بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

## تقدیم به:

اسوه‌های عشق و فداکاری

پدر و مادرم

# سپاسگزاری

سپاس یگانه‌ای را که با الطاف بی‌پایانش مرا یاری داد و یک لحظه در این راه مرا تنها نگذارد. دیروز همین خاطره امروز و فردا رؤیای امروز است و آن روحی که در درون ما می‌خواند و می‌اندیشد هنوز در دایره نخستین لحظه‌ای است که استاد آغاز کرد.

با تشکر و سپاس از استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر جاهدی که با گشاده رویی و دقت نظر، تجارب علمی خود را در اختیارم گذاردند و همیشه مدیون راهنمایی‌های ایشان خواهم بود.

مراتب امتنان خود را نسبت به جناب آقایان دکتر فخارزاده و دکتر حاجی شعبانی که مشاورت این پایان نامه را پذیرفتند، عرض نموده و از همیاری خردمندانه‌شان بینهایت سپاسگزارم.

تقدیر و تشکری خالصانه از پدر و مادر عزیزم و خواهران و برادر مهربانم دارم که در تمامی لحظات همدل و همراه من بودند و سخاوتمندانه جویبار لطف خویش را بر من ارزانی داشتند. و در انتها از همکلاسی‌های عزیزم و دیگر دوستانی که مرا در این راه یاری دادند، صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

مژده همتی

شهریور ۱۳۹۰

# چکیده

## مسئله کمینه‌سازی انتگرال انرژی از طریق درونیابی

**بوسیله‌ی:**

**مژده همتی داریونی**

مسئله کمینه‌سازی انتگرال انرژی در جهان امروز از اهمیت قابل توجهی برخوردار است و روش‌هایی برای حل آن از مرتبه یک و دو وجود دارد. در صورتی که انتگرال انرژی از مرتبه کسری باشد، مسئله کمینه‌سازی انتگرال انرژی با روش‌های شناخته شده قبلی قابل حل نمی‌باشد. هدف اصلی این پایان نامه ارائه یک روش درونیابی برای یافتن یک تابع به طور قطعه‌ای هموار روی $[0, 1]$ است که از تعدادی نقطه دلخواه داده شده در آن گذشته و انتگرال انرژی با مشتق کسری را کمینه کند. تعمیم این مسئله به حالت دوبعدی و بالاتر با معرفی یک روش درونیابی برای ساختن یک سطح پیوسته یا یک تابع حقیقی مقدار دومتغیره و بالاتر صورت می‌گیرد، که از تعدادی نقطه دلخواه داخل ناحیه مربوطه گذشته و انتگرال انرژی از مرتبه کسری را کمینه می‌کند.

# فهرست

**عنوان** | **صفحه**

# فهرست جدولها

# فهرست شکلها

# فصل ۱

# مقدمات

# فصل اول

# مقدمات

با توجه به رشد روز افزون جمعیت و کمبود منابع انرژی، به ویژه در سال‌های اخیر، کمینه‌سازی انرژی مورد توجه زیادی قرار گرفته است. از این رو ریاضیات به عنوان ابزاری قدرتمند برای حل مسائل کمینه‌سازی انتگرال انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از اولین روش‌هایی که برای حل این مسائل به کار می‌رود، حساب تغییرات است که نام آن به نظریه بهینه‌سازی انتگرال‌ها اطلاق شده است. در واقع حساب تغییرات روشی را توضیح می‌دهد که برای حصول نظریه به کار می‌رود ([۳۱]). اما از آنجا که در سال‌های اخیر روش‌های درونیابی پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است، در این پایان نامه با استفاده از ابزارهای حساب تغییرات و آنالیز تابعی به معرفی یکی از روش‌های درونیابی برای حل مسئله کمینه‌سازی انتگرال انرژی می‌پردازیم. بنابراین لازم است که ابتدا مقدمه‌ای را در رابطه با درونیابی بیان کنیم.

## ۱—۱ درونیابی

روش‌های درونیابی پیشرفت گسترده‌ای درعلوم مهندسی داشته و ابزار مناسبی برای تقریب توابع می‌باشند. شواهد نشان می‌دهند که اولین استفاده از درونیابی‌ها به بابل قدیم و یونان

برمی‌گردد. بابلیان حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح از فرم‌های خطی درونیابی برای پیشگویی موقعیت خورشید، ماه و سیارات شناخته شده در آن زمان استفاده می‌کردند. در یونان نیز حدود ۱۵۰ سال قبل از میلاد از یک تابع درونیاب خطی برای محاسبه موقعیت اجرام آسمانی استفاده می‌نمودند. همچنین چینی ها حدود ۶۰۰ سال پس از میلاد مسیح برای ساختن تقویم استاندارد پادشاهی از درونیابی استفاده می‌کرده‌اند ([۲۲]). در قرون اخیر نیوتن[۱] (۱۶۷۵)، لاگرانژ[۲] (۱۷۹۵) و هرمیت[۳] (۱۸۷۰) در توسعه نظریه و روش‌های درونیابی پیش قدم بودند ([۱۰]، [۲۰]، [۲۳] و [۲۴]).

اکنون به تعریف درونیابی و معرفی برخی روش‌های آن می‌پردازیم ([۴۱] و [۴۷]).

یک خانواده از توابع تک متغیره از $x$ همراه با $n+1$ پارامتر $a_0$، $a_1$ و ... و $a_n$ که به صورت $\phi(x;a_0,a_1,...,a_n)$ با هم در ارتباط هستند را در نظر بگیرید. فرض کنیم $n+1$ زوج از اعداد حقیقی یا مختلط $(x_i,f_i)$ به ازای $i=0,1,...,n$ و $x_i \neq x_k$ برای $i \neq k$ داده شده باشد. در این صورت مسئله درونیابی برای $\phi$، تعیین پارامترهای $a_i$ است به طوری که رابطه

$$\phi(x_i;a_0,a_1,...,a_n)=f_i, \qquad i=,1,...,n.$$

برقرار باشد. زوج‌های $(x_i,f_i)$ را نقاط تکیه‌گاه، پارامترهای مکان $x_i$ را طول تکیه‌گاه و مقادیر $f_i$ را عرض تکیه‌گاه می‌نامند. یادآور می‌شویم که در پاره‌ای از موارد، مقادیر مشتق $\phi$ نیز داده می‌شوند. اگر $\phi$ به طور خطی به پارامترهای $a_i$ بستگی داشته باشد، یعنی

$$\phi(x;a_0,a_1+...,a_n)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+...+a_n\phi_n(x);$$

به طوری که $\phi_i$، $i=0,1,...,n$ توابع پایه باشند، آنگاه مسئله فوق را یک مسئله درونیابی

[۱] Newton
[۲] Lagrange
[۳] Hermite

خطی می‌نامند. به عنوان مثال‌هایی از آن، می‌توان درونیابی چند جمله‌ای به صورت

$$\phi(x; a_۰, a_۱, ..., a_n) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + ... + a_nx^n$$

و درونیابی مثلثاتی به صورت زیر

$$\phi(x; a_۰, ..., a_n) = a_۰ + a_۱e^{xi} + a_۲e^{۲xi} + ... + a_ne^{nxi} \qquad (i^۲ = -۱)$$

را بیان کرد. توجه کنید که اگر در درونیابی مثلثاتی قرار دهیم:

$$e^{kxi} = \cos kx + i \sin kx,$$

آنگاه $\phi$ به صورت ترکیب خطی از توابع مثلثاتی قابل نمایش است. از دیگر مسائل درونیابی خطی می‌توان درونیابی توسط چند جمله ای اسپلاین مکعبی را نام برد که در ادامه آن را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱:** فرض کنیم $a = x_۰ < x_۱ < ... < x_n = b$ مجموعه ای از نقاط یا گره‌ها بوده و تابع $f$ بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. یک درونیاب اسپلاین مکعبی برای $f$ تابعی است مانند $S$ که در شرایط زیر صدق کند ([۴۷]):

**(۱)** $S$ تابعی است که به ازای هر $j = ۰, ۱, ..., n - ۱$ بر زیر بازه‌ی $[x_j, x_{j+۱}]$ با $S_j$ که یک چند جمله‌ای مکعبی است، نمایش داده می‌شود؛

**(۲)** به ازای هر $j = ۰, ۱, ..., n$، $S(x_j) = f(x_j)$؛

**(۳)** به ازای هر $j = ۰, ۱, ..., n - ۲$، $S_{j+۱}(x_{j+۱}) = S_j(x_{j+۱})$؛

**(۴)** به ازای هر $j = ۰, ۱, ..., n - ۲$، $S'_{j+۱}(x_{j+۱}) = S'_j(x_{j+۱})$؛

**(۵)** به ازای هر $j = ۰, ۱, ..., n - ۲$، $S''_{j+۱}(x_{j+۱}) = S''_j(x_{j+۱})$؛

(۶) یکی از شرایط مرزی زیر برقرار است:

(الف) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$؛

(ب) $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$.

لازم به ذکر است که برقراری شرط (ب)، به این دلیل که شامل اطلاعات بیشتری از تابع است، به تقریب‌های دقیق‌تری منجر می‌شود.

از درونیابی‌های غیر خطی مهم نیز می‌توان به درونیابی گویا به صورت

$$\phi(x; a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}$$

و درونیابی نمایی به صورت

$$\phi(x; a_0, ..., a_n, \lambda_0, ..., \lambda_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + ... + a_n e^{\lambda_n x}$$

اشاره کرد.

هم اکنون تعدادی از کاربردهای روش‌های ذکر شده از درونیابی را بیان می‌کنیم.

### ۱−۱−۱ کاربردهای درونیابی

در طول تاریخ، متداول‌ترین کاربرد درونیابی، تعیین داده‌های یک جدول است که مقادیر دقیق آن‌ها معلوم نباشد. در گذشته بسیاری مواقع از درونیابی چند جمله‌ای برای درونیابی مقادیر تابع جمع آوری شده از جدول استفاده می‌شده است، اما با روی کار آمدن ماشین‌های محاسباتی مدرن، این نیاز برای داده‌های زیاد رفع شد. گر چه در حالت کلی از درونیابی‌های چند جمله‌ای به عنوان پایه‌ی انواع فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شوند، در یک توسعه مدرن‌تر، درونیابی‌های چند جمله ای در حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی و مسائل

مرتبط به کار می‌روند ([۴۱]). همچنین درونیابی مثلثاتی را می‌توان به طور گسترده برای آنالیز فوریه عددی در سری‌های زمانی و پدیده‌های چرخه‌ای [۴] استفاده کرد ([۵]). درونیابی اسپلاین نیز ابزار با ارزشی برای نمایش منحنی تجربی و تقریب توابع ریاضی پیچیده است و در حل معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی به کار می‌رود ([۴۱]). اما از درونیابی‌های غیر خطی، درونیابی گویا نقش اساسی در فرآیند بهترین تقریب از یک تابع داده شده را بازی می‌کند و به آسانی روی کامپیوترهای دیجیتال ارزیابی می‌شود. از کاربردهای درونیابی نمایی نیز می‌توان به آنالیز رادیو اکتیو اشاره کرد ([۵] و [۴۱]). از جمله کاربردهای مهم دیگر روش‌های درونیابی می‌توان به پردازش تصویر و گرافیک‌های کامپیوتری اشاره کرد ([۵]، [۲۶] و [۴۴]).

## ۱—۲ تاریخچه، هدف و کاربردها

همانطور که اشاره شد، مسئله درونیابی که در این پایان نامه به آن می‌پردازیم، مسئله کمینه‌سازی انتگرال انرژی می‌باشد. این مسئله که در سال ۲۰۰۵ توسط القفاری [۵] [۱] مطرح شد، به صورت زیر است:

تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر $u$ بر روی $[0,1]$ که از $N+1$ نقطه $(x_0,c_0)$، $(x_1,c_1)$، ...، $(x_N,c_N)$ با $0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$ بگذرد، را چنان بیابید که تابع انتگرال انرژی

$$E_2(u) = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx, \qquad (1-1)$$

را نسبت به شرایط $u(x_i) = c_i$، $1 \le i \le N-1$ و $u(x_0) = u(x_N) = 0$ کمینه سازد.

القفاری نشان داد که مسئله دارای جواب یکتاست و تقریبی برای جواب به دست آورد.

[۴] Cyclic Phenomena
[۵] Alghofari

وی همچنین این مسئله را به حالت دوبعدی نیز تعمیم داد([۱]). در سال ۲۰۰۸، گوناوان[۶] و همکارانش نتایج القفاری را با جایگزینی انتگرال انرژی $E_2(u)$ در رابطه (۱—۱) با $E_\alpha(u)$ به صورت زیر

$$E_\alpha(u) = \int_0^1 |u^{(\alpha)}(x)|^2 dx, \tag{۱—۲}$$

که در آن $u^{(\alpha)}$ مشتق کسری $u$ از مرتبه $\alpha \geq 0$ را مشخص می‌کند، تعمیم دادند ([۱۷]). لازم به ذکر است که برای $\alpha = 1$ می‌توان از این روش علاوه بر کمینه‌سازی انتگرال انرژی برای محاسبه سری فوریه تابع مفروض $f$ که در تعداد متناهی نقطه مشخص شده باشد، استفاده کرد ([۳۳]). همچنین خواهیم دید که برای $\alpha = 2$ این روش بر روش درونیابی اسپلاین منطبق می‌شود ([۱۳]، [۱۵] و [۴۳]). اما گوناوان علاوه بر حل مسئله در رابطه (۱—۲)، مسئله در حالت دو بعدی را نیز به صورت زیر تعمیم داد:

فرض کنیم $u$ تابع پیوسته و به طور قطعه‌ای هموار بر مربع $[0,1]^2$ باشد. تابع $z = u(x,y)$ را چنان بیابید که انتگرال انرژی

$$E_\beta(u) = \int_0^1 \int_0^1 |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u|^2 dxdy. \tag{۱—۳}$$

را نسبت به شرایط مرزی $u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$ و شرایط درونی $u(x_i,y_j) = c_{ij}$ برای $i = 1,...,M$ و $j = 1,...,N$ کمینه سازد، که در آن $0 < x_1 < ... < x_M < 1$، $0 < y_1 < ... < y_N < 1$ و $c_{ij} \in \mathbb{R}$ داده شده اند ([۳۶]). همچنین گوناوان مسئله (۱—۳) را در حالتی که نقاط به طور تصادفی در ناحیه منتشر شده باشند، بررسی کرد ([۳۷]). در رابطه (۱—۳)، $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ بیانگر توان کسری لاپلاسین برای $\beta \geq 0$ می‌باشد که در فصل ۳ راجع به آن صحبت خواهیم کرد.

[۶] Gunawan

کمینه‌سازی انتگرال انرژی در مسائل متنوعی از قبیل پردازش تصویر، انیمیشن، مسائل فیزیک و مکانیک مورد استفاده واقع می‌شود ([۳]، [۶]، [۹] و [۲۵]). همچنین از کاربردهای مسئله (۱ — ۲) می‌توان آنالیز میدان جاذبه زمین با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای را نام برد ([۱]). به عنوان کاربردی جالب از سطوح کمینه کننده انرژی از مرتبه کسری نیز می‌توان به تأثیر چشم‌گیر آن‌ها در پردازش تصویر برای بالا بردن کیفیت آن و همچنین نظریه تبدیل موجک‌ها و مکانیک کوانتوم اشاره کرد ([۶]، [۷] و [۸]).

اما هدف اصلی در این پایان نامه شرح و توصیف روش ذکر شده و در حد امکان مقایسه با روش های موجود می‌باشد. همچنین مسئله (۱ — ۳) را به حالت سه بعدی تعمیم داده، وجود و یکتایی جواب برای مسئله را بررسی می‌کنیم ([۱۸] و [۱۹]). همچنین از سری‌های فوریه سه‌گانه به عنوان ابزاری قدرتمند در تقریب توابع استفاده کرده و تقریبی برای جواب به دست می آوریم.

اکنون به طور خلاصه ابزارهای لازم جهت ارائه بحث در فصل‌های آتی همراه با برخی از مفاهیم، قضایا و تعاریف ریاضی که مورد استفاده قرار خواهند گرفت را معرفی می‌نماییم. لازم به ذکر است که خواننده گرامی می‌تواند جهت مطالعه بیشتر به مراجع ذکر شده در هر مورد مراجعه فرماید.

## ۱ — ۳ پیش نیازها

ابتدا مفهوم توپولوژی روی یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۲.۱**: خانواده $\tau$ از زیر مجموعه‌های ناتهی $X$ یک توپولوژی روی $X$ نامیده می‌شود، اگر $\tau$ دارای خواص زیر باشد:

(۱) $X, \emptyset \in \tau$؛

(۲) دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد، یعنی اگر به ازای $i = ۱, ۲, ..., n$، $v_i \in \tau$ آنگاه

$$\bigcap_{i}^{n} v_i \in \tau;$$

(۳) اگر $v_\alpha$ یک خانواده از اعضای $\tau$ ( متناهی، شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر) باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha v_\alpha \in \tau$.

هر گاه $\tau$ یک توپولوژی روی X باشد، آنگاه $(X, \tau)$ فضای توپولوژیکی نامیده می‌شود و اعضای $\tau$ را مجموعه های باز در X می‌نامند ([۳۵]).

**تعریف ۳.۱**: منظور از یک پوشش باز مجموعه $E$ از فضای متری $X$، گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های باز $X$ مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ است به طوری که $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$ ([۳۵]).

**تعریف ۴.۱**: زیر مجموعه $K$ از فضای متری $X$ را فشرده گویند هرگاه به ازای هر پوشش باز مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ از $K$، تعداد متناهی اندیس مانند $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ موجود باشند به طوری که $K \subset G_{\alpha_۱} \cup ... \cup G_{\alpha_n}$ ([۳۵]).

با استفاده از تعاریف فوق می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه‌های فشرده فضاهای متری بسته‌اند و زیر مجموعه‌های بسته مجموعه های فشرده، فشرده اند ([۳۵]).

**تعریف ۵.۱**: **(الف)** گردایه‌ی $M$ از زیرمجموعه‌های مجموعه $X$ را یک $\sigma-$جبر در $X$ نامیم اگر $M$ از خواص زیر بهره مند باشد ([۳۵]):

(۱) $X \in M$؛

(۲) هر گاه $A \in M$، آنگاه $A^c \in M$ که در آن $A^c$ متمم $A$ نسبت به $X$ است؛

(۳) هر گاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, ...$، $A_n \in M$، آنگاه $A \in M$.

(ب) هر گاه $M$ یک $\sigma-$جبر در $X$ باشد، آنگاه $X$ را یک فضای اندازه پذیر و اعضای $M$ را مجموعه‌های اندازه پذیر در $X$ می‌نامیم.

(ج) یک اندازه مثبت تابعی است مانند $\mu$ که بر یک $\sigma-$جبر مانند $M$ تعریف شده، برد آن زیرمجموعه‌ی $[0, \infty]$ است و خاصیت جمعی شمارش‌پذیر را دارد. این یعنی هر گاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر و از هم جدا از اعضای $M$ باشد، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A_i\}$. اندازه مثبت را اغلب صرفاً اندازه می‌نامند.

(د) اگر $\mu$ اندازه‌ای بر $\sigma-$جبر $M$ بوده و $E \in M$، عبارت «خاصیت $P$، تقریباً همه جا بر $E$ برقرار است»، یعنی وجود دارد $N \subset E$ به طوری که $\mu(N) = 0$ و $P$ در هر نقطه از $E - N$ برقرار است.

**تعریف ۶.۱**: تکیه‌گاه[۷] تابع حقیقی f روی فضای توپولوژیکی X، بستار مجموعه $\{x : f(x) \neq 0\}$ می‌باشد. خانواده تمام توابع حقیقی پیوسته روی X با تکیه‌گاه فشرده، توسط $C_c(X)$ نمایش داده می‌شود ([۳۵]).

**تعریف ۷.۱**: فضای توپولوژیکی X هاوسدورف[۸] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $p, q \in X$ و $p \neq q$ همسایگی‌های $V_p$ و $V_q$ موجود باشند به طوری که $V_q \cap V_p = \emptyset$ ([۳۵]).

**تعریف ۸.۱**: فضای توپولوژیکی X فشرده موضعی[۹] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر نقطه $p \in X$ همسایگی $V_p$ موجود باشد به طوری که بستارش $(\overline{V}_p)$ فشرده باشد ([۳۵]).

**تعریف ۹.۱**: یک مجموعه از توابع پیوسته حقیقی مقدار یا مختلط $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ روی

[۷] support
[۸] Hausdorff
[۹] Locally Compact

فضای توپولوژیکی هاوسدورف و فشرده $A$ را سیستم چبیشف [۱۰] می‌نامند هر گاه شرایط زیر برقرار باشند ([۲۷]):

(۱) $A$ شامل حداقل $n$ نقطه باشد؛

(۲) چند جمله‌ای $P = a_1\phi_1 + ... + a_n\phi_n$ که در آن تمام ضرایب $a_i$ صفر نیستند، حداکثر $n - 1$ صفر مجزا روی $A$ داشته باشد.

توجه کنید که شرط (۲) از تعریف فوق با خواص زیر هم‌ارز می‌باشد ([۲۷]):

(۱) اگر $x_1$ و ... و $x_n$ نقاط مجزای $A$ باشند، آنگاه دترمینان

$$D(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

غیر صفر است.

(۲) اگر $x_1$ و ... و $x_n$ نقاط مجزای $A$ بوده و $c_1$ و ... و $c_n$ اعداد دلخواه باشند، آنگاه سیستم

$$a_1\phi_1(x_k) + ... + a_n\phi_n(x_k) = c_k, \qquad k = 1, ..., n$$

به ازای $a_1$ و ... و $a_n$ جواب منحصربفرد دارد.

به عنوان مثال توابع $\{\sin \pi x, ..., \sin n\pi x\}$ و $\{1, \cos \pi x, ..., \cos n\pi x\}$ دو سیستم چبیشف روی $[0, 1]$ هستند ([۲۷]).

**تعریف ۱۰.۱**: فرض کنیم دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ به صورت $A = [a_{mn}]$ و $B = [b_{pq}]$ باشند. حاصلضرب کرونکر [۱۱] دو ماتریس $A$ و $B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}[B] & \dots & a_{1n}[B] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}[B] & \dots & a_{mn}[B] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$$

---

[۱۰] Chebyshev
[۱۱] Kronecker product