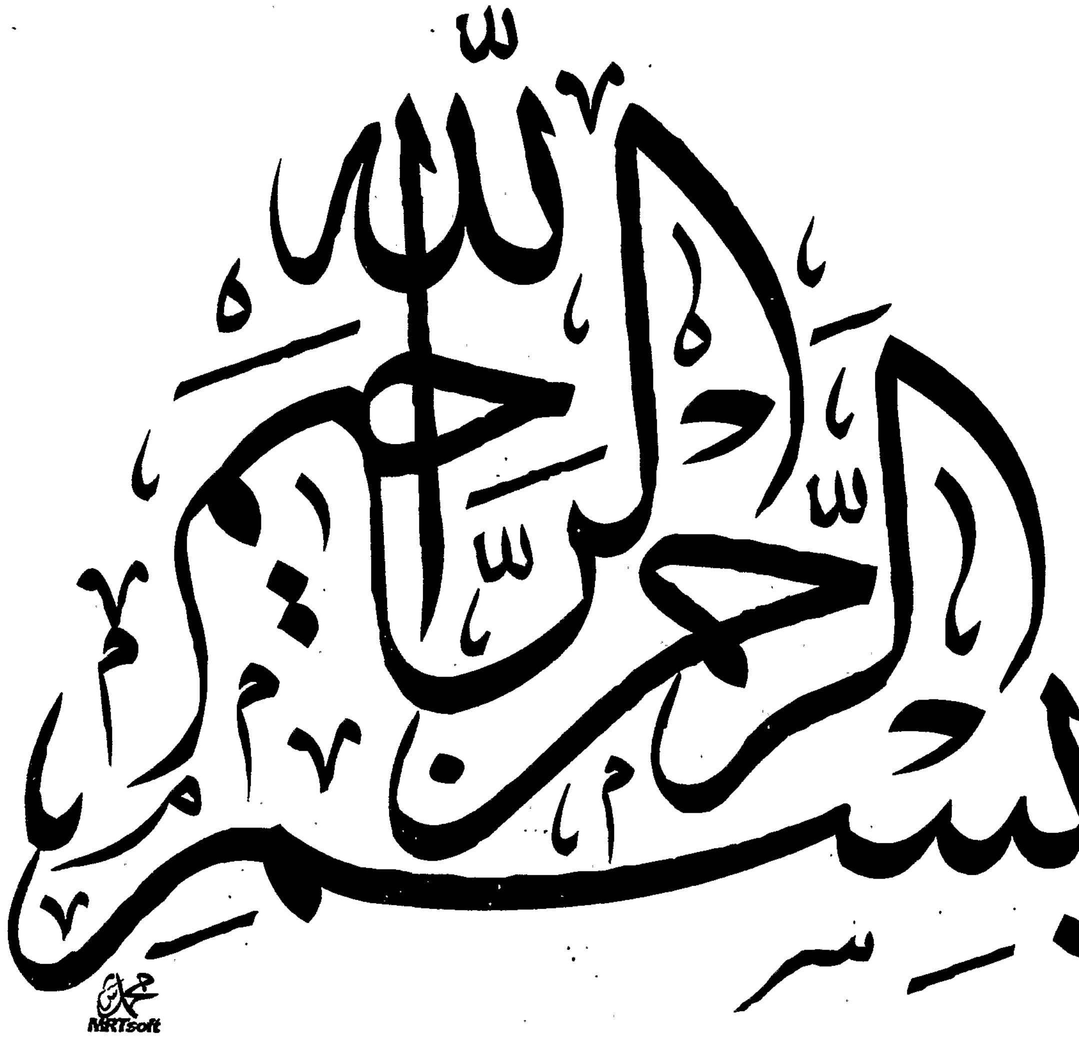
بسم الله الرحمن الرحيم
MRTsoft

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

دسته بندی ماهلر از اعداد مختلط واندازه متعالی بودن

استاد راهنما:

دکتر خدابخش حسامی پیله رود

استاد مشاور:

دکتر تاتیانا حسامی پیله رود

توسط:

علی کرم کرمی دهکردی

خرداد ۱۳۸۷

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

علی کرم کرمی دهکردی

تحت عنوان

دسته بندی ماهلر از اعداد مختلط و اندازه متعالی بودن

در تاریخ ۱۳۸۷/۳/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر خدابخش حسامی پیله رود با مرتبه علمی دانشیار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر تاتیانا حسامی پیله رود با مرتبه علمی استاد یار — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر علیرضا نقی پور با مرتبه علمی استادیار — امضاء

۴ - استاد داور خارج از گروه دکترانشایی با مرتبه علمی استاد یار از دانشگاه اصفهان — امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه دکترمهدی قاسمی بامرتبه علمی استادیار — امضاء

دکتر محمد مردانی

معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم پایه

تقدیر

«حقیقت امر ...

... این است که ما کاره‌ای نیستیم. بدین نکته معترف نبودن، خامی و پوچی بسیار می‌خواهد و پرسشی پیش می‌آید که: پس چه می گویی؟

برای این پرسش پاسخی اندیشیده‌ایم. از هرچه بگذریم، بالاخره ما هم یک تماشاییِ این زندگی و زمانه‌ایم.»

حمد بی‌پایان خداوند منّان را که مرا لایق معلّمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و هم‌نوایی با آنان سعادت است.

در پایان این مرحله از تحصیل بر خود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های محبّت و مهربانی، خانواده‌ی عزیزم صمیمانه تشکّر کنم.

از اساتید گرامی، آقای دکتر حسامی و خانم دکتر حسامی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و بزرگواری در اختیار من قرار دادند و مرا تا به انجام رسانیدن این پایان‌نامه هدایت کردند، صمیمانه تقدیر و تشکّر می‌کنم.

از اساتید محترم و فرهیخته، آقای دکتر انشایی و آقای دکتر نقی‌پور که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبّل فرمودند صمیمانه تقدیر و تشکّر می‌کنم.

در نهایت، از تمام کسانی که در عرصه‌های مختلف زندگی با کمک‌ها و راهنمایی‌هایشان مرا همراهی کردند، سپاس‌گذارم و برای همه‌ی این عزیزان سلامتی و شادکامی آرزومندم.

تقدیم

این اثر ناچیز را به پاس عاطفه‌ی سرشار و محبّت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان‌ترین کسان خویش یعنی پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

چکیده

این پایان‌نامه به سؤال اصلی نظریه‌ی تقریب‌های دیوفانتی اختصاص دارد: «عدد حقیقی داده شده‌ی α چه‌قدر خوب می‌تواند توسط اعداد گویا یا اعداد جبری تقریب شود؟»

نتایج اوّلیه برای تقریب‌های گویا توسط دیریکله و لیوویل به‌دست آمده و اثبات شدند. اوّلین مثال‌ها از اعداد متعالی به‌دست آمدند.

دسته‌بندی‌های ماهلر و کوکسما از اعداد مختلط معرفی شده و به بعضی خواص و مقایسه بین این دسته‌بندی‌ها رسیدگی می‌شود. هم‌ارزی این دو دسته‌بندی ثابت می‌شود.

سرانجام، قضیه‌ی ماهلر روی اندازه‌ی متعالی بودن عدد e ثابت می‌شود و موقعیّت عدد e در دسته‌بندی‌های ماهلر و کوکسما محرز می‌شود.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbb{Q}$	مجموعه اعداد گویا
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{C}$	مجموعه اعداد مختلط
$\mathbb{A}$	مجموعه اعداد جبری
$[x]$	قسمت صحیح عدد x
$\{x\}$	قسمت اعشاری عدد x
$M(P)$	اندازه ماهلر چند جمله‌ای P

فهرست نمادها

$\deg(\xi)$	درجه عدد جبری ξ
$h(P)$	ارتفاع چند جمله‌ای P
$h(\xi)$	ارتفاع عدد جبری ξ
$\overline{\lvert\alpha\rvert}$	ماکزیمم مدولهای، مزدوج‌های عدد جبری α
$K[x]$	حلقه چندجمله‌ای‌های از متغیر x با ضرایب از K
π	ثابت ارشمیدسی
e	عدد نپر

فصل اوّل

مقدمه

سؤال اصلی نظریه تقریب‌های دیوفانتی چنین می‌باشد: «عدد حقیقی داده شده‌ی α چه‌قدر خوب می‌تواند توسط اعداد گویاتقریب شود.»
یعنی به چه اندازه قدر مطلق تفاضل زیر به ازای اعداد گویای متمایز $\frac{p}{q}$ می‌تواند کوچک شود

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|. \qquad (1)$$

از آن‌جایی‌که مجموعه‌ی اعداد گویا در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگال است، پس تحت انتخاب مناسب اعداد p و q، اندازه‌ی (۱) را می‌توان کوچک‌تر از هر عدد داده شده‌ی قبلی کرد. بنابر این مطالعه‌ی کوچکی نسبی اندازه‌ی (۱) مورد توجّه و مهّم است. دقّت تقریب عدد α توسط اعداد گویای $\frac{p}{q}$ معمولاً با "دشواری" عدد گویای $\frac{p}{q}$ مقایسه می‌شود، که این دشواری

توسط مخرج q تعیین می‌گردد. رفتار اندازه‌ی (۱) را معمولاً به‌طریق زیر برآورد می‌کنند.
فرض کنیم $\varphi(q)$ تابعی مثبت از q و نزولی با افزایش q باشد. تحقیق و بررسی می‌شود که به ازای کدام‌یک از توابع $\varphi(q)$، نامساوی

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$$

دارای بی‌نهایت جواب و به ازای کدام‌یک از این توابع به تعداد متناهی جواب در اعداد صحیح p و q، $\alpha \neq \frac{p}{q}$ وجود دارد.
گوییم عدد حقیقی α تقریب اعداد گویای $\frac{p}{q}$ از مرتبه‌ی $\varphi(q)$ را دارد، اگر ثابت $c = c(\alpha) > ۰$ وابسته فقط به α موجود باشد به‌طوری‌که نامساوی

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < c(\alpha)\varphi(q)$$

بی‌نهایت جواب در اعداد $\frac{p}{q}$، $\alpha \neq \frac{p}{q}$ داشته باشد.
غالباً به‌عنوان تابع $\varphi(q)$ تابع

$$\varphi(q) = \frac{۱}{q^{\nu}}, \qquad \nu > ۰$$

را در نظر می‌گیرند.
با دادن مقادیر مثبت متمایز به ν و c معلوم می‌کنند که چه موقع نامساوی

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^{\nu}}$$

دارای بی‌نهایت جواب و یا متناهی جواب می‌باشد.
فرض کنیم $\alpha = \frac{a}{b}$، $a \in \mathbb{Z}$، $b \in \mathbb{N}$ و $(a, b) = ۱$ باشد. در این‌حالت مسئله‌ی رفتار تفاضل (۱) به آسانی حل می‌گردد.
به ازای هر $q \in \mathbb{N}$ عدد $p \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{p}{q} \leq \frac{a}{b} < \frac{p+۱}{q},$$

آن‌گاه

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{q}. \qquad (۲)$$

با دادن مقادیر متمایزی به q که مضارب b نیستند، یقین حاصل می‌کنیم که به تعداد بی‌نهایت کسر $\frac{p}{q}$، $\alpha \neq \frac{p}{q}$ وجود دارند که در نامساوی (۲) صدق می‌کنند. این بدان معنی است که α تقریب کسرهای گویای $\frac{p}{q}$ از مرتبه‌ی $\frac{۱}{q}$ را دارد.

از طرف دیگر به ازای هر کسر $\frac{p}{q}$، $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$،

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|aq-bp|}{bq}\geq\frac{۱}{bq}. \qquad (۳)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که به ازای هر ثابت دلخواه c، $۰<c\leq\frac{۱}{b}$ نامساوی

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q} \qquad (۴)$$

جوابی در اعداد $\frac{p}{q}$، $\alpha \neq \frac{p}{q}$ ندارد.

مرتبه‌ی تقریب اعداد گویا برای اعداد حقیقی متمایز، متمایز می‌باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که تمام اعداد حقیقی گنگ، تقریبی‌از کسرهای گویا از مرتبه‌ی $\frac{۱}{q^۲}$ را دارند و هم‌چنین در بین آنها اعدادی وجود دارند که تقریب به اندازه‌ی دلخواه خوبی از مرتبه‌ی $\frac{۱}{q^\nu}$، جایی‌که $\nu>۰$ هر عدد دلخواه حقیقی است را دارند.

قضیه ۱.۱ (دیریکله[۱])

فرض کنید α عددی حقیقی و t عددی طبیعی باشد. در این‌صورت اعداد صحیح p و q وجود دارند به‌طوری‌که نامساوی زیر برقرار است

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{qt}, \qquad ۰<q\leq t. \qquad (۵)$$

---

[۱] Dirichlet

اثبات: اصل دیریکله را به‌کار می‌بریم که بر اساس ایده‌ی خیلی ساده‌ای بنا شده است. اگر m شیء را در n جعبه قرار دهیم، آن‌گاه به ازای $m > n$ حداقل در یکی از جعبه‌ها کم‌تر از دو شیء قرار نمی‌گیرد.

$t + ۱$ عدد زیر را در نظر می گیریم

$$\{\alpha x\} = \alpha x - [\alpha x], \qquad x = ۰, ۱, ..., t. \qquad (٦)$$

بنابه خواص قسمت کسری هر عدد داریم

$$۰ \leq \{\alpha x\} < ۱. \qquad (۷)$$

بازه‌ی نیمه باز $۰ \leq y < ۱$ را به t بازه‌ی نیمه باز مساوی به‌صورت زیر تقسیم می کنیم

$$\frac{k}{t} \leq y < \frac{k+۱}{t}, \qquad k = ۰, ۱, ..., t - ۱. \qquad (۸)$$

هر کدام از اعداد (٦) بنابه نامساوی (۷) به یک و فقط یکی از بازه‌های نیمه باز (۸) تعلّق خواهد داشت زیرا این فاصله‌های نیمه باز نقاط مشترکی ندارند. امّا تعداد اعداد (٦) برابر $t + ۱$ و تعداد بازه‌های نیمه باز (۸) برابر t است. به همین دلیل در بین بازه‌های نیمه باز (۸) بازه‌ی نیمه بازی پیدا می‌شود که شامل دو تا از اعداد (٦) باشد. فرض کنیم این اعداد

$$\{\alpha x_۱\} = \alpha x_۱ - [\alpha x_۱], \qquad \{\alpha x_۲\} = \alpha x_۲ - [\alpha x_۲], \qquad x_۲ > x_۱$$

باشند، آن‌گاه

$$|\{\alpha x_۲\} - \{\alpha x_۱\}| = |\alpha(x_۲ - x_۱) - ([\alpha x_۲] - [\alpha x_۱])| < \frac{۱}{t}, \qquad (۹)$$

قرار می‌دهیم

$$x_۲ - x_۱ = q, \qquad [\alpha x_۲] - [\alpha x_۱] = p$$

آشکار است که $\circ < q \leq t$. با وارد کردن این نمادگذاری‌ها در (۹) نامساوی‌های

$$|\alpha - p| < \frac{1}{t}, \qquad \circ < q \leq t$$

را به‌دست می آوریم، که از آنها حکم قضیه یعنی (۵) نتیجه می‌شود.

قبلاً نشان دادیم که برای عدد گویای $\alpha = \frac{a}{b}$، نامساوی (۳) به ازای هر کسر $\frac{p}{q}$، $\alpha \neq \frac{p}{q}$ برقرار است. به همین دلیل به ازای $t \geq b$ نامساوی (۵) تنها جواب بدیهی $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ را دارد. به ازای $t < b$ بنابه قضیه‌ی دیریکله نامساوی (۵) ریشه‌ای با مخرج q، $q \leq t < b$ را دارد. یعنی مخرج‌های تمام جواب‌های غیر بدیهی نامساوی (۵) به ازای tهای مختلف کران‌دار هستند. بنابر این به ازای αی گویا قضیه‌ی دیریکله اطّلاعاتی در مورد تقریب اعداد گویای با مخرج‌های کوچک‌تر می‌دهد.

اگر که α غیر گویا باشد آن‌گاه با افزایش t، مخرج‌های جواب نامساوی (۵) نیز افزایش پیدا می‌کنند.

در واقع به ازای هر عدد طبیعی N قرار می‌دهیم

$$C_N = \min\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,$$

جایی‌که می‌نیمم از مجموعه‌ی متناهی از اعداد گویای $\frac{p}{q}$ که روی بازه‌ی بسته‌ی $\alpha - 1 \leq x \leq \alpha + 1$ قرار دارند و مخرج‌های آنها بزرگ‌تر از N نیست گرفته می‌شود. پس اگر $t \geq \frac{1}{C_N}$، آن‌گاه هر جواب نامساوی (۵) دارای مخرج بزرگ‌تر از N می‌باشد.

بنابر این به ازای αی گنگ، مجموعه‌ی جواب در اعداد گویای $\frac{p}{q}$ نامساوی (۵) به ازای تمام مقادیر ممکن t، نامتناهی می‌باشد.

از نامساوی (۵)، چون $q \leq t$، نامساوی زیر را داریم

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \qquad (1\circ)$$

از مطالب اثبات شده در بالا نتیجه می‌شود که نامساوی (۱۰) به ازای αی گنگ جواب $\frac{p}{q}$ با مخرج‌های به اندازه‌ی دلخواه بزرگ دارد. بدین ترتیب حکم زیر به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲.۱ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ گنگ، نامساوی (۱۰) بی‌نهایت جواب در اعداد گویای $\frac{p}{q}$، $q > 0$ دارد.

بررسی جامع تر مطالب گفته شده در بالا را می‌توان در فصل ۴ کتاب [۱۴] مطالعه نمود.

بنابر این قضیه‌ی ۲.۱ را می‌توان هم‌چون اوّلین نتیجه‌ی کل در نظریه‌ی تقریب‌های دیوفانتی در نظر گرفت.

دو تعمیم طبیعی و کلّی از سوأل اصلی نظریه‌ی تقریب‌های دیوفانتی موجود است.

از یک طرف اعداد گویا را می‌توان هم‌چون اعداد جبری از درجه‌ی یک در نظر گرفت و سپس چنین پرسشی را بررسی کرد که به ازای عدد صحیح مثبت داده شده‌ی n، عدد α چه‌قدر خوب می‌تواند توسط عدد جبری از درجه‌ی حداکثر n تقریب گردد؟

کوچکی این تقریب توسط ارتفاع عدد جبری ξ اندازه گرفته می‌شود، جایی‌که ارتفاع عدد جبری ξ که با $h(\xi)$ نشان داده می‌شود عبارت است از ماکزیمم مدول ضرایب صحیح چندجمله‌ای می‌نیمم عدد ξ.

از طرف دیگر تفاضل $\alpha - \frac{p}{q}$ می‌تواند به شکل زیر در نظر گرفته شود

$$P(\alpha) = q\alpha - p,$$

جایی‌که در آن $P(x) = qx - p$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است.

بنابر این به ازای عدد صحیح مثبت داده شده‌ی n می‌توان چنین سوأل کرد.

چه‌قدر می‌توان $|P(\alpha)|$ را به ازای چندجمله‌ای‌های متمایز $P(x)$ با ضرایب صحیح و حداکثر از درجه‌ی n کوچک کرد؟

معمولاً کوچکی اندازه‌ی $|P(\alpha)|$ توسط ارتفاع چندجمله‌ای $P(x)$ که با $h(P)$ نشان داده می شود، معیّن می گردد که در آن $h(P)$ ارتفاع چندجمله‌ای $P(x)$ عبارت است از ماکزیمم

قدرمطلق ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح.

در سال ۱۹۳۲ ماهلر[۲] دسته‌بندی اعداد حقیقی (در واقع اعداد مختلط) را به چند کلاس با در نظر گرفتن پاسخ‌های مختلف به پرسش دوم انجام داد[۶].

در سال ۱۹۳۹ کوکسما[۳] دسته‌بندی مشابه‌ای را با در نظر گرفتن پاسخ‌های مختلف به پرسش اوّل به انجام رسانید[۴].

در هر دو حالت اعداد جبری تشکیل یکی از این کلاس‌ها را می‌دهند. فرض کنیم α عددی حقیقی و n عددی صحیح مثبت باشد، مطابق کارهای ماهلر $\omega_n(\alpha)$ را تعریف می‌کنیم هم‌چون سوپریمم عدد حقیقی ω که به ازای آن بی‌نهایت چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح و حداکثر از درجه‌ی n موجودند به‌طوری‌که در نامساوی زیر صدق می‌کنند

$$\circ < |P(\alpha)| \leq h(P)^{-\omega}$$

و مجموعه‌ی اعداد حقیقی را به چهار کلاس A، S، T و U بسته به رفتار دنباله‌ی $\{\omega_n(\alpha)\}_{n\geq 1}$ افراز می‌کنیم. به این موضوع در فصل ۳ پایان‌نامه خواهیم پرداخت.

مطابق کارهای کوکسما توسط $\omega_n^*(\alpha)$، سوپریمم عدد حقیقی ω^* که به ازای آن بی‌نهایت عدد حقیقی جبری ξ از درجه‌ی حداکثر n موجودند که در نامساوی زیر صدق می‌کنند

$$\circ < |\alpha - \xi| \leq h(\xi)^{-\omega^* - 1},$$

را تعریف می‌کنیم.

در واقع معلوم می‌شود که هر دو این دسته‌بندی‌ها یکی می‌باشند، بدین معنی که هر یک از چهار کلاس تعریف شده توسط ماهلر با یکی از چهار کلاس تعریف شده توسط کوکسما منطبق می‌گردد، با این‌که این دسته‌بندی‌ها دقیقاً هم‌ارز نمی‌باشند. زیرا عدد حقیقی α موجود است

---

[۲] Mahler

[۳] Koksma

به‌طوری که $\omega_n(\alpha)$ و $\omega_n^*(\alpha)$ به ازای هر عدد صحیح ۱ $\geq n$ متمایز می‌باشند.

موضوع مقایسه‌ی این دسته‌بندی‌ها مربوط به فصل ۴ پایان‌نامه می‌باشد.

پرسش این‌که عدد داده شده‌ی α برای مثال π، e، $\zeta(3)$، $\log 2$ و ... به کدام‌یک از کلاس‌ها تعلّق دارد خیلی دشوار و اغلب از مسایل باز می‌باشد. در فصل ۵ پایان‌نامه ثابت خواهیم کرد که عدد e یک $S-$ عدد از نوع یک می‌باشد.

فصل دوم پایان‌نامه اختصاص به تقریب اعداد جبری توسط اعداد گویا دارد، که در فصل‌های بعدی پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت. برای مطالعه‌ی جامع تر می‌توان به فصل ۴ کتاب [۱۴] مراجعه نمود.

فصل دوم

تقریب اعداد جبری توسط اعداد گویا و وجود اعداد متعالی

۱.۲ قضیه لیوویل و وجود اعداد متعالی

در سال ۱۸۴۴ ژوزف لیوویل[۱] ضمن مطالعه‌ی تقریب اعداد جبری توسط اعداد گویا نشان داد که اعداد جبری نمی‌توانند خیلی خوب با اعدادی از $\mathbb{Q}$ تقریب شوند. در قضیه‌ی اثبات شده به توسط او، برآوردی از مرتبه‌ی تقریب عدد جبری به توسط اعداد گویا وابسته به درجه‌ی عدد تقریب شده داده می‌شود.

از آن‌جایی که اعداد گنگی وجود دارند که به اندازه‌ی دلخواه خوب توسط اعداد گویا

---

[۱] J.Liouville