وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

ایدآل‌های تک‌جمله‌ای با خارج قسمت‌های خطی

پایان‌نامۀ کارشناسی ارشد

محسن شکری

استاد راهنما: **آقای دکتر رشید زارع نهندی**
آقای دکتر علی اکبر یزدان پور

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مادرم

و

روح پدرم

تشکر و قدردانی

در اینجا از همه دوستانم که در این سال ها به من کمک کرده اند تشکر می کنم.

با سپاس از دو وجود مقدس؛

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم

پدر و مادر

و با سپاس از مرد صبوری و متانت و علم که مرا به شاگردی خویش فیض داد

استاد فرزانه دکتر رشید زارع نهندی

و با سپاس از اسوه تلاش و خستگی ناپذیری

دکتر علی اکبر یزدان پور

و با سپاس از همه‌ی آنان که بر سر کلاس علم و ادب و دوستی‌شان شاگردی کردم

اعضای خانواده‌ام،

اساتیدم،

دوستانم.

چکیده

در سال ۲۰۰۲ هرزوگ و تاکایاما در مقاله‌ی ($Resolutions\ by\ mapping\ cones$) ایدآل جدیدی به‌نام ایدآل با خارج قسمت‌های خطی معرفی کردند. این ایدآل خواص جالب توجهی از نظر جبری و از نظر ترکیبیاتی دارد.

در این پایان‌نامه علاوه بر بررسی خواص جبری و ترکیبیاتی این ایدآل‌ها، همبافت‌های کزول، همولوژی کزول، مجتمع سادکی و ایدآل‌هایی که به‌صورت مولفه‌ای خطی هستند و ایدآل‌هایی که به‌صورت مولفه‌های خالی از مربع خطی هستند معرفی و خواص آن‌ها به همراه ارتباط این مفاهیم با مفهوم ایدآل با خارج قسمت‌های خطی بررسی می‌شود.

این پایان‌نامه عمدتا از کتاب ($Monomial\ Ideals$) و مقالات ($Ideals\ with\ linear\ quotients$) و ($Graded\ Betti\ numbers\ of\ ideals\ with\ linear\ quotients$) اقتباس شده است.

فهرست

پیش‌گفتار

در حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های n – متغیره $S = K[x_1, ..., x_n]$ که K یک میدان دلخواه می‌باشد ایدآل با خارج قسمت‌های خطی برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ در مقاله‌ی [۶] توسط هرزوگ و تاکایاما معرفی شد.

فرض کنید I ایدآلی از S با مولدهای همگن هم‌درجه باشد که دارای خارج قسمت‌های خطی است. ثابت شده است که I دارای تحلیل آزاد خطی می‌باشد. در صورتی که I توسط تک‌جمله‌ای‌های هم درجه خالی از مربع تولید شود، یک مجتمع سادکی به آن نظیر می‌شود که با Δ_I نشان می‌دهیم. در این حالت اگر I دارای تحلیل آزاد خطی باشد، آن‌گاه دوگان الکساندر I یک مجتمع سادکی کوهن- مکالی است (قضیه‌ی ۴.۱.۸).

از طرف دیگر ثابت می‌شود که اگر I دارای خارج قسمت‌های خطی باشد، آن‌گاه دوگان الکساندر Δ_I یک مجتمع سادکی پوسته پذیر است.

ژنگ و سلیمان جهان در [۴] ثابت کرده‌اند که اگر I ایدآلی تک‌جمله‌ای و با خارج قسمت‌های خطی باشد، آن‌گاه $\mathrm{m}I$ نیز ایدآلی با خارج قسمت‌های خطی است که در آن m ایدآل ماکسیمال همگن S است. در این مقاله هم‌چنین ثابت شده‌است که اگر I ایدآلی با خارج قسمت‌های خطی باشد، آن‌گاه به‌صورت مولفه‌ای خارج قسمت‌های خطی دارد. شریفان و واربارو در [۵] ثابت کرده‌اند که اگر I ایدآل همگن و با خارج قسمت‌های خطی باشد، آن‌گاه I به‌صورت مولفه‌ای خطی است.

در این پایان نامه در فصل اول مفاهیم اولیه جبری مورد نیاز معرفی و خواص آن‌ها بررسی می‌شود. در فصل دوم همبافت کزول و همولوژی کزول و خواص آن‌ها در فصل سوم مجتمع‌های سادکی و همولوژی مجتمع‌های سادکی وایدآل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع استنلی – رایزنر و دوگان الکساندر یک مجتمع

سادکی بررسی می‌شود و در فصل چهارم در ابتدا به بررسی ویژگی‌های مجتمع‌های متناظر با ایدآل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع دارای خارج قسمت‌های خطی و هم‌چنین دارای تحلیل خطی می پردازیم و در ادامه ایدآل‌هایی که به صورت مولفه‌ای خطی هستند و ایدآل‌هایی که به صورت مولفه‌های خالی از مربع خطی و رابطه‌ی آن‌ها با ایدآل‌های که به صورت مولفه‌های خالی از مربع و رابطه‌ی آن‌ها با ایدآل‌های با خارج قسمت‌های خطی را بررسی می‌کنیم و در فصل پنجم ویژگی‌های ایدآل‌های تک‌جمله‌ای با خارج قسمت‌های خطی بررسی می‌شود.

فصل اول

مفاهیم جبری

در این فصل مفاهیم جبری مورد نیاز در کل پایان نامه معرفی و خواص آنها بررسی می شود. در کل پایان نامه همه‌ی حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض می شوند همچنین فرض می‌کنیم $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}$.

۱.۱ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید K میدان باشد $S = K[x_1, ..., x_n]$ را حلقه چندجمله‌ای‌ها بر میدان K گویند که اعضای آن به شکل $\sum_{j=1}^{n} a_j x_1^{a_{j1}} \cdots x_n^{a_{jn}}$ که $a_j \in \mathbb{Z}^+$ می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. هر عنصر به شکل $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ را یک تک‌جمله‌ای گویند.

تعریف ۳.۱.۱. به ایدآلی که یک مجموعه مولد از تک‌جمله‌ای‌ها دارد را **ایدآل تک‌جمله‌ای** گفته می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه‌ی تک‌جمله‌ای‌های متعلق به S را با $\mathrm{Mon}(S)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $\mathrm{Mon}(S)$ یک پایه برای S روی K به عنوان فضای برداری می‌باشد، به‌عبارت دیگر هر چندجمله‌ای یک ترکیب خطی منحصربه‌فرد از تک‌جمله‌ای‌ها با ضرایبی در K می‌باشد، یعنی هر $f \in S$ دارای یک نمایش منحصر به فرد به صورت

$$f = \sum_{\substack{u \in \mathrm{Mon}(S) \\ a_u \in K}} a_u u$$

است که در آن فقط تعدادی متناهی از a_u ها ناصفر هستند. با این مفروضات، مجموعه

$$\mathrm{supp}(f) = \{u \in \mathrm{Mon}(S) \mid \quad a_u \neq ۰\}$$

را محمل f گویند.

قضیه ۵.۱.۱ (مرجع [۱]، قضیه‌ی ۲.۱.۱). *فرض کنید I یک ایدآل تک‌جمله‌ای در S باشد و N مجموعه تک‌جمله‌ای‌های متعلق به I باشد. در این‌صورت N یک پایه برای I روی K به عنوان فضای برداری می‌باشد.*

نتیجه ۶.۱.۱ (مرجع [۱]، قضیه‌ی ۳.۱.۱). *فرض کنید I یک ایدآل باشد شرایط زیر هم‌ارزند:*

(الف) *I یک ایدآل تک‌جمله‌ای است،*

(ب) *برای هر $f \in S$ داریم: $f \in I$ اگروفقط اگر $I \supset \mathrm{supp}(f)$.*

تذکر ۷.۱.۱. چون بنابرقضیه‌ی پایه هیلبرت (مرجع [۷] قضیه‌ی ۸.۷) حلقه $S = K[x_۱, ..., x_n]$ حلقه‌ای نوتری است بنابراین هر ایدآلی از آن به‌ویژه هر ایدآل تک‌جمله‌ای متناهی مولد است.

گزاره ۸.۱.۱ (مرجع [۱] قضیه‌ی ۵.۱.۱). *فرض کنید $\{u_۱, ..., u_m\}$ یک مجموعه مولد تک‌جمله‌ای برای ایدآل I باشد در این صورت تک‌جمله‌ای v به I تعلق دارد اگر و فقط اگر تک‌جمله‌ای w و عدد*

صحیح i، وجود داشته باشد که $1 \leq i \leq m$ و $v = wu_i$.

نتیجه ۹.۱.۱ (مرجع [۱]،نتیجه‌ی۱.۱.۴). *فرض کنید I یک ایدآل تک‌جمله‌ای در حلقه‌ی S باشد. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر به شکل $u+I$ ها که u تک‌جمله‌ای است و $u \notin I$، تشکیل یک K -پایه برای حلقه‌ی خارج قسمتی S/I می‌دهد.*

گزاره ۱۰.۱.۱ (مرجع [۱] قضیه‌ی۱.۱.۶). *هرایدآل تک‌جمله‌ای یک مجموعه مولد مینیمال منحصر به فرد از تک‌جمله‌ای‌ها دارد، در واقع، فرض کنید G مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های عضو I باشد که هیچ دو عضو همدیگر را عاد نکنند. در این صورت G همان مجموعه مینیمال منحصربه‌فرد I می‌باشد.*

قرارداد ۱۱.۱.۱. مجموعه‌ی مینیمال منحصربفرد تک‌جمله‌ای‌های مولد ایدآل تک‌جمله‌ای I رابا $G(I)$ نشان می‌دهند.

۱.۱.۱ موضعی سازی

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار باشد و $S \subset R$. گوییم S یک مجموعه‌ی ضربی است اگر شرایط زیر را داشته باشد

(الف) $1_R \in S$

(ب) به ازای هر $a, b \in S$، $ab \in S$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار باشد و M یک R - مدول و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی R باشد. در این صورت مدول کسرهای M نسبت به S یا موضعی سازی M نسبت به S به‌صورت

$$S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid \quad m \in M, s \in S\}$$

تعریف می‌شود. $\frac{m}{s} = \frac{m_1}{s_1}$ اگر و فقط اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $t(ms_1 - m_1s) = 0$.

فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار باشد و S زیر مجموعه‌ی ضربی R باشد. مجموعه‌ی $S^{-1}R$ با اعمالی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود ساختار حلقه‌ای دارد

(الف) اگر $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$،

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

(ب) اگر $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$،

$$\frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

فرض کنید R یک حلقه و S زیر مجموعه‌ی ضربی R باشد. M را یک R - مدول در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $S^{-1}M$ با اعمالی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود ساختار $S^{-1}R$ -مدولی دارد.

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_1}{s_2} = \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2} \qquad (s_i \in S, m_i \in M)$$

$$(\frac{a}{s_1}).(\frac{m}{s_2}) = (\frac{am}{s_1 s_2}) \qquad (s_i \in S, m \in M, a \in R)$$

نگاشت طبیعی $\phi : M \longrightarrow S^{-1}(M)$ با ضابطه‌ی $\phi(m) = \frac{m}{1}$ وجود دارد. هم‌چنین R - هم‌ریختی $f : M \longrightarrow N$ ، هم‌ریختی

$$S^{-1}f : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

را با ضابطه‌ی $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$ القا می‌کند.

مثال ۱۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و f، عضوی از آن باشد فرض کنید $S = \{f^n \mid \quad n \geq 0\}$. $S^{-1}R$ را معمولا با R_f نمایش می‌دهند. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها $R = \mathbb{C}[x]$ بر روی میدان اعداد مختلط

$\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. حلقه‌ی R_x که با $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ نیز نشان داده می‌شود، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران[1] گویند.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید p ایدآلی اول از حلقه‌ی یکدار R باشد. قرار می‌دهیم $S = R \setminus p$. در این حالت $S^{-1}R$ را با R_p نمایش می‌دهیم وآن را موضعی سازی R در p گویند.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. در این صورت به ازای هر $M \ni x \neq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$(0 :_R x) := \{r \in R \mid \quad rx = 0\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. ایدآل اول P از حلقه‌ی R را ایدآل اول وابسته به M گویند اگر عنصر $M \ni x \neq 0$ وجود داشته باشد که $P = (0 :_R x)$. مجموعه‌ی ایدآل‌های اول وابسته به M را با $\mathrm{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهند.

۱.۲ حلقه‌ها و مدول‌های مدرج

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه و G یک نیم‌گروه و $R = \bigoplus_{i \in G} R_i$ یک تجزیه R به زیرگروهای جمعی خود باشد به‌طوری که به ازای هر $i, j \in G$ داشته باشیم

$$R_i R_j \subset R_{i+j}.$$

در این صورت گوییم R یک حلقه G -مدرج است. هر عنصر R_i را همگن از درجه‌ی i گویند.

---

[1] Laurant

ملاحظه ۲.۲.۱. در تعریف بالا،منظور از R_iR_j ، مجموعه عناصری از R است که به‌صورت جمع متناهی از عناصر r_ir_j می‌باشند که $r_i \in R_i$ و $r_j \in R_j$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی مدرج و M یک R -مدول است. اگر بتوان M را به صورت جمع مستقیمی از زیر گروه‌هایش مثل $M = \bigoplus_{i\in G} M_i$ نوشت با این شرط که $R_aM_b \subset M_{a+b}$، گوییم M، G -مدرج است

تعریف ۴.۲.۱. عنصر $f \in \mathrm{S} = K[x_۱, ..., x_n]$ را همگن از درجه t گوییم، هرگاه درجه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های موجود در محمل f برابر t باشد.

مثال ۵.۲.۱. در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $S = K[x_۱, ..., x_n]$، فرض کنید R_i مجموعه تمام چندجمله ای‌هایی مانند f باشد که $f = ۰$ یا همگن از درجه i است . در این صورت

$$S = K[x_۱, ..., x_n] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$$

بنابراین حلقه‌ی $S = K[x_۱, ..., x_n]$ یک حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ - مدرج است.

مثال ۶.۲.۱. در حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های $S = K[x_۱, ..., x_n]$ ، به ازای هر $\mathrm{a} \in \mathbb{Z}^n$ ، S_a را به صورت:

$$S_\mathrm{a} = \begin{cases} Kx_۱^{a_۱}x_۲^{a_۲}...\ x_n^{a_n} & \mathrm{a} \in \mathbb{Z}^n \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$S = K[x_۱, ..., x_n] = \bigoplus_{\mathrm{a}\in\mathbb{Z}^n} S_\mathrm{a}.$$

بنابراین حلقه‌ی $S = K[x_۱, ..., x_n]$ یک حلقه‌ی $\mathbb{Z}^n$ - مدرج است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $R=\bigoplus_{i\in N} R_i$ یک حلقه مدرج باشد. در این صورت به ازای هر i ، R_i را رده همگن R از درجه i گویند. به‌علاوه، هر عنصر $y\in R$ $(\neq \circ)$ را می‌توان به‌طور منحصر بفردی به‌شکل $y=\sum y_n$ نمایش داد که درآن $y_n\in R_n$ و فقط تعدادی متناهی از y_n ها ناصفر هستند. در این حالت y_n را مولفه‌ی همگن R از درجه n می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید $R=\bigoplus_{i\in \mathbb{N}} R_i$ یک حلقه مدرج و I ایدآلی از R باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

(*الف*) $I=\bigoplus_{i\in \mathbb{N}}(R_i\cap I)$

(*ب*) *مولفه‌های همگن هر عنصر I ، متعلق به I هستند*

(*پ*) *I به وسیله ی عناصر همگن خودش تولید می شود.*

اثبات. (الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم $R=\bigoplus_{i\in \mathbb{N}} R_i$ در این صورت به‌ازای هر $y\in I$ می‌توان نوشت $y=\sum_{i\in \mathbb{N}} y_i$ که در آن $y_i\in R_i$ و به‌جز تعداد متناهی از y_iها همگی صفرند. از طرف دیگر $y=\sum_{i\in \mathbb{N}} y'_i$ که $y'_i\in I\cap R_i$.

به علت یگانه بودن تجزیه‌ی y به حاصل جمع مولفه‌های همگن، $y_i=y'_i$ و در نتیجه $y_i\in I$.

(ب $\Leftarrow$ الف) فرض کنید $y\in I$ عنصر دلخواهی باشد. داریم $y=\sum y_i$ که در آن $y_i\in R_i$. چون طبق فرض $y_i\in I$، پس $y_i\in I\cap R_i$ و درنتیجه $I=\bigoplus_{i\in \mathbb{N}}(I\cap R_i)$.

(ب $\Leftarrow$ پ) فرض کنید $\{g_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ مولد I باشد. به‌ازای هر $i\in \mathbb{N}$، می‌توان به‌جای g_i همه‌ی مولفه‌های همگن آن را در این مجموعه قرار داد و در نهایت مجموعه‌ای به‌دست می‌آید که همه‌ی اعضای آن همگن هستند و I را تولید می‌کنند.

(پ $\Leftarrow$ ب) فرض کنید I به‌وسیله‌ی مجموعه‌ای از عناصر همگن‌اش مانند $M=\{g_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ تولید می‌شود. اگر $I=\circ$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند. پس فرض کنیم $I\neq \circ$ و $f\in I$ عنصر غیرصفر

دلخواهی از I باشد بنابراین

$$f = x_{i_1} g_{i_1} + \cdots + x_{i_r} g_{i_r} \quad ; \quad x_{i_j} \in R$$

از آنجاکه R مدرج و $x_{i_j} \in R$ می‌باشد پس x_{i_j} تجزیه‌ای به مؤلفه‌های همگن دارند. مانند

$$x_{i_j} = x_{i_{j_1}} + \cdots + x_{i_{j_l}}$$

پس

$$f = (x_{i_{1_1}} g_{i_1} + x_{i_{1_2}} g_{i_1} + \cdots + x_{i_{1_t}} g_{i_1}) + \cdots + (x_{i_{r_1}} g_{i_r} + \cdots + x_{i_{r_l}} g_{i_r})$$

از آنجاکه g_{i_j}ها به I تعلق دارند بنابراین $x_{i_{j_k}} g_{i_j}$ها نیز در I قرار دارند پس جمع هر تعداد از آن‌ها، از جمله آن‌هایی که هم درجه هستند نیز در I قرار دارند. $\square$

تعریف ۹.۲.۱. ایدآل I از حلقه مدرج R را که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند را ایدآل همگن گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید $M = \bigoplus_{i \in N} M_i$ و $M' = \bigoplus_{i \in N} M'_i$ دو حلقه‌ی مدرج باشد وهم‌ریختی حلقه‌ای $\phi : M \to M'$ را داشته باشیم با این خاصیت که $\phi(M_i) \subseteq M'_{i+d}$ در این صورت گوییم که ϕ هم‌ریختی‌ای مدرج از درجه d است و اگر $d = ۰$ ، ϕ را هم‌ریختی همگن گوییم.

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه مدرج باشد. هرگاه حاصلضرب هر دو عنصر همگن مخالف صفر در R ناصفر باشد، آن‌گاه R مقسوم علیه صفر نابدیهی ندارد.*

اثبات. فرض کنید x و y دو عنصر ناصفر R باشند، و

$$x = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n \quad , \quad y = y_۱ + \cdots + y_m$$

تجزیه‌ی x و y به مولفه‌های همگن باشند. گیریم $x_۱$ و $y_۱$ به ترتیب مؤلفه‌های همگن x و y از کمترین درجه باشند. طبق فرض داریم $x_۱y_۱ \neq ۰$ و همچنین اگر $(i,j) \neq (۱,۱)$ ، آنگاه
$\deg(x_۱y_۱) < \deg(x_iy_i)$. در این صورت نتیجه می‌شود که $x_۱y_۱$ در بین مولفه‌های همگن xy از کوچکترین درجه است. پس $xy \neq ۰$. □

قضیه ۱۲.۲.۱. *فرض کنید* $\phi : R \to R'$ *هم ریختی همگن از درجه* d *باشد در این صورت داریم:*

(الف) هسته ϕ *یک ایدآل همگن* R *است*

(ب) برد ϕ *یک زیر حلقه مدرج* R' *است.*

اثبات. الف) فرض کنید $y \in \ker(\phi)$ و $y = \sum_{\text{finite}} y_i$ که $y_i \in R_i$. $\phi(y)$ را به صورت مقابل در نظر بگیرید $\phi(y) = \sum_{\text{finite}} \phi(y_i) = ۰$ که $\phi(y_i) \in R'_{i+d}$. درنتیجه برای هر i داریم $\phi(y_i) = ۰$ است و بنابراین مؤلفه‌های همگن هر عنصر $\ker(\phi)$ در خودش قرار دارد و بنابه قضیه‌ی (۸.۲.۱)، $\ker(\phi)$ یک ایدآل همگن است.

ب) چون $R = \sum R_i$، پس $\phi(R) = \sum \phi(R_i)$. از طرف دیگر چون $\phi(R_i) = \phi(R) \cap R'_{i+d}$ درنتیجه $\phi(R) = \sum(\phi(R) \cap R'_{i+d})$ و داریم:

$$\begin{aligned}
(\phi(R) \cap R'_{i+d})(\phi(R) \cap R'_{j+d}) &= \phi(R_i)\phi(R_j) \\
&= \phi(R_iR_j) \\
&\subseteq \phi(R_{i+j})
\end{aligned}$$

$$= \quad \phi(R) \cap R'_{i+j+d}$$

بنابراین $\phi(R) = \oplus((\phi(R) \cap R'_{i+d}))$. این نشان می‌دهد که $\mathrm{Im}(\phi)$ زیرحلقه‌ی مدرج R' است.

$\square$

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنید I یک ایدآل همگن حلقه مدرج R است. در این صورت حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ نیز مدرج است.*

اثبات. قرار دهید $S = \dfrac{R}{I}$ و $S_q = \phi(R_q)$ که در آن ϕ همان همریختی طبیعی است. چون ϕ یک همریختی طبیعی است در نتیجه S_q یک زیرگروه از S می‌باشد. فرض کنید $r \in R$ و $r = r_{i_1} + \cdots + r_{i_j}$ تجزیه‌ی r به مولفه‌های همگن باشد که در آن $r_{i_t} \in R_{i_t}$ چون

$$\phi(r) = \phi(r_{i_1}) + \cdots + \phi(r_{i_j}) \quad , \quad \phi(r_{i_t}) \in \phi(R_{i_t}) = S_{i_t}$$

پس $S = \sum S_q$.

حال برای نشان دادن $S = \oplus S_q$، کافی است نشان دهیم که اگر $\phi(r) = 0$ ، آن‌گاه برای هر $1 \leq t \leq j$ خواهیم داشت $\phi(r_{i_t}) = 0$. فرض کنید $\phi(r) = 0$. در این‌صورت $r \in \ker\phi = I$ چون $\ker\phi$ یک ایدآل همگن است پس بنابه قضیه (۸.۲.۱)، برای هر t که $1 \leq t \leq j$ داریم $r_{i_t} \in \ker\phi$. از این‌رو برای هر t، $\phi(r_{i_t}) = 0$.

حال برای مدرج بودن کافی است ثابت کنیم $S_q S_{q'} \subseteq S_{q+q'}$.

برای این منظور فرض کنید که $S \in S_q$ و $S' \in S_{q'}$ چون $S \in \phi(R_q)$ و $S' \in \phi(R_{q'})$ پس عناصر