دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

کاربردDEA برای تولید وزن در AHP

عباس حقی

استاد راهنما :

جناب آقای دکتر سعید محرابیان

استاد مشاور :

جناب آقای دکتر مسعود خلیلی

مرداد ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

نام مرکز تهران شرق

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

کاربردDEA برای تولید وزن در AHP

عباس حقی

استاد راهنما :

جناب آقای دکتر سعید محرابیان

استاد مشاور :

جناب آقای دکتر مسعود خلیلی

مرداد ۹۱

اینجانب عباس حقی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و مآخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

عباس حقی

/ /

اینجانب عباس حقی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و .... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

عباس حقی

/ /

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

مرداد ۹۱

تقدیم به:

دو فرزند دلبندم مهرداد و مهرانگیز

که تمامی اوقات مصروف برای تدوین این پایان‌نامه به آن‌ها تعلق داشت.

به‌جاست بر دستان پدر بزرگوارم بوسه زده و بهترین سپاس‌ها را به او که همواره پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی بوده، تقدیم دارم.

با سپاسگزاری از :

استاد محترم جناب آقای دکتر سعید محرابیان که در کلیه مراحل تحقیق ، تدوین و تنظیم این پایان نامه ، از راهنمایی های بی دریغ شان بهره مند بودم و نیز صمیمانه ترین سپاس تقدیم به استاد گرانمایه ام جناب آقای دکتر مسعود خلیلی و همچنین استاد گرامی جناب‌آقای دکتر اسماعیل خرم که با دقت نظر بسیار فراوان و راهنمایی های کارگشا در تصحیح نهایی پایان نامه به عنوان داور ، نقش به سزایی داشتند و همچنین از زحمات بی دریغ استاد دلسوز و فرزانه سرکارخانم دکتر فهیمه سلطانیان مدیرگروه ریاضی دانشگاه کمال تشکر را دارم و از خدای متعال سلامتی این عزیزان و توفیق روز افزونشان را خواستارم .

چکیده

در این پایان‌نامه به شرح پنج روش زیر، برای تعیین وزن در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی خواهیم پرداخت.

(الف) روش DEAHP : این روش هر معیار یا گزینه تصمیم در ماتریس زوجی را به عنوان یک واحد فرض می‌کند به طوری که اعضای سطری ماتریس مقایسه زوجی را به عنوان خروجی واحد لحاظ می شود و تمامی واحد ها ورودی مجازی ثابت یک اختیار می‌کند. کارای نسبی هرواحد وزن نسبی آن واحد است. روش DEAHP دارای اشکالات اساسی می‌باشد که آن‌ها را تحلیل خواهیم کرد.

(ب) روش DEAHP اصلاح شده : اشکال اصلی DEAHP تولید بردارهای اولویت غیرمنطقی برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار است. برای برطرف کردن اشکالات DEAHP ، یک روش جدید به عنوان DEAHP اصلاح شده ارائه خواهد شد و نشان داده می‌شود این روش وزن‌های منطقی سازگار با قضاوت‌های تصمیم‌گیرنده تولید می‌کند و نسبت به تغییرات در داده‌های ماتریس‌های مقایسات زوجی حساس می‌باشد.

(پ) روشWang – chin: این روش کرانی برای وزن‌ها در نظر می‌گیرد و w_i های نرمال‌شده حاصل از مقدار کارائی DEAHP را در یک مدل کسری ماکزیمم می‌نماید و این مدل کسری را با بکار بردن تبدیلات چارنز و کوپر تبدیل به یک مدل خطی می‌کند.

(ت) روش DEA/AR : این روش با ساختن ناحیه اطمینان برای DEAHP وزن‌های بهتری تولید می‌کند. مدل DEA/AR بر تمام اشکالات DEAHP فایق می‌آید.

(ث) روش جدید: این روش جدید که یک روش برنامه‌ریزی خطی برای تولید کردن وزن‌ها در AHP نامیده می‌شود روشی است برای استخراج وزن‌های نسبی از یک ماتریس مقایسه زوجی یا در AHP گروهی به کار می‌رود. در این روش ما نیاز به حل فقط یک مدل برنامه ریزی خطی داریم و نیازی به نرمال کردن بردار وزن تولید شده نیست.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ، فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) ، تحلیل تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDA) ،تحلیل پوششی داده ها با تحلیل سلسله مراتبی DEAHP ،تحلیل پوششی داده ها با ناحیه اطمینان DEA/AR ، کارایی مناسب (FP) .

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[۱] برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده مشابه به کار می‌رود البته با فرض اینکه تمام ورودی و خروجی‌ها مساوی فرض شوند. روش DEA به شیوه‌های مختلفی الویت‌های تصمیم‌گیرنده (DM)[۲] را با هم تلفیق می‌کند. یکی از اهداف روش‌های DEA این است که اولویت‌های تصمیم‌گیرنده را برای به دست آوردن اهداف کاراتر یا برای رسیدن به رتبه‌های موثرتر به کار برد [۱۲].

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP)[۳] یک ابزار کمکی برای تحلیل تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDA)[۴] می‌باشد که کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف مثل کشاورزی [۶] ، دارویی و درمان، سلامتی [۱۰] و ... دارد. یکی از اهمیت‌های AHP استفاده آن برای تعیین وزن‌های نسبی از ماتریس مقایسه زوجی است. روش بردار ویژه (EM)[۵] یکی از روش‌های محاسبه وزن از ماتریس مقایسه زوجی است که توسط ساعتی [۱۸] ارائه شده است و از آنجائیکه توافق جامع بر برتری آن وجود ندارد لذا از کاربرد وسیعی برخوردار نیست. [۹,۵]

در این پایان‌نامه به شرح پنج روش DEAHP وDEAHP اصلاح شده و DEA/AR و Wang - Chin و روش جدید برای تعیین وزن‌ها در AHP می‌پردازیم.

- روش DEAHP هر معیار یا گزینه تصمیم در ماتریس مقایسه زوجی را به عنوان یک واحد در نظر می‌گیرد و برای تمامی واحد ها ورودی مجازی ثابت یک اختیار می‌کند و مدل CCR درماهیت ورودی [۴] را برای تمام واحد ها تشکیل می‌دهد. کارائی نسبی هر واحد وزن نسبی آن می‌باشد. DEAHP وزن‌های حقیقی برای ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار تولید می‌کند و در انتخاب عرضه‌کننده کاربرد دارد [۱۱].

---

۱. Data Envelopment Analysis

۲. Decision Maker

۳. Analytical Hierarchy Process

۴. Multiple Criteria Decision Analysis

۵. Eigenvector Method

از مزیت این روش هنگامی است که گزینه بی ربطی اضافه یا حذف شود رتبه بندی تغییر نمی کند در عین حال بعضی از اشکالات را هم دارد .

برای غلبه بر اشکالات DEAHP روش DEAHP اصلاح شده را ارائه خواهیم داد.

- در فصل پنجم روش Wang - Chin با ارئه کرانی برای وزن‌ها ارائه می‌گردد که این روش w_i های نرمال‌شده حاصل از مقدار کارائی DEAHP را در یک مدل کسری ماکزیمم می‌نماید و این مدل کسری را با بکار بردن تبدیلات چارنز و کوپر تبدیل به یک مدل خطی می‌کند این روش نیز برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار وزن‌های صحیح تولید می‌کند.
- روش DEAHP دارای اشکالات اساسی می‌باشد که برای غلبه بر این اشکالات روش DEA با ناحیه اطمینان برای تولید وزن در AHP پیشنهاد شده است. این روش با افزودن قید ناحیه اطمینان به مدل DEAHP ، وزن‌های نسبی بهتری تولید می‌کند و وزن‌های نسبی صحیح برای ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار تولید می‌کند. مدل جدید DEA/AR نامیده شده است.

شرط اصلی از روش‌های DEA گفته شده عملکرد جداگانه برنامه‌ریزی خطی برای هر واحد است. لذا برای به دست آوردن وزن‌های $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ نیاز به حل n مدل برنامه ریزی خطی خواهیم داشت که دارای مشکلات محاسباتی طولانی هستند.

در فصل ششم روشی برای استخراج وزن‌های نسبی از یک ماتریس مقایسه زوجی یا گروهی از آنها در AHP را ارائه خواهیم داد که در این روش مدل برنامه ریزی خطی فقط یک مرتبه حل می‌شود و نیازی به نرمالیزه کردن بردار وزن تولید شده نخواهد بود.

این پایان نامه به صورت زیر تدوین شده است:

در فصل اول به بیان تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) می‌پردازیم.

در فصل دوم فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) توضیح خواهیم داد.

و روش‌های محاسبه وزن در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی ارائه می‌شود. روش‌های حداقل مربعات و بردار ویژه در محاسبه وزن نسبی به اجمال بیان می‌شود و در ادامه الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس را می‌آوریم.

در فصل سوم روش DEAHP برای محاسبه وزن ماتریس مقایسه زوجی در AHP و اشکالات اساسی آن را بیان می‌کنیم و در ادامه اشکالات DEAHP را در یک مثال کاربردی نشان می‌دهیم.

در فصل چهارم روش DEAHP برای تولید وزن در AHP را بیان می‌کنیم و دو مثال عددی برای نشان دادن برتری DEAHP اصلاح شده نسبت DEAHP می‌آوریم.

در فصل پنجم روش Wang - Chin برای تعیین وزن‌ها در AHP با بکارگیری DEA ارائه می‌دهیم.

در فصل هفتم نگاهی اجمالی به روش DEA/AR برای تولید وزن در AHP را خواهیم داشت و در ادامه روش جدیدی برای تولید وزن در AHP ارائه می‌شود و این روش را با روش‌های DEAHP و DEA/AR و Wang - Chin و EM مقایسه خواهیم کرد.

در این پایان‌نامه از مقالات زیر استفاده شده است:

۱- R. Ramanathan, Data envelopment analysis for Weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process, computers operations Research ۳۳ (۲۰۰۶) ۱۲۸۹ – ۱۳۰۷.

۲- SM Mirhedayatian and R Farzipoor saen , A new approach for Weight derivation using data envelopment analysis in the analytic hierarchy process journal of the operations Research society (۲۰۱۱) ٦۲, ۱۵۸۵ – ۱۵۹۵.

۳-Ying – Ming Wang, Kwai – Sang chin, Gary Ka Kwai Poon, A data envelopment analysis Decision Support Systems ٤٥ (۲۰۰۸) ۹۱۳ – ۹۲۱.

٤-Ying – Ming Wang , Kwai – Sang chin , Gary Ka Kwai Poon , A data envelopment analysis method for priority determination and group Decision making in the analytic hierarchy process , European Journal of operations Research ۱۹۵ (۲۰۰۲) ۲۳۹ – ۲۵۰.

۵- seyed saeed hosseinian . hamidreza navidi . abas hajfataliha ,A new linear programming method for weights Generation and Group Decision Making in the Analytic Hierarchy Process,Group Decis Negot DoI ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۷۲٦/۰۰۹-۹۱۸۲-x

فهرست مطالب

۱ مقدمه ای تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ۱

۱-۱ مقدمه..... ۱

۱-۲ توضیح مختصری در مورد اصول حاکم بر DEA..... ۴

۱-۳ مجموعه امکان تولید ۴

۱-۴ مدلCCR در ماهیت ورودی ۶

۱-۵ مدل CCR در ماهیت خروجی ۹

۱-۶ نرم ها ۱۱

۱-۶-۱ نرم برداری ۱۱

۲ فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) ۱۳

۲-۱ مقدمه ۱۳

۲-۲ انواع حالت‌های تصمیم‌گیری..... ۱۳

۲-۳ اصول فرآیند تحلیل سلسله مراتبی..... ۱۴

۲-۴ مزایای فرآیند تحلیل سلسله مراتبی..... ۱۴

۲-۵ فرآیند تحلیل سلسله مراتبی در یک نگاه ۱۵

۲-۵-۱ ساختن سلسله مراتبی ۱۵

۲-۵ -۲ محاسبه وزن ۱۶

۲-۵-۳ محاسبه وزن نسبی سیستم‌ها از نظر سخت افزار ۱۸

۲-۵-۴ محاسبه سایر وزن‌های نسبی ۲۱
۲-۵-۵محاسبه وزن نهایی سیستم‌ها ۲۴
۲-۶ سازگاری سیستم ۲۵
۲-۷ محاسبه وزن در روش AHP ۲۸
۲-۸ روش‌های محاسبه وزن ۲۸
۲-۹ روش حداقل مربعات ۲۹
۲-۱۰ روش بردار ویژه ۳۱
۲-۱۰-۱ محاسبه وزن نسبی ۳۱
۲-۱۰-۲ محاسبه وزن نهایی ۳۳
۲-۱۱ محاسبه نرخ سازگاری ۳۴
۲-۱۲الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس ۳۸

۳ روش DEAHP برای تولید وزن در AHP و اشکالات آن ۴۲

۳-۱ مقدمه ۴۲
۳-۲ روش DEAHP ۴۲
۳-۲-۱ محاسبه وزن‌های نسبی با استفاده از DEAHP ۴۳
۳-۲-۲ محاسبه وزن های نهایی با استفاده از DEAHP ۴۳
۳-۳ اشکالات اساسی DEAHP ۴۶
۳-۳-۱ مثال کاربردی ۴۷

۴ روش DEAHP اصلاح شده برای تولید وزن در AHP ۵۲

۴-۱مقدمه ۵۲

۴-۲مدل DEAHP اصلاح شده AHP ۵۲
۴-۲-۱ محاسبه وزن نسبی..... ۵۳
۴-۲-۲ محاسبه وزن نهایی ۵۴
۵ روش دیگر از کاربرد DEA در AHP ۶۰
۵-۱ مقدمه ۶۰
۵-۲ محاسبه وزن نسبی ۶۱
۵-۳ مثال عددی ۶۵
۶ روش جدید برای تولید وزن در AHP ۶۸
۶-۱ مقدمه ۶۸
۶-۲مدل DEA\AR برای تولید وزن در AHP ۶۸
۶-۳-۱محاسبه وزن نسبی ۶۹
۶-۲-۱ مدل جدید ۷۲
۶-۴ مثال عددی ۷۶
۶-۵ نتیجه‌گیری ۸۲
پیوست ۱..... ۱
پیوست ۲ ..... ۲
پیوست۳..... ۳
پیوست ۴ ..... ۴
فهرست منابع..... ۵

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

علم تحقیق در عملیات (OR) از زمانهای خیلی دور مورد توجه دانشمندان و محققان بوده است. اما صاحب‌نظران علم OR بر این عقیده هستند که این علم در خلال جنگ جهانی دوم بنا شده است. بسیاری از مسائل استراتژیکی و تکنیکی جنگ به حدی پیچیده بودند که یک فرد یا گروه قادر به حل و تجزیه و تحلیل تمام مسائل نبود. در سال ۱۹۴۱ میلادی ارتش انگلستان به صورت رسمی، تصمیم‌گیری با روش‌های علمی را وارد سیستم برنامه‌ریزی خود نمود اما پس از آن با خاتمه جنگ، دانشمندان به کاربردهای این علم در علوم دیگر پی بردند و توانستند این علم را به فعالیتهایی همچون فعالیتهای اقتصادی، اجتماعی، سیاسی و تمام فعالیت‌هایی که به تصمیم‌گیری ارتباط دارند، گسترش دهند.

از جمله شاخه‌های علم تحقیق در عملیات شاخه برنامه‌ریزی خطی (LP)[۱] می‌باشد که به علت قابلیتهای بسیار بالای این مسائل، تحقیقات موثر و زیادی بر روی آن انجام گرفت و کاربردهای فراوانی پیدا نموده است.

کاربردهای برنامه‌ریزی خطی به گونه‌ای بوده که خود شامل چندین زیرشاخه گردیده است. یکی از این زیرشاخه ها علم تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[۲] می‌باشد که هدف آن استفاده از روشهای علمی به منظور ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU)[۳] می‌باشد.

اطلاع از عملکرد واحدهای تحت امر مدیر، مهمترین وظیفه مدیر در رابطه با واحدهای تصمیم‌گیرنده به منظور هدایت آنان است. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار عملکرد، اثرات عوامل

---

[۱] .Linear Programming
[۲] Data Envelopment Analysis
[۳] .Decision Maker Unit

بیرونی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب (مثلاً به علت دولتی بودن واحدها)، تغییرات ناگهانی خط مشی به علت برخوردهای انفعالی با مشکلات حاد مانند بیکاری و غیره از جمله عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدهای تحت امر مطلع شده و تصمیم‌گیری مناسبی را در جهت بهبود کارایی و بهره‌وری اتخاذ نماید.

تا قبل از سال ۱۹۸۷ تحقیقات زیادی برای محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده یک سیستم، صورت گرفته بود. منظور از سیستم، مجموعه‌ای است که واحدهای تحت ارزیابی از آن انتخاب می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان دانشگاه را به عنوان سیستم در نظر گرفت که واحدهای تصمیم‌گیرنده در آن دانشکده‌ها می‌باشند. عمده تحقیقات تا سال ۱۹۷۸ منجر به وجود آمدن روشهای پارامتری گردید. این روش‌ها اگرچه در برخی حالات خاص کارساز بودند، ولی دو مشکل عمده نظری و کاربردی، استفاده از آن‌ها در حالت کلی را غیرممکن می‌ساخت.

یکی از مهمترین مشکلات این روش‌ها این است که فقط برای واحدهای با یک خروجی می‌توان از آنها استفاده کرد و برای واحدهای با چند خروجی نمی‌توان از آنها استفاده نمود. مشکل دیگر روش‌های پارامتری این است که شکل تابع تولید (تابعی که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی‌ها به دست آورد) باید از قبل مشخص باشد که این ضعف بسیار بزرگی است زیرا محدودیت خاصی برای مسئله قائل می‌شود. همچنین روشهای مختلف جهت پیدا نمودن پارامترها، توابع مختلفی می‌دهد که تغییر دادن بهترین آنها ممکن نیست. از طرفی تمایل منحنی تابع تولید، به سمت مشاهدات انباشته شده است. مشاهدات پرت که ممکن است دقیق هم باشند، نقش زیادی در تعیین پارامترها ندارند. با توجه به مشکلات ذکر شده برای ارزیابی کارایی واحدها، بیشتر از روش غیرپارامتری استفاده می‌کنیم.

برای رفع مشکلات ذکر شده در سال ۱۹۵۷، فارل[۱] تحقیقات گسترده‌ای انجام داد. در واقع فارل اولین کسی بود که تخمین تابع تولید[۲] را به طریق غیرپارامتری به دست آورد.

---

۱. Farell
۲. Production Function

فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکارناپذیر حاکم بر علم تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید (PPS)[۱] ساخت و قسمتی از مرز آن را تابع تولید نامید.

هر واحد تصمیم‌گیرنده‌ای که روی این مرز قرار گیرد کارا بوده و در غیر این صورت غیرکارا تلقی می‌گردد. در سال ۱۹۷۸ چارنز، کوپر و رودز[۲]، بر پایه کارهای فارل روش خلاقانه‌ای ارائه دادند که به مدل (CCR) برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده معروف گردید که این مدل پایه و اساس تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد.

پس از معرفی مدل (CCR) مدلهای دیگری نظیر مدلهای BCC , RAM , SBM ، مدل جمعی FDH ، و غیره معرفی شدند.

مباحث DEA مطرح شده در این فصل بسیار مقدماتی و جزئی بوده و به مقدار نیاز این پایان‌نامه می‌باشد. برای آشنایی بیشتر با مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها مرجع [۱] مطالعه شود.

۱. Production Possibility Set
۲. Charnes , Cooper , Rhodes

۱-۲ توضیح مختصری در مورد اصول حاکم بر DEA

فرض کنید سیستم تحت ارزیابی شامل n واحد تصمیم‌گیرنده $\{DMU_j , j = ۱,...,n\}$ باشد. که هر DMU ، m ورودی[۱] $(x_{۱j} , ... , x_{mj}) = x_j$ را برای تولید s خروجی[۲] $(y_{۱j} , ... , y_{sj}) = y_j$ مصرف می‌نماید. در این پایان‌نامه فرض بر این است که تمامی ورودی‌ها و خروجی‌ها یک DMU نامنفی‌اند و هر DMU ، حداقل یک ورودی مثبت و یک خروجی مثبت دارد.

برخی از اصول حاکم بر DEA عبارتند از:

۱. متجانس بودن: در اغلب سیستم‌ها لازم است که مدیران و برنامه‌ریزان سیستم، عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده مشابه را با ورودی‌ها و خروجی‌ها متجانس مورد بررسی قرار دهند و کارایی آنها را با هم مقایسه کنند. به عنوان مثال یک بانک را نمی‌توان با یک دانشگاه مقایسه کرد، زیرا این دو واحد مشابه نیستند. واحدهای تحت ارزیابی باید فعالیت‌های مشابهی داشته باشند و در عین حال، خروجی‌های مشابهی را نیز تولید کنند.

۲. $n \geq \max\{m \times s, ۳(m+s)\}$: به تجربه ثابت شده است که اگر ورودی‌ها، خروجی‌ها و تعداد واحدها در رابطه $n \geq \max\{m \times s, ۳(m+s)\}$صدق کند، آنگاه نتایج قابل اطمینانی از تحلیل پوششی داده‌ها به دست می‌آید[۴] .

۳. ارزیابی DMUها در یک زمان: این اصل به ما می‌گوید که همه DMUها در یک زمان باید ارزیابی شوند. زیرا ممکن است با ارزیابی DMUها در زمانهای متفاوت، مقادیر کارایی به دست آمده به دور از واقعیت باشند.

۱-۳مجموعه‌ی امکان تولید

رابطه عملکرد یک سیستم با عوامل تاثیرگذار بر آن به صورت تابعی تعریف می‌شود که با تابع تولید معروف است.

$$Y=F(u,v)$$

[۱] . Input
[۲] . Output

در سیستم‌های چند ورودی و یک خروجی، تابع تولید، تابعی یک مقداری از دو بردار اثرگذار u , v می‌باشد که در آن u عوامل شناخته شده و v عوامل ناشناخته است. بردار u نیز می‌تواند از دو مولفه‌ی قابل کنترل و غیرقابل کنترل تشکیل گردد. در حالتی که F ، یک مقداری نباشد تابع تولید به صورت زیر خواهد بود:

$$(y_1 , \dots , y_s) = F(u,v) = (f_1(u,v) , \dots , f_s(u,v))$$

بردارهای u , v بردار $(y_1 , \dots , y_s)$ راتولید می‌کنند.

بردارهای u , v را بردار ورودی و $(y_1 , \dots , y_s)$ را بردار خروجی می‌نامند. واضح است که به دست آوردن صورت دقیق ریاضی فوق بسیار مشکل می‌باشد. به همین دلیل فارل با استفاده از مشاهدات و اصول زیر، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید ساخت، و قسمتی از مرز آن را تابع تولید نامید.

مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PPS = \{ (x , y) | \quad \text{بردار نامنفی x بتواند بردار نامنفی y را تولید کند} \}$$

تعریف فوق با توجه به تکنولوژی تولید، مجموعه‌ی امکان تولید را مشخص می‌کند.

در ادامه به معرفی ابتدایی‌ترین مجموعه امکان تولید می‌پردازیم. فرض‌کنیم اصول زیر، ساختن مجموعه امکان تولید پذیرفته شده است.

۱) اصول شمول مشاهدات: به ازای هر $j \in \{1,\dots,n\}$ داریم $(x_j , y_j) \in PPS$

۲) اصل بیکرانی اشعه: به ازای هر $(x , y) \in PPS$ و به ازای هر عدد ثابت $\lambda \geq 0$ داریم: $(\lambda x , \lambda y) \in PPS$ ، اصطلاحاً به این اصل، اصل بازده به مقیاس ثابت می‌گویند.

۳) امکان‌پذیری: اگر $(x , y) \in PPS$ و $\bar{x} \leq x$ و $\bar{y} \geq y$ آنگاه $(\bar{x} , \bar{y}) \in PPS$

۴) اصل تحدب: اگر $(x , y) \in PPS$ و $(\bar{x} , \bar{y}) \in PPS$ و $\lambda \in (0,1)$ آنگاه:

$$(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} , \lambda y + (1 - \lambda)\bar{y}) \in PPS$$

۵) اصل کمینه برونیابی مجموعه‌ی امکان تولید، کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول ۱ تا[۱] ۴ صدق می‌کند.

۱-۳-۱ قضیه. مجموعه منحصر به فردی که در اصول فوق صدق می‌کند به صورت زیر است:

$$T_c = \left\{(x\,,y)|x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j\,,\ y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j\,, \lambda\ \geq ۰, \mathrm{j}\ = ۱, \dots, \mathrm{n}\right\}$$

به مجموعه T_c مجموعه امکان تولید CCR می‌گویند و آن را با $\mathrm{P_{CCR}}$ نیز نمایش می‌دهند.

۱-۳-۲ تعریف. بردارهای $v_۱ = \binom{-x_۱}{y_۱}$ و $v_۲ = \binom{-x_۲}{y_۲}$ را در نظر بگیرید. بردار $\mathrm{v_۱}$ ، بردار $\mathrm{v_۲}$ را مغلوب می‌کند. اگر و تنها اگر $\binom{-x_۱}{y_۱} \leq \binom{-x_۲}{y_۲}$ و نامساوی حداقل در یک مولفه به شکل اکید باشد.

۱-۳-۳ تعریف. $\mathrm{DMU_p}$ را کارای نسبی گویند. اگر و تنها اگر هیچ امکان تولید $(x\,,y) \in PPS$ نتوان یافت که $\mathrm{DMU_p}$ را مغلوب کند.

۱-۳-۴ تعریف. $\mathrm{DMU_p}$ را کارای پاراتو – کوپمن[۲] نامند. اگر و فقط اگر امکان بهبود در هیچ یکی از ورودی‌ها و خروجی‌ها بدون بدتر شدن سایر ورودی‌ها یا خروجی‌ها وجود نداشته باشد.

۱-۴مدل CCR در ماهیت ورودی

اگر $\mathrm{DMU_p}$ ناکارا باشد، از روش‌های تصویر نمودن واحدهای تحت ارزیابی ($\mathrm{DMU_p}$) روی مرز کارایی استفاده می‌کنیم و کاهش متناسب در ورودی‌ها را مشاهده می‌نماییم. هدف ماهیت ورودی مدل CCR پیدا کردن DMU ای مجازی است که با حداقل ورودی ممکن بتواند خروجی $\mathrm{y_p}$ را تولید. بنابراین هدف، انقباض ورودی $\mathrm{x_p}$ به θx_p می‌باشد به طوری که بردار $(\theta x_p, y_p)$ روی مرز PPS قرار بگیرد. بنابراین مساله زیر را باید حل کنیم:

---

۱. این اصطلاح از دکتر غلامحسین مصاحب می باشد.

۲. Parato - Koopmans