنهشت اند. بنابراین داریم:

$$AE + EB = AF + FC \qquad \Longrightarrow AB = AC.$$

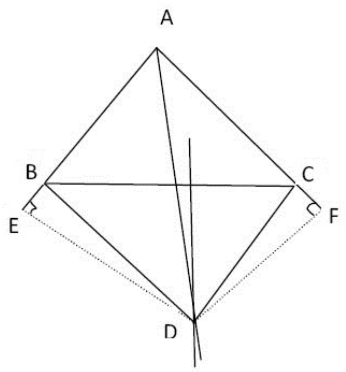
و این یعنی $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.■

حالت (۳) : D روی ضلع واقع شود.



شکل ۵.۱: نقطه D روی ضلع BC

حالت (۴) : D بیرون از مثلث واقع شود.



شکل ۶.۱: نقطه D خارج از مثلث

با توجه به شکلهای (۵.۱) و (۶.۱) برهان زیر در حالت‌های (۳) و (۴) صادق است:
$DE \cong DF$ زیرا که همه نقطه‌های واقع بر نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. $DA \cong DA$ و $\angle DEA$ و $\angle DFA$ قائمه‌اند. بنابراین $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ بنابر قضیه اقلیدسی قابل انطباق بودن یک وتر و ساق. پس $AE \cong AF$. اما $DB \cong DC$. زیرا که همه نقاط عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند. همچنین $DE \cong DF$ و $\angle DEB$ و $\angle DFC$ قائمه‌اند. بنابراین، بنابر حالت وتر و یک ساق، $\triangle DEB$ با $\triangle DFC$ قابل انطباق است. لذا $EB \cong FC$. از آنها در حالت (۳) از راه جمع و در حالت (۴) از راه تفریق نتیجه می‌شود $AC \cong AB$. پس مثلث، متساوی‌الساقین است.■

در نتیجه با استفاده از رسم نیمساز یکی از زوایای دلخواه مثلث و عمودمنصف ضلع روبرویش نشان دادیم که هر مثلث دلخواه متساوی‌الساقین و در نتیجه متساوی‌الاضلاع است.

حال سوال این است که خطای کار در کجاست؟ آیا مسائل اینگونه که تعدادشان نیز کم نیست، در کم اعتبار کردن هندسه تاثیری ندارند؟ در واقع اگر شکل را به‌دقت رسم کنیم، خواهیم دید که D خارج از مثلث و به‌گونه‌ای واقع خواهد شد که یکی از نقاط E یا F روی ضلع مثلث و دیگری بر امتداد ضلع مثلث قرار خواهند گرفت.

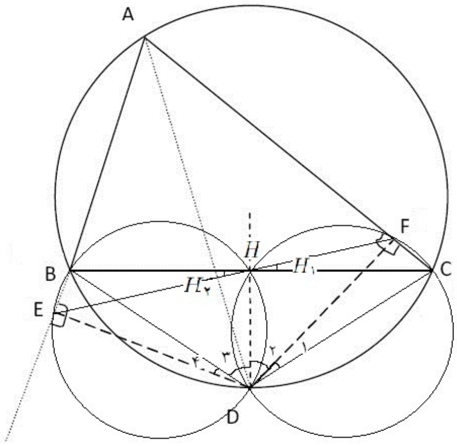
به‌علاوه ثابت می‌کنیم که نقطه D دقیقا روی دایره محیطی قرار دارد. (شکل ۷.۱) .

اثبات: نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم تا دایره محیطی را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. از برابری کمان‌های BD و DC نتیجه می‌شود $\overline{BD} = \overline{DC}$ و این یعنی D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد.■

پادکهای (در اینجا بجای تصویر قائم از کلمه پادک استفاده می‌کنیم.) نقطه D ، یعنی نقاط E و F و H روی یک خط، موسوم به خط سیمسون[۱] قرار دارند. وجود خط سیمسون را ثابت می‌کنیم.

اثبات: با توجه به شکل (۷.۱) ، زوایای D_1 ، D_2 ، D_3 و D_4 را مشخص می‌کنیم. حال از H به F و E وصل می‌کنیم و زوایای حاصل را H_1 و H_2 می‌نامیم. اکنون از سه نقطه F و C و D ، یک دایره و از نقاط E و B و D نیز یک دایره عبور می‌دهیم. به شکل (۷.۱) نگاه کنید.

[۱] Simson line



شکل ۷.۱:

چون D نقطه‌ای روی عمودمنصف $\overline{BC}$ است لذا، $\overline{DB} = \overline{DC}$ از طرفی D نقطه‌ای واقع بر نیمساز $\angle A$ است پس، $\overline{DE} = \overline{DF}$ در نتیجه بنابر وتر و یک ضلع $\triangle DFC \cong \triangle DEB$ و لذا $\angle D_1 = \angle D_4$. اما $\angle D_1$ و $\angle H_1$ زوایای محاطی روبروی $\widehat{FC}$ هستند.

لذا داریم $\angle H_1 = \frac{1}{2}\widehat{FC} = \angle D_1$ و به‌همین ترتیب $\angle H_2 = \frac{1}{2}\widehat{EB} = \angle D_4$.

در نهایت $\angle H_1 = \angle H_2$ ، که نشان می‌دهد E و H و F همراستا بوده و از خط سیمسون عبور می‌کنند. ■

فصل ۲

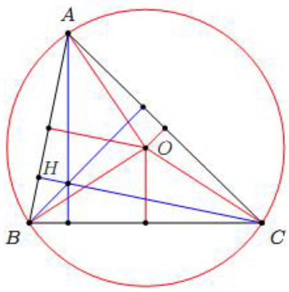
هندسه و نرم‌افزار

در سالهای اخیر با توجه به قابلیت ترسیم ساختارهای هندسی، توسط نرم‌افزارهایی از قبیل $Cabri$ و $Geometer's\ sketchpad$ ، علاقه‌مندی به هندسه مثلث بیش از پیش شده است.
در این فصل رئوس مطالب و نکات مربوط به بازتاب، مزدوج همزاویه‌ای، خطوط و معرفی تعدادی از مراکز جالب مثلثی و مقاطع مخروطی مثلثی و خم‌های درجه سه را بیان می‌کنیم. برخی از نتایج جالب را که شکل‌هایشان توسط نرم‌افزار تهیه شده است، مدنظر قرار می‌دهیم.
مثلا تعداد زیادی از نتایج در هندسه مثلث را می‌توان توسط همین نرم‌افزارها کشف و با انجام محاسبات اثبات کرد. اگرچه در اینجا چند نتیجه مهم را ثابت می‌کنیم، اما همه نتایج با استفاده از محاسبات مختصات مرکز جرمی تایید می‌شوند. در این فصل، اشکال با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری رسم شده تا نتایج بیشتری بدست آید.
مقاطع مخروطی این مقاله، با دستور پنج-نقطه-مخروط که در $Geometer's\ sketchpad$ و $Cabri$ قابل استفاده است، ساخته شده‌اند. مکان مرکز یک هذلولی قائم با جزییاتش مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین مثال‌هایی از رسم اشکال بوسیله خط‌کش و پرگار را ارائه می‌دهیم که می‌توانند در قسمت ابزار کارآمد ($efficient\ tools$) این نرم‌افزارها قرار گیرند.

۱.۲ برخی از مراکز جالب مثلث

۱.۱.۲ مراکز کلاسیک مثلث

مسلما شناخته‌شده‌ترین مراکز مثلث، مرکزثقل، مرکز دایره محیطی، مرکز تعامد و مرکز دایره محاطی داخلی مثلث هستند. هریک از این نقاط به‌ترتیب محل تلاقی میانه‌ها، عمودمنصف ها، ارتفاع‌ها و نیمسازهای زوایای درونی مثلث هستند.
شکل (۱.۲) مرکز دایره محیطی، O و مرکز تعامد H را نشان می‌دهد. توجه کنید که خطوط OA و HA نسبت به اضلاع AB و AC همزاویه هستند؛ متشابها برای OB ، HB و OC ، HC نیز این‌چنین است.



شکل ۱.۲: مرکز تعامد(H) و مراکز دایره محیطی(O)

۲.۱.۲ دوایر مماسی مثلث

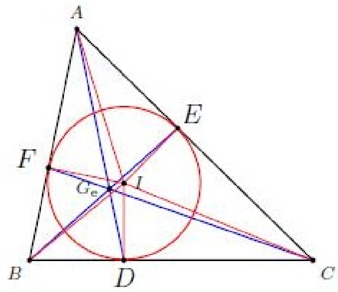
دوایر مماسی مثلث، دوایری هستند که با هریک از سه ضلع مثلث ABC مماس باشند. چهار عدد از این دوایر وجود دارد. دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی. دایره محاطی داخلی با هر سه ضلع AB و CA و BC مماس است.
شکل (۲.۲)، نقطه I که مرکز دایره محاطی داخلی است و همچنین نقطه گرگون[1]، G_e را نشان می‌دهد.
نقطه گرگون محل تلاقی خطوط سوایی است که هر راس را به نقطه تماس دایره محاطی داخلی با

[1] Gergonne

ضلع روبرو به آن راس، وصل می‌کند.
نشان می‌دهیم که نقطه گرگون وجود دارد. برای این کار ابتدا قضیه سوا را بیان می‌کنیم.
قضیه(سوا): فرض کنید که در مثلث ABC ، نقاط A' و B' و C' به‌ترتیب روی اضلاع BC ، CA و AB قرار دارند. AA' و BB' و CC' متقاربند اگروتنهااگر:

$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} = ۱.$$

حال برای اثبات وجود نقطه گرگون، ابتدا توجه می‌کنیم که در (شکل ۲.۲) ، $AF = AE$ و به‌همین ترتیب $BF = BD$ و $CD = CE$.



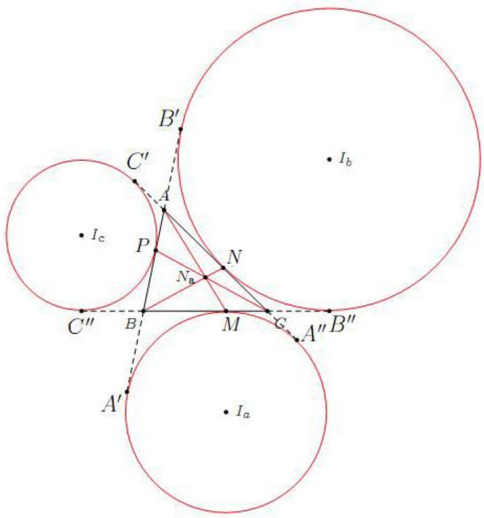
شکل ۲.۲: نقطه گرگون(Ge) و مرکز دایره محاطی داخلی(I)

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = ۱$$

در نتیجه بنابر قضیه سوا، خطوط سوایی AD و BE و CF متقاربند و نقطه تقاربشان، نقطه گرگون G_e نام دارد.■
یک دایره محاطی خارجی، با یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه تلاقی خطوطی که نقاط تماس دایره محاطی خارجی A با BC ، دایره محاطی خارجی B با CA و دایره محاطی خارجی C با AB را به رئوس مقابلشان وصل می‌کند، نقطه ناجل[۲]، N_a نام دارد.
به شکل (۳.۲) نگاه کنید.

[۲]Nagel



شکل ۳.۲: دوایر محاطی خارجی و نقطه ناجل

ثابت می‌کنیم نقطه ناجل وجود دارد.

در شکل (۳.۲) اگر راس A و دایره I_a را در نظر بگیریم. چون از A دو مماس AA' و AA'' بر دایره I_a رسم شده است، داریم:

$$AA' = AA'' \qquad \Longrightarrow \qquad AP + PB + BA' = AN + NC + CA'' \qquad (۱)$$

همچنین برای B و I_b خواهیم داشت:

$$BB' = BB'' \qquad \Longrightarrow \qquad BP + PA + AB' = BM + MC + CB'' \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی (۱) می‌توان بجای BA' ، BM را بنویسیم (چون هردو پاره‌خط از نقطه B بر I_a مماسند) و بجای CA'' ، CM را بنویسیم.

در رابطه‌ی (۲) نیز می‌توان بجای AB' ، AN وبجای CB'' ، CN را بنویسیم.
با این جایگذاری می‌توان نوشت:

$$AP + PB + BM = AN + NC + CM \qquad (۳)$$

$$BP + PA + AN = BM + MC + CN \qquad (۴)$$

با کم کردن رابطه‌ی (۴) از(۳) داریم:

$$BM - AN = AN - BM \qquad \Longrightarrow \qquad AN = BM$$

با تکرار همین روند خواهیم داشت $AP = MC$ و $PB = CN$ ، بنابراین قضیه سوا برقرار است، یعنی داریم:

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} = ۱$$

نقطه همرسی AM و BN و CP ، نقطه ناجل است.■

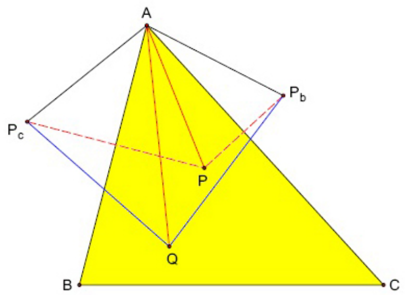
۳.۱.۲ شبه مرکز ثقل

قرینه هر میانه را نسبت به نیمساز همان راس 'شبه میانه' گویند. شبه میانه‌های هر مثلث متقاربند و نقطه تقارب آنها 'شبه مرکز ثقل' نام دارد. که آن را با K نشان می‌دهیم.
در واقع K مزدوج همزاویه‌ای مرکزثقل G است و ویژگی‌های جذاب زیادی دارد.
مثلا می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه با راس قائمه A ، نقطه وسط ارتفاع AH همان شبه مرکز ثقل

است. شبه میانه‌ها، اضلاع مثلث ارتفاعیه (مثلثی که رئوس آن از پای ارتفاعات بدست می‌آید) را نصف می‌کنند. اگر از رئوس مثلث به شبه مرکز ثقل وصل کنیم تا دایره محیطی را در سه نقطه قطع کند، شبه مرکز ثقل این سه نقطه جدید، همان شبه مرکز ثقل مثلث اصلی است و ... .
همچنین بسادگی می‌توان نشان داد که شبه مرکز ثقل همان نقطه ناجل است.
هانسبرگر در [۱۱، صفحه ۵۳] آن را "یاقوت تاج هندسه مدرن" نامیده است. برای اطلاعات بیشتر به [۲۴] رجوع کنید.

۲.۲ مزدوج همزاویه‌ای

نقطه‌ای مانند P را با قرینه‌های P_a و P_b و P_c نسبت به اضلاع BC ، CA و AB در نظر بگیرید. گیریم Q یک نقطه روی خط متساوی‌الزاویه با AP نسبت به نیمساز زاویه A باشد، به‌عبارت دیگر خطوط AQ و AP نسبت به نیمساز زاویه BAC متقارن هستند. به شکل (۴.۲)نگاه کنید.



شکل ۴.۲:

نشان می‌دهیم مثلث‌های AQP_b و AQP_c همنهشت‌اند.
اثبات: مثلث APP_b متساوی‌الساقین بوده و AC از وسط PP_b عبور می‌کند، لذا نیمساز زاویه A است، بنابراین $\angle PAC = \angle CAP_b$ ازطرفی داریم $\angle PAC = \angle QAB$ در نتیجه

$$\angle CAP_b = \angle QAB \qquad (۵)$$

در مثلث PAP_c همانند قبل داریم $\angle PAB = \angle BAP_c$ و همچنین $\angle QAC = \angle PAB$ در

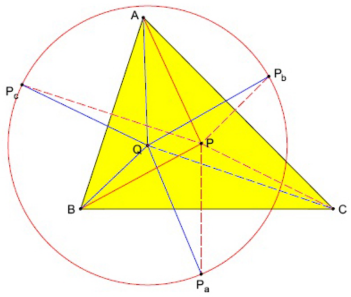
نتیجه

$$\angle QAC = \angle BAP_c \qquad (۶)$$

با جمع کردن روابط (۵) و (۶) داریم

$$\angle QAB + \angle BAP_c = \angle QAC + \angle CAP_b$$

یعنی $\angle QAP_c = \angle QAP_b$. پس بنابر (ض‌زض) داریم $\triangle QAP_c \cong \triangle QAP_b$.■
لذا $QP_b = QP_c$. با استدلال مشابه، هر نقطه‌ای که روی خط متساوی‌الزاویه با BP قرار دارد، از P_c و P_a به یک فاصله است. در نتیجه نقطه تقاطع P^* که نقطه تلاقی دو خط متساوی‌الزاویه با خطوط AP و BP است، از P_a ، P_b و P_c به یک فاصله است. علاوه براین P^* روی خط متساوی‌الزاویه با CP قرار دارد. به همین دلیل P^* را مزدوج همزاویه‌ای P می‌نامیم. این نقطه مرکز دایره بازتاب‌های P است. به شکل (۵.۲) نگاه کنید.



شکل ۵.۲:

بوضوح $P = (P^*)^*$. به‌علاوه دوایر بازتاب‌های P و P^* همنهشت هستند، چون در شکل (۶.۲) ذوزنقه‌ی $PP^*P_a^*P_a$ نسبت به ضلع BC متقارن است. بنابراین ذوزنقه متساوی‌الساقین بوده و $PP_a^* = P^*P_a$. یعنی شعاع‌های دوایر بازتاب‌های P و P^* برابرند، که نشان می‌دهد این دوایر همنهشت‌اند.
پادکهای P و P^* روی اضلاع، همه روی دایره‌ای با مرکز نقطه میانی PP^* واقع شده‌اند. که آن را دایره پادکی مشترک P و P^* می‌نامیم.