بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

(گرایش نظریه احتمال)

عنوان :

نتایجی در قضیه حد مرکزی به طور قریب به یقین

از

محمد علی شکرالهی

استاد راهنما

دکتر علی ا صغر ورسه ای

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به همه کسانی که با گام برداشتن در راه دانش، آسایش را برای زندگی دیگران به

ارمغان می آورند.

تشکر و قدردانی

به درگاه کبریا و عظمت پروردگار، سپاس و ستایش می گزارم که ذات لایزال ازلی است و ازلیت بی ابتدایش لایزال و جاودان است.

الهی! حمد و ثنای بی پایان ما سزاوار تو است و این تویی که حمد و ثنای ازلی و ابدی را سزاواری.

اکنون که خدای بزرگ توفیق کسب دانش را به من داد، بر خود لازم می دانم از زحمات عزیزانی که همیشه در این راه، پشتیبان و همراه من بودند سپاسگزاری کنم.

از پدر و مادرم که همیشه مشوق من بودند ودعای خیرشان بدرقه راهم بوده وهست، سپاسگزاری می کنم. همچنین از اساتید گرامی ، دکتر ورسه ای که با علم واسع خود انگیزه ادامه ریاضیات را برای من فراهم کردند و دکتر صمیمی که با راهنمایی های خود این مسیر را برایم هموار کردند، سپاسگزاری می کنم و از خدای بزرگ برای این عزیزان تندرستی و توفیق روزافزون خواستارم.

چکیده

نتایجی در قضیه حد مرکزی، به طور قریب به یقین

محمد علی شکرالهی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی گوسین ایستای استاندارد باشند. اگر $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$، $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$، $\sigma_n = \sqrt{\mathrm{var}\,(S_n)}$ و $a_n > 0$، b_n بیانگر ثابت های به هنجار ساز باشند، هدف ما بررسی و مطالعه قضیه حد مرکزی به طور قریب به یقین برای دنباله $\{a_n(M_n - b_n), S_n/\sigma_n\}$ تحت شرایطی خاص روی تابع کواریانس $r_t = \mathrm{cov}(X_1, X_{1+t})$ است.

کلید واژه : جمع جزئی، دنباله‌های گوسین، قضیه حد مرکزی به طور قریب به یقین.

فهرست

مقدمه

قضیه حد مرکزی یکی از مهم‌ترین قضیه‌های نظریه احتمال و آمار است ودارای کاربرد های زیادی در علوم دیگر می باشد. با تلاش دانشمندان حالت‌های گوناگونی از این قضیه ارایه شده، که هر یک دارای کاربرد خاصی است.

قضیه حد مرکزی به طور قریب به یقین نوع دیگری از این قضیه است که بررسی آن در شرایط گوناگون از موضوعات مورد توجه بسیاری از احتمال دانان است.

این پایان‌نامه دارای سه فصل اصلی است. در فصل نخست، نکاتی از آنالیز حقیقی آورده شده است. در فصل دوم مطالبی از مبانی احتمال گنجانده شده است.

در ابتدای فصل سوم مطالبی تحت عنوان پیشنیاز فصل آورده شده است که به خواننده کمک زیادی برای درک مطالب بعدی می نماید.

در قسمت دوم فصل سوم قضیه حد مرکزی به طور قریب یقین برای حالت توام ماکزیما وجمع دنباله‌های گوسین ایستا، بیان و اثبات می شود.

همچنین برای اثبات این قضیه سه لم کمکی بیان و اثبات می شود که در اثبات قضیه اصلی کاربردهای زیادی دارند.

فصل ۱

نکاتی از آنالیز حقیقی

۱-۱ فضای اندازه

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد تعریف می کنیم

۱) $\mathcal{C}$ را یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های X (در X) می گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۲) $\mathcal{C}$ را یک نیم میدان می گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{C}$ باشند.

۳) $\mathcal{C}$ را یک σ- میدان می گوییم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

تعریف ۱-۱-۲: تابعی را که دامنه آن دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد، یک تابع مجموعه‌ای می نامیم.

تعریف ۱-۱-۳: فرض کنید $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، منظور از یک اندازه روی $\mathcal{C}$ (در $\mathcal{C}$) تابعی مانند μ با دامنه $\mathcal{C}$ است، چنان که برای هر $A \in \mathcal{C}$

$$0 \leq \mu(A) \leq \infty$$

و هرگاه $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد و $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{C}$ آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

ملاحظه ۱-۱-۱: فرض کنید $\mathcal{C}$ دسته‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد. کوچکترین (بر حسب رابطه شمول) σ- میدان شامل $\mathcal{C}$ از زیر مجموعه‌های X را σ- میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}$ می نامیم و با $\sigma(\mathcal{C})$ نشان می دهیم، توجه می کنیم که $\sigma(\mathcal{C})$ اشتراک تمام σ- میدان‌های شامل $\mathcal{C}$ است.

تعریف ۱-۱-۴: σ- میدان تولید شده توسط بازه‌ها در $\mathbb{R}$ را σ- میدان بورل[1] می گوییم و با نماد $\mathfrak{B}$ نشان می دهیم و هر عضو این σ- میدان را یک مجموعه بورل می گوییم.

تعریف ۱-۱-۵: فرض می کنیم $\mathcal{C}$ سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، δ- میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{C}$ باشد، اندازه μ را روی $\mathcal{C}$ «متناهی» گوییم، هرگاه برای هر A در $\mathcal{C}$، $\mu(A) < \infty$

1.borel

و «σ- متناهی» می گوییم، هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq 1\}$ از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد چنان که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$

تعریف ۱-۱-۶ (اندازه خارجی): فرض می کنیم $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که پوشش شمارش پذیری برای X داشته باشد و فرض می کنیم μ یک اندازه روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه دلخواه A از X اندازه خارجی به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu^*(A) = inf\left\{\sum_{i\geq 1}\mu(A_i) : \text{است } A \text{ برای} \mathcal{H} \text{ پوششی از اعضای دو به دو مجزای}; \{A_i, i \geq 1\}\right\}$$

ملاحظه ۱-۱-۲: با توجه به تعریف اندازه خارجی داریم

۱) برای هر $I \in \mathcal{H}$ ؛ $\mu^*(I) = \mu(I)$

۲) اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد آنگاه

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n)$$

زیر مجموعه A از X را نسبت به μ^* یا (μ) اندازه پذیر می گوییم اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$$

اگر A اندازه پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A)$$

قضیه ۱-۱-۱ (گسترش کاراتئودوری): اگر $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ یک اندازه $\sigma -$ متناهی در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه μ گسترش یگانه به یک اندازه روی σ- میدان تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در X دارد.

برهان: رجوع شود به [5].

تعریف ۱-۱-۷: اگر، $X = \mathbb{R}$ $(X = \mathbb{R}^k)$و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ی بازه‌ها (جعبه‌ها) باشد، μ اندازه طول (حجم) باشد، σ- میدان مجموعه‌های اندازه پذیر σ- میدان لبگ[1] نامیده می شود و μ^* روی σ- میدان لبگ اندازه لبگ نامیده می شود.

1. Lebesgue

ملاحظه ۱-۱-۳: σ- میدان لبگ شامل σ- میدان بورل است به طور خاص اندازه لبگ یگانه گسترش تابع طول بر σ- میدان بورل است.

تعریف ۱-۱-۸: منظور از یک فضای اندازه پذیر یک زوج $(X,\mathcal{A})$ متشکل از یک مجموعه مانند X و σ- میدان $\mathcal{A}$، از زیر مجموعه‌های X می باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک «مجموعه اندازه پذیر» می نامیم، منظور از یک «فضای اندازه» عبارت است از سه تایی $(X,\mathcal{A},\mu)$ که $(X,\mathcal{A})$ یک فضای اندازه پذیر و μ یک اندازه روی σ- میدان $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱-۱-۹: فرض می کنیم $(X,\mathcal{A})$ و $(Y,\mathcal{A}')$ فضاهای اندازه پذیر باشند. $f:X\to Y$ را اندازه پذیر (نسبت به $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$) می گویند اگر $f^{-1}(A')\in\mathcal{A}$ برای هر $A'\in\mathcal{A}'$.

ملاحظه ۱-۱-۴: فرض کنید X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند و $f:X\to Y$؛ اگر $\mathcal{A}$ یک σ - میدان روی X باشد، f به صورت طبیعی متناظر با $\mathcal{A}$، σ- میدان در Y القا می کند

$$\mathcal{A}' = \{A' \subseteq Y \ : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}'$ که بدین ترتیب تعریف می شود، بزرگ‌ترین (ظریف‌ترین) σ- میدان در Y است که f را اندازه پذیر می کند، همچنین اگر $\mathcal{A}'$ ، σ- میدان در Y باشد

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

یک σ- میدان در X است و کوچکترین (درشت‌ترین) σ- میدان در X است که f را اندازه پذیر می کند.

تعریف ۱-۱-۱۰: فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $(Y,\mathcal{A}')$ یک فضای اندازه پذیر و $f:X\to Y$ تابعی اندازه-پذیر باشد، بدین ترتیب به صورت طبیعی اندازه‌ای روی $\mathcal{A}'$ توسط μ و f القا می شود که اگر آن را ϑ بنامیم خواهیم داشت

$$\vartheta(A') = \mu\left(f^{-1}(A')\right) \qquad\qquad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

۱-۲ انتگرال نسبت به یک اندازه

تعریف ۱-۲-۱: اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σ- میدان $\mathcal{A}$ باشد تابع مشخصه‌ی مجموعه A را با عبارت χ_A یا I_A نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

تعریف۱-۲-۲: تابع ساده به تابعی با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی می گوییم که تعدادی متناهی مقدار داشته باشد.

ملاحظه ۱-۲-۱: فرض می کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_1,\dots,a_n$ باشد؛ می توان نوشت

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_iX_{A_i}$$

که در آن $A_i=\{x\in X:\varphi(x)=a_i\}$. روشن است که A_i ها مجزا هستند، اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم مجموعه‌های A_i اندازه پذیرند. (متعلق به $\mathcal{A}$ اند)

ملاحظه ۱-۲-۲: مجموع، تفاضل، حاصلضرب توابع ساده، ساده است. به شرط اینکه $\infty-\infty$ پدید نیاید.

ملاحظه ۱-۲-۳: مجموع توابع ساده حقیقی با دامنه مشترک یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$است.

تعریف ۱-۲-۳: انتگرال φ نسبت به اندازه μ به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_X\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)$$

تعریف ۱-۲-۴: گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه X تعریف شده است تقریبا مطمئن همه جا $(a.e.)$ (almost everywhere) برقرار است اگر وتنها اگر مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه‌ی صفر باشند.

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نا منفی باشد

$$\int_A fd\mu=sup\left\{\int\varphi d\mu:\varphi\leq f\,;\ \text{ساده و نامنفی است}\ \varphi\right\}$$

تعریف ۱-۲-۶: فرض می کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد و $x\in X$ را یک اتم می گوییم هرگاه $\{x\}\in\mathcal{A}$ و $\mu(\{x\})>0$، هم چنین $\mu(\{x\})$ را اندازه‌ی اتم x می نامیم.

تعریف ۱-۲-۷: فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد، μ را «پیوسته» می گوییم هرگاه فاقد اتم باشد.

تعریف۱-۲-۸: اگر $(X,\mathcal{A})$ یک فضای اندازه پذیر باشد μ و $\mathcal{V}$ اندازه‌های روی آن باشند، اندازه $\mathcal{V}$ را نسبت به μ مطلقاً پیوسته می گوییم و با نماد $\mathcal{V} \ll \mu$ نشان می دهیم، اگر برای هر مجموعه اندازه پذیر A از σ- میدان $\mathcal{A}$، به طوری که $\mu(A) = 0$ داشته باشیم، $\mathcal{V}(A) = 0$.

قضیه۱-۲-۱ (رادون نیکودیم): فرض کنید μ و $\mathcal{V}$ اندازه‌هایی روی فضای $(X\,,\mathcal{A})$ باشد چنان که $\mathcal{V} \ll \mu$ در این صورت یک تابع نامنفی و اندازه پذیر نسبت به $\mathcal{A}$ مانند f روی X وجود دارد به طوری که برای هر $A \in \mathcal{A}$ داریم

$$\mathcal{V}(A) = \int_A f d\mu$$

تابع f یکتا است به این معنی که اگر تابع g تابع اندازه پذیر دیگری با این خاصیت باشد آنگاه

$$\mu\,(f \neq g) = 0$$

تابع f را به صورت $\frac{d\mathcal{V}}{d\mu}$ نشان داده و آن را مشتق رادون نیکودیم[1] $\mathcal{V}$ نسبت به μ می گوییم.

برهان: رجوع شود به [2].

لم فتو ۱-۲-۲: (Fatou’s Lemma): اگر f_n، $n \geq 1$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی باشد؛ آنگاه

$$\int \lim_{n\to\infty} inf\, f_n \leq \lim_{n\to\infty} inf \int f_n$$

برهان: رجوع شود به [4].

قضیه همگرایی یکنوا ۱-۲-۳: (Monotone Convergence Theorem)

اگر $\{f_n \;,\; n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از تابع‌های اندازه پذیر نامنفی باشد و f تابعی حقیقی باشد به طوری که $f_n \uparrow f$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n$$

«به بیان ساده حد انتگرال برابر با انتگرال حد است»

برهان: رجوع شود به [5].

1.Radon Nikodyom

قضیه همگرایی تسلطی ۱-۲-۴: (Dominated Convergence Theorem)

فرض می کنیم $f_1, f_2, \ldots$دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر و g تابعی نامنفی و انتگرال پذیر روی فضای اندازه‌ای $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد، چنان که به ازای هر $n \geq 1$، $|f_n| \leq g$ و $f_n \to f$ آنگاه f و f_n انتگرال پذیرند و

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

برهان : رجوع شود به [5].

قضیه همگرایی کراندار ۱-۲-۵: (Bounded convergence theorem)

فرض می کنیم f_n دنباله‌ای از تابع‌های اندازه پذیر باشد و $0 < c \in \mathbb{R}$ و $|f_n| \leq c$، اگر $\mu(X) < \infty$ و $f_n \to f$ آنگاه f_n ها و f انتگرال پذیرند و

$$\int f_n \to \int f$$

برهان: رجوع شود به [5].

قضیه۱-۲-۶: فرض کنید f، تابعی اندازه پذیر و نامنفی روی X باشد و $A_1, A_2, \ldots$دنباله‌ای از اعضا دو به دو مجزای A باشد، با فرض $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu$$

برهان: رجوع شود به [5].

قضیه۱-۲-۷: اگر f تابعی اندازه پذیر و نامنفی روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد؛ در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad a.e. \qquad \forall A \epsilon \mathcal{A}$$

برهان: رجوع شود به [5].

فصل ۲

فصل ۲

مبانی احتمال

۲-۱ تعریف احتمال

احتمال را می توان به صورت‌های مختلفی تعریف کرد به طوری که در آن تعریف صدق کند. اکنون به تعریف «احتمال» یک پیشامد می پردازیم، احتمال یک پیشامد در حقیقت مقدار شانس رخ دادن آن پیشامد می باشد که در مقیاس $[0\,,1]$ اندازه گیری می شود، احتمال یک پیشامد را می توان به چند صورت مختلف تعریف کرد که چهار تا ازاین تعاریف دارای اهمیت زیادی هستند:

۱- تعریف احتمال منطقی (کلاسیک)
۲- تعریف احتمال فراوانی نسبی
۳- تعریف احتمال ذهنی (شخصی)
۴- تعریف احتمال پیشرفته

احتمال به روش کلاسیک: این تعریف از احتمال که از تعاریف دیگر احتمال قدیمی تر است از ابتدای کاربرد علم احتمال در قرن هفدهم مطرح و به وسیله ریاضی دان فرانسوی لاپلاس[1] در قرن نوزدهم تدوین شد. فرض اساسی این تعریف مبتنی بر هم شانس دانستن پیشامدهای مقدماتی است، احتمال یک پیشامد با این فرض نسبت تعداد حالت‌های مساعد پیشامد به تعداد کل حالت‌های ممکن آزمایش است. پذیرفتن فرض هم شانس بودن پیشامدهای مقدماتی در بسیاری از موارد درست نیست، اما هنوز حل بیشتر مسائل احتمال با توجه به این تعریف انجام می شود.

فرض کنید فضای نمونه Ω، متناهی و به صورت $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ باشد، در این صورت احتمال پیشامدی مانند A به صورت

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

تعریف می شود. با توجه به حالت خاص فرض مساوی بودن احتمال ω_i ها

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامدهای مقدماتی } A}{\text{تعداد کل اعضای فضای نمونه}}$$

احتمال به روش فروانی نسبی: احتمال یک پیشامد را می توان نسبت تکرار رخ دادن یک پیشامد نسبت به تعداد تکرارهای انجام شده در یک آزمایش دانست. با این تعریف که بر نظریه تجربی استوار است، فرض هم شانس بودن پیشامدهای مقدماتی

1. Laplace

ضروری نخواهد بود. اگر تعداد تکرارها به سمت بی نهایت میل کند نسبت تعداد تکرارهای پیشامد A به تعداد کل تکرارها به احتمال رخ دادن A همگرا خواهد بود.

یک ایراد اساسی این تعریف برای نسبت دادن احتمال به پیشامدها در آزمایش های بدون تکرار و یا آزمایش‌های با تکرار کم است.

احتمال ذهنی: برخی از دانشمندان احتمال را (شخصی) ذهنی می دانند، به اعتقاد آنان آنچه به عنوان احتمال یک پیشامد بیان می شود، تنها استنتاجات شخص بیان کننده است، به عبارت دیگر احتمال به خاصیت یک پدیده مربوط نمی شود، بلکه به دیدگاه فرد مربوط است.

بیشترین ایرادی که به این تعریف می توان داشت، یکسان نبودن مقدار احتمال یک پیشامد به وسیله افراد مختلف است. چون برای یک پدیده معین افراد استنتاجات مختلفی دارند و نمی توان دیدگاه‌های مختلف را با هم مقایسه کرد.

احتمال پیشرفته: احتمال پیشرفته بر پایه نظریه اندازه پایه گذاری شده است، در ادامه به آن و تعاریف آن خواهیم پرداخت.

تعریف۲-۱-۱: مجموعه همه‌ی برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می گویند و معمولاً با Ω نشان می دهند.

تعریف:۲-۱-۲: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک σ- میدان روی Ω باشد در این صورت هر عضو $\mathcal{A}$ را یک پیشامد می نامیم، اگر زیرمجموعه تک عضوی باشد، به آن پیشامد ساده و در غیر اینصورت پیشامد مرکب می گوییم و زوج $(\Omega, \mathcal{A})$ را فضای پیشامد می نامیم.

تعریف۲-۱-۳: فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای پیشامد باشد، تابع مجموعه‌ای P، تابع احتمال گفته می شود، اگر دارای سه شرط زیر باشد

۱- برای هر پیشامد مانند $A \in \mathcal{A}$، $P(A) \geq 0$

۲- $P(\Omega) = 1$

۳- برای هر دنباله از پیشامدها مانند$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$؛ دو به دو مجزا، یعنی $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ، $i \neq j$ داریم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

تعریف۲-۱-۴: یک فضای احتمال عبارت است از فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = 1$.

ملاحظه ۲-۱-۱: فضای احتمال یک فضای اندازه خاص است.

قضیه۲-۱-۱: اگر $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ باشند، در این صورت

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

برهان: رجوع شود به [3].

قضیه۲-۱-۲: اگر$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ باشد، در این صورت

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

برهان: رجوع شود به [3].

۲-۲ احتمال شرطی

تعریف ۲-۲-۱: فرض کنید A و B دو پیشامد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشد، احتمال پیشامد A به شرط B، احتمال رخ دادن A است اگر پیشامد B رخ داده باشد و به صورت زیر تعریف می شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad ; \quad P(B) > 0$$

اگر $P(B) = 0$ احتمال شرطی تعریف نمی شود.

قضیه ۲-۲-۱: فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال و $B \in \mathcal{A}$ و $P(B) > 0$ اگر قرار دهیم $P_B\,(\,.\,) = P(.\,|\,B)$ آنگاه $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ یک فضای احتمال است.

برهان: رجوع شود به [3]

۲-۳ متغیر تصادفی

تعریف ۲-۳-۱: فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضای احتمال یک آزمایش باشند، تابع $X: \Omega \to \mathbb{R}$ را متغیر تصادفی نسبت به σ- میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های Ω گوییم، هرگاه به ازای هر مجموعه بورل B از δ- میدان $\mathcal{B}$ داشته باشیم

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

به عبارت دیگر متغیر تصادفی تابعی است که تصویر معکوس هر مجموعه بورل توسط آن پیشامد است، معمولاً $X^{-1}(B)$ را به صورت $X \in B$ نیز نشان می دهند.

قضیه ۲-۳-۱: اگر X یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ و اگر a و b اعداد ثابت در $\mathbb{R}$ باشند، $Y = aX + b$ یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ خواهد بود.

برهان: رجوع شود به [3].

تعریف ۲-۳-۲ (متغیر تصادفی نشانگر): تابع نشانگر به صورت $X_A(\omega) = I_A(\omega)$ تعریف می شود

$$X_A(\omega) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in \Omega - A \end{cases}$$