وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (گرایش جبر)

درجه جابجایی گروه‌های متناهی

توسط:
زهرا غریب‌بلوکی

استاد راهنما:
دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:
دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

درجه جابجایی گروه‌های متناهی

توسط:

زهرا غریب‌بلوکی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محسن پرویزی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نمایندە تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

عاشقانه‌ترین ترانه‌های سروده شده،

دلنشین‌ترین موسیقی‌های نواخته شده،

و زیباترین نقش‌های نگاشته شده‌ی زندگیم

پدرم و مادرم،

و همه‌ی آنان که با تمام وجودم دوستشان دارم.

یگانه پروردگار همه هستی من!

ای آنکه بی خواست تو وجودم را موجود نمی شاید، با زبانی قاصر می گویم:

تو را سپاس، به پاس همه ی آنچه که به من دادی و هیچ نخواستی مگر شکر و بندگی. یاریم کن تا دانش اندکم، نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرورم و نه ابزاری برای تجارت، که گامی مقتدر و استوار باشد در جهت نمایش بزرگیت، ای بزرگ بی شریک.

اکنون که به لطف پروردگار موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر راهنمایم نموده اند، تشکر نمایم.

در ابتدا بر خود واجب می دانم از **خانواده عزیزم** تشکر کنم که همواره و در تمامی مراحل زندگی پشتیبانم بودند و یاریم نمودند.

مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را پیشکش استاد فرزانه و گرانقدرم **جناب آقای دکتر پیمان نیرومند** می کنم که در مدت کوتاهی که افتخار شاگردیشان را داشتم بزرگترین درس زندگیم را که همانا اندیشیدن است از ایشان آموختم. به این امید که شاگردی شایسته برایشان بوده باشم.

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی ثالث که مسئولیت مشاوره این پایان نامه را بر دوش کشیدند کمال تشکر را دارم.

همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محسن پرویزی و جناب آقای دکتر عبدالعلی بصیری که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم.

و در نهایت از دوستان عزیزم سپاسگزارم که در خوشی ها و ناخوشی های این دو سال همواره همراهم بودند و سختی های این دو سال را برایم هموار نمودند.

خدایا تو را سپاس که برایم یارانی چنین نیکو قرار دادی.

زهرا غریب بلوکی

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

درجه جابجایی گروه‌های متناهی

به وسیله‌ی:

زهرا غریب‌بلوکی

در این پایان‌نامه، مفهوم درجه جابجایی $d(G)$ از یک گروه متناهی، احتمال آنکه دو عنصر به طور تصادفی انتخاب شده از گروه G جابجا شوند، معرفی شده است. بعلاوه تمام گروه‌های متناهی G با $d(G) \geq \frac{1}{2}$ در حد یکریختی، مشخص شده‌اند. سرانجام، برخی کران‌های پایین برای $d(G)$ ارائه شده و گروه‌های با درجه جابجایی معین، مشخص شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: گروه‌های متناهی، درجه جابجایی، $p-$گروه بسیار ویژه، سرشت‌های یک گروه.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ه

پیشگفتار ۱

۱ پیش‌نیازها ۵

۱-۱ معرفی برخی نمادگذاری‌ها ۶

۱-۲ رده‌های مزدوجی و مرکزسازها ۷

۱-۳ عدد رده‌ای و معادله رده‌ای ۸

۱-۴ نرمالسازها ۹

۱-۵ $p-$گروه‌های متناهی ۹

۱-۶ زیرگروه‌های سیلو ۱۰

۱-۷ نمایش‌ها و سرشت‌ها ۱۱

۲ درجه جابجایی گروه‌های متناهی ۲۲

۲-۱ درجه جابجایی ۲۳

۲-۲ نتایج مقدماتی روی $d(G)$ ۲۴

۲-۳ مثال ۳۳

۳ توسیع‌های مرکزی و درجه جابجایی ۳۵

۳-۱ مقدمات . . . ۳۶

۳-۲ نتیجه‌ای روی گروه‌های آبلی . . . ۳۹

۳-۳ توسیع‌های مرکزی گروه‌های ناآبلی از مرتبه pq . . . ۴۲

۳-۴ ایزوکلینیسم‌های بین گروه‌ها . . . ۴۸

۳-۵ حالت $d(G) \geq \frac{1}{2}$ . . . ۵۶

۳-۶ قضیه اصلی . . . ۶۱

۴ کران پایین برای درجه جابجایی ۶۶

۴-۱ مقدمه . . . ۶۷

۴-۲ قضایای اصلی . . . ۶۷

۴-۳ مشخص سازی برخی گروه‌های پوچتوان . . . ۷۴

پیوست گروه‌های چهارگانی و دو وجهی ۷۹

مراجع ۸۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۰

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۳

پیشگفتار

در چند دهه اخیر نظریه احتمالی گروه‌ها توسط ریاضی‌دانان مورد توجه خاصی قرار گرفته است. آنها سعی کرده‌اند با تعریف یک احتمال مناسب در یک موضوع خاص، نتایجی را بدست بیاورند که در اثبات قضایای مختلف موضوع مربوطه به آنها کمک نماید. با آنکه قبل از دهه ششم قرن بیستم در مواردی برخی ریاضی‌دانان احتمال را در نظریه گروه‌ها به کار گرفته بودند اما از سال ۱۹۶۵ به بعد اردوش [۱] همراه با رنی [۲] [۷] ، تران [۳] [۸، ۹، ۱۰، ۱۱] و هال [۴] [۵، ۶] به طور جدی بحث نظریه احتمالی گروه‌ها را پیگیری کردند و توانستند مسائل آماری و احتمالی را در ارتباط با نظریه گروه‌ها مطرح کنند.

یکی از احتمالاتی که برای گروه‌ها توسط میلر [۵] [۳۰] در سال ۱۹۴۴ معرفی شد احتمال جابجایی دو عنصر در یک گروه متناهی بود. او برای یک گروه متناهی مانند G، تعداد جفت‌های مرتبی را در $G \times G$ در نظر گرفت که با هم جابجا می‌شدند. سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه گروه

[۱] Erdös

[۲] Rényi

[۳] Turàn

[۴] Hall

[۵] Miller

G تقسیم کرد و عدد حاصل را، $d(G)$ درجه جابجایی گروه G نامید. در سال ۱۹۷۳ گاستافسون [۶] [۱۸] با ارائه یک فرمول توانست ارتباطی بین احتمال معرفی شده و تعداد کلاس‌های مزدوجی گروه برقرار کند. او نشان داد که درجه جابجایی یک گروه برابر با حاصل تقسیم تعداد کلاس‌های مزدوجی آن گروه بر مرتبه گروه است. بنابراین هر اطلاعاتی که درباره کلاس‌های مزدوجی بدست آمده باشد می‌تواند در اینجا نیز به کار گرفته شود. به عنوان مثال اردوش و تران در [۱۱] و نیومن در [۳۳] به طور مستقل نشان دادند که تعداد کلاس‌های مزدوجی G حداقل $log_۲log_۲|G|$ می‌باشد. حال با تقسیم این عدد بر مرتبه گروه یک کران پایین برای درجه جابجایی گروه G حاصل می‌شود. بنابراین نتایجی که درباره کلاس‌های مزدوجی در [۲]، [۱۴]، [۱۶] و ... بدست آمده‌اند قابل استفاده در درجه جابجایی می‌باشند.

یکی از قدیمی‌ترین نتایجی که برای درجه جابجایی گروه‌ها بدست آمده است، کران بالای $\frac{۵}{۸}$ برای درجه جابجایی گروه‌های غیر آبلی می‌باشد که توسط گاستافسون [۱۸] ارائه گردید و با توجه به اینکه یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸، این کران را می‌گیرد بنابراین به نظر می‌رسد که این کران بالا یک کران دقیق است. همچنین او با استفاده از اندازه هار[۷] توانست درجه جابجایی را برای گروه‌های فشرده تعریف کند و کران بالای فوق را برای آن بدست آورد. در حقیقت او با این کار اولین قدم را برای تعریف درجه جابجایی گروه‌های نامتناهی برداشت. در سال ۱۹۷۹ دیوید جی. روسین [۸] [۳۷] ضمن بدست آوردن نتایج جدیدی برای درجه جابجایی، توانست یک فرمول دقیق برای محاسبه این احتمال برای $p-$گروه‌های پوچتوان حداکثر از کلاس ۲ بدست آورد.

یکی از افرادی که بیشترین کار را روی درجه جابجایی انجام داده است، پائول لسکات [۹] [۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹] می‌باشد. او با استفاده از مفهوم ایزوکلینیسم گروه‌ها و ارتباط آن با درجه جابجایی توانست گروه‌هایی که درجه جابجایی آنها حداقل $\frac{۱}{۲}$ بود را رده بندی کند. او نشان داد که اگر گروهی درجه جابجایی $\frac{۱}{۲}$ را اختیار کند باید با گروه متقارن $S_۳$ ایزوکلینیک باشد و گروه‌های با درجه جابجایی

[۶] Gustafson

[۷] Haar measure

[۸] David J. Rusin

[۹] Paul Lescot

بزرگتر از $\frac{1}{2}$ گروه‌های پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ هستند. از دیگر نتایج حاصل شده توسط لسکات بدست آوردن یک ارتباط بین درجه جابجایی و گروه‌های ۳-بازنویس [10] بود [۲۸]. او نشان داد که یک گروه دارای درجه جابجایی بیشتر از $\frac{1}{2}$ است اگر و فقط اگر ۳-بازنویس باشد. لسکات همچنین درجه جابجایی گروه‌ها را تعمیم داد و درجه جابجایی مضاعف ($n-$امین درجه جابجایی) را تعریف کرد، در این تعریف تعداد مجموعه $n+1-$تایی‌های مرتبی که مولفه‌های آنها دو به دو با هم جابجا می‌شوند بر توان $n+1-$ام مرتبه گروه G تقسیم می‌شود تا این احتمال حاصل گردد.

در سال ۲۰۰۵ مقدم، سالمکار و چیتی [۳۱] تعمیم دیگری از درجه جابجایی را معرفی کردند. در این تعریف که به $n-$امین درجه پوچتوانی معروف شد، مجموعه تمام $n+1-$تایی‌های مرتبی را در نظر گرفتند که جابجاگر $n+1-$تایی آنها برابر با عنصر همانی گروه می‌شد سپس تعداد اعضای مجموعه حاصل را بر توان $n+1-$ام مرتبه گروه تقسیم کردند. آنها توانستند با استفاده از تعریف جدید برخی از قضایای درجه جابجایی را تعمیم داده و نتایج جدید دیگری را برای گروه‌های $CN-$گروه (گروه‌هایی که مرکزساز هر عنصر آن نرمال است) ارائه دهند.

در سال ۲۰۰۷ عرفانیان، لسکات و رضائی [۱۳] مفهوم درجه جابجایی نسبی را برای یک زوج از گروه متناهی و زیرگروه نرمالش تعریف کردند. این تعریف در حقیقت درجه جابجایی گروه‌ها را تعمیم می‌دهد. ارائه کران بالا و تعمیم قضایای درجه جابجایی با استفاده از تعریف جدید نتایجی بود که توسط آنها صورت گرفت. همچنین مؤلفین در [۱۳] توانستند ضمن تعریف $n-$امین درجه پوچتوانی نسبی که در حالت خاص درجه پوچتوانی را بدست می‌داد، شرط قوی $CN-$گروه را از قضایای $n-$امین درجه پوچتوانی حذف کرده و آن قضایا را بدون این شرط اثبات کنند.

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است. در فصل اول که با عنوان پیش نیازها مطرح شده، به بیان قضایا و تعاریفی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد نیاز است.
در فصل دوم که با عنوان درجه جابجایی گروه‌های متناهی مطرح شده است، مفهوم درجه جابجایی و برخی قضایای مقدماتی که از درجه جابجایی گروه‌های متناهی ارائه شده بود بیان می‌شود.
فصل سوم آن که تحت عنوان توسیع‌های مرکزی و درجه جابجایی بیان شده است، مقاله‌های [۲۸] و

[10] برای اطلاعات بیشتر به [۳۸] رجوع شود.

[۲۹] از لسکات را که به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۵ و ۲۰۰۱ ارائه کرد، مورد بررسی قرار می‌دهد. در این فصل ضمن بیان نتیجه‌ای روی گروه‌های آبلی و بررسی توسیع‌های مرکزی گروه‌های نا آبلی از مرتبه pq، مفهوم ایزوکلینیسم‌های بین گروه‌ها معرفی و پس از آن گروه‌هایی که درجه جابجایی آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ است، در حد یکریختی، مشخص می‌شود و در نهایت قضیه اصلی این فصل بیان و اثبات می‌شود.

در فصل چهارم، تحت عنوان کران پایین برای درجه جابجایی، ابتدا کرانی پایین برای درجه جابجایی گروه‌های متناهی ارائه و پس از آن قضایایی در جهت مشخص سازی برخی گروه‌های پوچتوان بیان می‌شود. این فصل، به بررسی مقاله نس و دس [۱۱] [۳۲] که در سال ۲۰۱۰ ارائه کردند، می‌پردازد.

و در نهایت، فصل آخر این پایان‌نامه تحت عنوان گروه‌های چهارگانی و دو وجهی، به معرفی این گروه‌ها و محاسبه درجه جابجایی آنها تعلق دارد.

[۱۱] Nath and Das

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. این فصل شامل هفت بخش است. بخش اول با عنوان معرفی برخی نماگذاری‌ها، نمادهایی که در طول این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را معرفی می‌کند. در بخش دوم، رده‌های مزدوجی و مرکزسازها و دربخش سوم، عدد رده‌ای و معادله رده‌ای را معرفی می‌کنیم. در بخش چهارم، نرمالسازها و در بخش پنجم وششم، به ترتیب، $p-$گروه‌های متناهی و زیرگروه‌های سیلو را معرفی می‌کنیم. و در نهایت در بخش هفتم، به معرفی مقدماتی از نظریه نمایش و نظریه سرشت گروه‌ها می‌پردازیم.

۱-۱ معرفی برخی نمادگذاری‌ها

در این بخش به معرفی نمادهایی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم و در فصول بعدی صرفاً از این نمادها استفاده خواهیم کرد.

$C_G(g)$: مرکزساز عنصر $g \in G$

$Cl_G(g)$: رده (کلاس) مزدوجی عنصر $g \in G$

$k(G)$: تعداد رده‌های مزدوجی G

$o(g)$: مرتبه عنصر g

$Z(G)$: مرکز گروه G

G': زیرگروه مشتق G

$K_۴$: چهارگروه کلاین

G_p: مجموعه تمام $x \in G$ به طوری که مرتبه x توانی از عدد اول p باشد.

$G_{p'}$: مجموعه تمام $x \in G$ به طوری که مرتبه x نسبت به p اول باشد.

$Irr(G)$: مجموعه تمام سرشت‌های مختلط تحویل‌ناپذیر گروه G.

$D_۸$: گروه دو وجهی[۱] از مرتبه ۸

$Q_۸$: گروه چهارگان[۲] از مرتبه ۸

$E_۱$: گروه از مرتبه $p^۳$ با نمای p

$$E_۱ = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = ۱, [a, c] = [b, c] = ۱, [a, b] = c \rangle$$

[۱]Dihedral group

[۲]Quaternion group

$E_۲$: گروه از مرتبه $p^۳$ با نمای $p^۲$

$$E_۲=\langle a,b,c \mid a^{p^۲}=b^p=۱, c^p=a^p, [a,b]=a^p, [a,c]=b, [b,c]=۱\rangle$$

۱-۲ رده‌های مزدوجی و مرکزسازها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $x\in G$، در این صورت رده مزدوجی x در G را با $Cl_G(x)$، نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} Cl_G(x) &= \{\ g\in G \mid g=x^y\ \ ;\ \ y\in G\ \} \\ &= \{\ x^y=yxy^{-۱} \mid\ y\in G\ \}. \end{aligned}$$

گزاره ۲.۲.۱. *رده‌های مزدوجی دارای خواص زیر می‌باشند*

الف) *هر عنصر در رده مزدوجی خود قرار دارد.*

ب) *اگر* $x\in Cl_G(y)$، *آنگاه* $Cl_G(x)=Cl_G(y)$.

ج) $Cl_G(x)\cap Cl_G(y)=\emptyset$ *یا* $Cl_G(x)=Cl_G(y)$.

د) *مجموعه* $\{Cl_G(x)\mid x\in G\}$ *یک افراز برای گروه* G *می‌باشد.*

اثبات. از آنجایی که رابطه تزویج یک رابطه هم‌ارزی است به سادگی نتیجه می‌شود. □

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید G گروهی متناهی باشد و $x\in G$، در این صورت مرکزساز x در G را با $C_G(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_G(x)=\{\ y\in G \mid yx=xy\ \}.$$

گزاره ۴.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، در این صورت*

$$Z(G)=\bigcap_{x\in G} C_G(x).$$

اثبات. با توجه به تعریف به سادگی اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $x \in G$، در این صورت تعداد عناصر رده مزدوجی x در G برابر است با* $[G : C_G(x)]$.

اثبات. به صفحه ۸۹ از [۲۱] مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۶.۲.۱. *مجموعه* $\{x\}$ *یک رده مزدوجی است اگر و تنها اگر* $x \in Z(G)$.

۱-۳ عدد رده‌ای و معادله رده‌ای

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G گروهی متناهی باشد. تعداد رده‌های مزدوجی متمایز G را عدد رده‌ای [۳] گروه G می‌گوییم و آن را با $k(G)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۲.۳.۱. فرض کنید $k(G) = h$، و $x_1, \dots, x_h$ نماینده‌های رده‌های مزدوجی متمایز G باشند، همچنین فرض کنید برای هر i که $i = 1, \dots, h$ مرتبه $C_G(x_i)$ برابر n_i باشد، در این صورت $n_i = [G : C_G(x_i)]$. همچنین با توجه به قسمت (د) گزاره (۲.۲.۱) داریم

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} |Cl_G(x_i)| = \sum_{i=1}^{h} n_i = \sum_{i=1}^{h} [G : C_G(x_i)]$$

که به آن معادله رده‌ای [۴] گفته می‌شود. بعلاوه برای هر i که $i = 1, \dots, h$، $n_i \Big| [G : Z(G)]$ (زیرا همان‌طور که می‌دانیم $Z(G) \leqslant C_G(x_i)$) و همچنین تعداد n_i هایی که برابر ۱ هستند دقیقاً برابر مرتبه $Z(G)$ می‌باشد.

[۳] class number

[۴] class equation

۴-۱ نرمالسازها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و g عنصری از گروه G باشد. در این صورت مزدوج X به وسیله g برابر است با زیرمجموعه

$$X^g = gXg^{-1} = \{ \, gxg^{-1} \mid x \in X \, \}.$$

تعریف ۲.۴.۱. نرمالساز X در G را با نماد $N_G(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_G(X) = \{ \, g \in G \mid X^g = X \, \}.$$

ملاحظه ۳.۴.۱. اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه $N_G(H)$ بزرگترین زیرگروهی از G است که H در آن نرمال است.

قضیه ۴.۴.۱ (نرمالساز - مرکزساز)**.** *فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، در این صورت*

$$C_G(H) \lhd N_G(H)$$

و $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

اثبات. به صفحه ۳۸ از [۳۵] مراجعه شود. □

۵-۱ $p-$گروه‌های متناهی

در این بخش به بیان تعاریف و قضایایی در مورد $p-$گروه‌های متناهی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۵.۱. گروه متناهی G، $p-$گروه بسیار ویژه[۵] نامیده می‌شود اگر

$$Z(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p.$$

به راحتی می‌توان نشان داد $G/Z(G)$ آبلی مقدماتی است. به عنوان مثال $p-$گروه‌های D_8، Q_8، E_1 و E_2 گروه‌های بسیار ویژه هستند.

[۵] extra special

قضیه ۲.۵.۱. *هر $p-$گروه متناهی پوچتوان[۶] است.*

اثبات. به صفحه ۱۱۸ از [۳۵] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۵.۱. *اگر G یک گروه پوچتوان و $G \triangleleft N \neq ۱$، آنگاه $N \cap Z(G) \neq ۱$.*

اثبات. به صفحه ۱۲۴ از [۳۵] رجوع شود. □

نتیجه ۴.۵.۱. *هر گاه N یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه پوچتوان G باشد، در این صورت $N \leqslant Z(G)$.*

اثبات. از قضیه (۳.۵.۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۵.۵.۱. *گروه‌های پوچتوان مرکز نابدیهی دارند.*

اثبات. از قضیه (۳.۵.۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۶.۵.۱. *هر $p-$گروه متناهی مرکز نابدیهی دارد.*

اثبات. به آسانی از (۲.۵.۱) و (۵.۵.۱) نتیجه می‌شود. □

۱-۶ زیرگروه‌های سیلو

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. اگر $|G| = p^{\alpha}m$ که $(p, m) = ۱$، آنگاه با توجه به قضیه لاگرانژ [۳۵] یک $p-$زیرگروه از G نمی‌تواند دارای مرتبه بزرگتر از p^{α} باشد. یک $p-$زیرگروه از G که دارای مرتبه ماکزیمم p^{α} است $p-$زیرگروه سیلوی گروه G نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۶.۱. *فرض کنید P یک $p-$ زیرگروه سیلو از گروه متناهی G باشد، در این صورت اگر $N \trianglelefteq G$ آنگاه $(PN)/N$ یک $p-$ زیرگروه سیلوی G/N است.*

اثبات. به صفحه ۴۰ از [۳۵] مراجعه شود. □

[۶] nilpotent

۱-۷ نمایش‌ها و سرشت‌ها

۱-۷-۱ نمایش‌ها

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنید G یک گروه، F یک میدان و V یک فضای برداری روی میدان F باشد. همریختی ρ از G به $GL(V)$، گروه تمام تبدیلات خطی نامنفرد از V، یک نمایش خطی از G روی F، یا به‌طور ساده‌تر یک $F-$نمایش [۷] از G نامیده می‌شود. در اینجا همواره فرض می‌شود که فضای برداری V از بعد [۸] متناهی n باشد که به آن درجه نمایش ρ گفته می‌شود.

اگر $\ker(\rho) = ۱$، در این صورت ρ، باوفا [۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۷.۱. فرض کنید $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ یک پایه از V باشد. در این صورت نگاشت

$$\rho^* : G \longrightarrow GL(n, F)$$

که

$$g \longmapsto \rho^*(g) = g^{\rho^*}$$

یک همریختی است که نمایش ماتریسی وابسته، نسبت به پایه ارائه شده نامیده می‌شود. یعنی اگر $g \in G$، در این صورت یک ماتریس g^{ρ^*} در $GL(n, F)$ وجود دارد به طوری که تبدیل خطی $g^\rho = \rho(g)$ نسبت به این پایه را نمایش می‌دهد.

تعریف ۳.۷.۱. اگر G یک گروه و R هر حلقه یکداری باشد، حلقه گروهی [۱۰] $R[G]$، مجموعه تمام جمع‌های صوری $\sum_{x\in G} r_x x$ تعریف می‌شود که $r_x \in R$ و $r_x = ۰$ به جز یک تعداد متناهی از آنها، همراه با قوانین جمع و ضرب زیر

[۷] $F-$representation

[۸] dimension

[۹] faithful

[۱۰] group ring

$$\left(\sum_{x\in G} r_x x\right) + \left(\sum_{x\in G} r'_x x\right) = \sum_{x\in G}(r_x + r'_x)x$$

و

$$\left(\sum_{x\in G} r_x x\right)\left(\sum_{x\in G} r'_x x\right) = \sum_{x\in G}\left(\sum_{yz=x} r_y r_z\right)x.$$

به سادگی تحقیق می‌شود که با این قوانین $R[G]$ یک حلقه با عنصر همانی $1_R 1_G$، می‌باشد که برای سادگی آن را با ۱ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۷.۱. فرض کنید F یک میدان باشد در این صورت $F[G]$، علاوه بر حلقه بودن، یک ساختار $F-$مدولی به صورت زیر دارد

$$f\left(\sum_{x\in G} f_x x\right) = \sum_{x\in G}(ff_x)x, \qquad (f \in F)$$

که $F[G]$ را به صورت یک فضای برداری روی F می‌سازد. بعلاوه داریم

$$f(rs) = (fr)s = r(fs)$$

که $f \in F$ و $r, s \in F[G]$. بنابراین $F[G]$ یک $F-$جبر است که به عنوان جبر گروهی از G روی F شناخته می‌شود.

تعریف ۵.۷.۱. $F-$نمایش ρ از G تحویل‌ناپذیر [11] نامیده می‌شود اگر $\rho(G)$ یک $F[G]-$مدول ساده باشد. یعنی هیچ زیرمدول سره‌ای نداشته و خود نیز نابدیهی باشد.

۱-۷-۲ سرشت‌ها

قبل از بیان تعریف سرشت یک گروه، یادآوری لم زیر از جبر خطی ضروری می‌باشد.

[11] irreducible