بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

تعمیم نامساوی چی‌بی‌شف برای انتگرال‌های سوگینو

استاد راهنما
دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور
دکتر اصغر رحیمی

نگارش
زهرا سلطنت‌پوری

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به مادرم،

ستاره ی پر فروغ زندگی

اسوه ی صلابت و مهربانی

استاد دانشگاه بزرگ انسانیت

معلم اراده و ایثار و عطوفت

که با محبت های بی دریغش خستگی های راه را بر من هموار می سازد.

مثل هر آدم ضعیفی که در سختی ها بیش تر به یاد خدا می افتد و در بی کسی بیش تر می فهمد که خدا تنها کس هر کسی است، خدا را به روشنی و صراحت صبحی که دارد در برابر چشم های منتظرم طلوع می کند، حس می کنم... می بینم... دست های لطیف و حمایت گرش را بر روی شانه هایم لمس می کنم و از این همه لطف و مهر که به این بنده بی ارج ارزانی داشته است، غرق هیجان و خجلتم!

دکتر شریعتی

سپاس‌گزاری...

در آغاز ستایش میکنم پروردگار یکتا را به‌پاس توفیقی که در جهت کسب دانش به من عطا داشته و سپاس‌گزاری می‌کنم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر دارابی که راهنمایی‌های ارزنده ایشان همواره راهگشایم بوده است. همچنین از جناب آقای دکتر رحیمی به عنوان استاد مشاور و از جناب آقای دکتر عظیمی که داوری این پایان نامه را به عهده دارند کمال تشکر را دارم.
مراتب تشکر و قدردانی خود را از جناب آقای دکتر مزیار[1] نیز که همواره با سعه صدر پاسخگوی مشکلات اینجانب بوده‌اند به‌جا می آورم و برای ایشان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون دارم.

زهرا سلطنت‌پوری　　　　　　　　　　شهریور ۱۳۹۱

[1] R. Mesiar

نام خانوادگی: سلطنت‌پوری نام: زهرا

عنوان پایان‌نامه: تعمیم نامساوی چی‌بی‌شف برای انتگرال‌های سوگینو

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی:کارشناسی ارشد رشته:ریاضی محض گرایش:آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۸۰

کلیدواژه‌ها:اندازه‌های‌غیرجمعی، انتگرال‌سوگینو، هم‌یکنوا، نامساوی‌چی‌بی‌شف

چکیده

نامساوی‌های چی‌بی‌شف برای انتگرال سوگینو روی فضاهای مختصر تاکنون بطور گسترده مطالعه شده‌اند. در این پایان‌نامه این انتگرال‌ها در حالت خاص به خط حقیقی و عملگر ضرب محدود شده‌اند.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

از زمانی که اندازه‌های فازی و انتگرال‌های فازی توسط سوگینو[۱] معرفی شدند [۲۰] به‌طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفتند. رالسکو و آدامز[۲] [۱۶] بازه اندازه‌های فازی را از $[0,1]$ به $[0,\infty]$ تعمیم دادند. سپس پاپ [۳] [۱۵] ، وانگ و کلیر[۴] [۲۲] یک توصیف کلی از قضیه‌ی اندازه فازی ارائه نمودند. به‌تازگی رومن ـ فلورس[۵] و همکارانش چندین نامساوی انتگرال کلاسیک را به انتگرال فازی تعمیم داده‌اند[۴،۱۷،۱۸].در مرجع [۱۸] رومن ـ فلورس و همکارانش نامساوی یانگ را برای انتگرال فازی نسبت به توابع پیوسته و اکیداً یکنوا اثبات کرده‌اند. با توجه به نتیجه‌ی مقاله‌ی [۱۸] فلورس ـ فرانولیک[۶] و رومن ـ فلورس یک نامساوی از نوع چی‌بی‌شف برای انتگرال فازی از توابع پیوسته و اکیداً یکنوا را بر اساس اندازه لبگ ارائه نموده‌اند[۴]. اُیانگ و فنگ[۷] نتایج اصلی در [۱۸] را تعمیم دادند. در واقع آنها نتایج مشابهی برای توابع یکنوا اثبات کردند. بر اساس این نتایج، اُیانگ یک نامساوی چی‌بی‌شف را برای انتگرال فازی از توابع یکنوا بر اساس اندازه فازی دلخواه اثبات کرد[۱۴].

در این پایان‌نامه، ما با یک فضای اندازه فازی مجرد و همچنین عملگر درگیر در نامساوی چی‌بی‌شف با تعمیم ضرب معمولی سروکار داریم. پس از ارائه‌ی مختصری از چند تعریف و قضیه در فصل

[۱] M. Sugeno
[۲] D. Ralescu, G. Adams
[۳] E. Pap
[۴] Z. Wang, G. Klir
[۵] Román-Flores
[۶] Flores-Franulič
[۷] Y. Ouyang, J. Fang

۱و۲ که از قبل می‌دانیم، در فصل ۳ نامساوی کلی از نوع چی‌بی‌شف به همراه چند مثال ارائه شده و در پایان نتایج اصلی بیان می‌شود.

۲.۱ یادآوری

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $f,g : X \to [0,\infty)$ دو تابع باشند. گوئیم f و g توابع هم‌یکنوا[۸] می‌باشند هرگاه f و g برای هر $x,y \in X$ در نامساوی

$$\Big(f(x)-f(y)\Big)\Big(g(x)-g(y)\Big) \geq 0$$

صدق کنند. در این صورت f و g هردو صعودی یا هردو نزولی میباشند.

مثال ۲.۲.۱. *فرض کنید $X = \mathbb{R}$ باشد و $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ و تابع $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ به صورت $g(x) = x^2$ تعریف شده باشند. در این صورت، چون دو تابع f و g هر دو صعودی‌اند، پس هم‌یکنوا می‌باشند.*

تعریف ۳.۲.۱. تابع $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ یك t ‐نرم[۹] نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر $x \in [0,1]$، $T(x,1) = T(1,x) = x$.

ب) برای هر $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$، اگر $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$ آنگاه

[۸] Comonotone
[۹] t-norm

$T(x_۱, y_۱) \leq T(x_۲, y_۲)$. (نانزولی بودن)

ج) $T(x, y) = T(y, x)$. (تقارن یا جابجایی)

د) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$. (شرکت‌پذیری)

ه) $T(x, y) \leq min(x, y)$.

تعریف ۴.۲.۱. تابع $M : [۰, ۱]^۲ \to [۰, ۱]$ یک t-زیرنرم [۱۰] نامیده می‌شود هرگاه در شرایط (ب)، (د) و (ه) از تعریف قبل، صدق کند.

در ادامه چند t -نرم ساده معرفی می‌شود.

مثال ۵.۲.۱. *فرض کنید $T_M(x, y) = \min(x, y)$. در این صورت، T_M یك t- نرم می‌باشد که آن را t -نرم می‌نیمم می‌نامیم.*

مثال ۶.۲.۱. *فرض کنید $T_P(x, y) = x.y$. در این صورت، T_P یك t- نرم می‌باشد که آن را t- نرم حاصلضرب می‌نامیم.*

مثال ۷.۲.۱. *فرض کنید $T_L(x, y) = \max(x + y - ۱, ۰)$. در این صورت، T_L یك t- نرم می‌باشد.*

تعریف ۸.۲.۱. تابع $S : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ یك t-هم‌نرم نامیده می‌شود هرگاه تابع t-نرم T موجود باشد به‌طوری که

$$S(x, y) = ۱ - T(۱ - x, ۱ - y).$$

[۱۰] triangular subnorm

یك t -هم نرم در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $[۰, ۱]$ $\forall x \in$، $S(x, ۰) = S(۰, x) = x$.

ب) همچنین در شرایط (۲)، (۳) و (۴) از تعریف قبل نیز باید صدق کند.

مثال ۹.۲.۱. *فرض کنید $S(x, y) = \max(x, y)$. در این صورت، S یك t- هم‌نرم می‌باشد.*

مثال ۱۰.۲.۱. *فرض کنید $S(x, y) = x + y - x.y$. در این صورت، S یك t- هم‌نرم می‌باشد.*

مثال ۱۱.۲.۱. *فرض کنید $S(x, y) = \min(x + y, ۱)$. در این صورت، S یك t- هم‌نرم می‌باشد.*

۳.۱ اندازه فازی

اندازه‌های فازی تعمیمی از مفهوم اندازه در آنالیز ریاضی‌اند که ویژگی یکنوایی را دارند و به اندازه‌های غیرجمعی معروف‌اند.

تعریف ۱.۳.۱. اگر X یك مجموعه و $\mathfrak{F}$ یك σ -جبر در X باشد، آنگاه جفت $(X, \mathfrak{F})$ را فضای اندازه پذیر می‌نامند و اعضای $\mathfrak{F}$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $(X, \mathfrak{F})$ یك فضای اندازه‌پذیر باشد. اندازه روی $(X, \mathfrak{F})$ یک تابع مجموعه‌ای نامنفی مانند μ است که برای همه‌ی مجموعه‌های $\mathfrak{F}$ تعریف شده باشد به‌طوری‌که

۱. $\mu(\emptyset) = ۰$.

۲. اگر $\{A_i\}$ یك دنباله از مجموعه‌های دوبدو متمایز در $\mathfrak{F}$ باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

قضیه ۱.۳.۳. *اگر $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد، آنگاه خواهیم داشت*

۱. *اگر $A, B \in \mathfrak{F}$ و $A \subseteq B$، آنگاه*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

۲. *اگر $\{A_n\}$ یك دنباله در $\mathfrak{F}$ باشد، آنگاه*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

۳. *اگر $\{A_n\}$ یك دنباله در $\mathfrak{F}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $A_n \subseteq A_{n+1}$، آنگاه*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

۴. *اگر $\{A_n\}$ یك دنباله در $\mathfrak{F}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $A_n \supseteq A_{n+1}$ و $\mu(A_1) < \infty$ آنگاه*

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

برهان. ۱. قرار می‌دهیم $B = A \cup (B - A)$. باتوجه به اینکه μ جمع‌پذیر متناهی است، خواهیم داشت

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A).$$

۲. فرض می‌کنیم $B_1 = A_1$ و برای هر عدد طبیعی $n > 1$، قرار می‌دهیم $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.

آنگاه

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} (A_n - A_i) = A_n \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c.$$

بنابراین، برای هر $n = 1, 2, 3, \cdots$، داریم $B_n \in \mathfrak{F}$. واضح است که برای هر $n = 1, 2, 3, \cdots$، $B_n \subseteq A_n$. فرض کنید که l و k اعداد صحیحی باشند به‌طوری‌که $l < k$. آنگاه $B_l \subseteq A_l$ و بنابراین داریم

$$\begin{aligned} B_l \cap B_k \subset A_l \cap B_k &= A_l \cap A_k \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \\ &= A_l \cap A_k \cap \cdots \cap A_l^c \cap \cdots \\ &= A_l \cap A_l^c \cap A_k \cap \cdots \cap \cdots = \emptyset \cap A_k \cap \cdots \cap \cdots \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

یعنی، $B_i \bigcap_{i \neq j} B_j = \emptyset$. حال ادعا می‌کنیم که $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$. چون برای هر $n = 1, 2, 3, \cdots$، $B_n \subseteq A_n$، پس خواهیم داشت $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$. فرض کنید $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. بنابراین، برای برخی از n ها خواهیم داشت $x \in A_n$. فرض کنید که k کوچکترین اندیسی باشد که $x \in A_n$، بنابراین $x \in A_k$ و $x \notin A_j$ برای هر $j = 1, 2, \cdots, k-1$. در این صورت، $x \in A_k$ و $x \in A_j^c$ برای هر $j = 1, 2, \cdots, k-1$. یعنی $x \in B_k = A_k \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j^c$، لذا، $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. در

نتیجه،

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

۳. فرض کنید $B_1 = A_1$ و برای هر $n > 1$، $B_n = A_n - A_{n-1}$ آنگاه

$$B_i \bigcap_{i \neq j} B_j = \emptyset,$$

$A_k = \bigcup_{n=1}^{k} B_n$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$. در نتیجه داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

۴. فرض کنید $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. آنگاه

$$A_1 - A = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

و $A_1 - A_n \subset A_1 - A_{n+1}$ برای هر عدد طبیعی n. در این صورت، با استفاده از قسمت (۳) این قضیه داریم

$$\mu(A_1 - A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n).$$

چون $A \subset A_1$ و $\mu(A_1) < \infty$، پس $\mu(A) < \infty$. همچنین، چون برای هر عدد طبیعی n، $A_n \subset A_1$ نتیجه می شود که $\mu(A_n) < \infty$. قرار می‌دهیم $A_1 = (A_1 - A) \cup A$، آنگاه خواهیم داشت $\mu(A_1) = \mu(A_1 - A) + \mu(A)$. یعنی،

$$\mu(A_1 - A) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

به طور مشابه، با در نظر گرفتن $A_1 = (A_1 - A_n) \cup A_n$ خواهیم داشت

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

در این صورت داریم

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty}[\mu(A_1) - \mu(A_n)] = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

و چون $\mu(A_1) < \infty$، پس نتیجه می‌شود که $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$، یعنی،

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

□

قرارداد ۴.۳.۱. *فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathfrak{F}$ کلاسی غیرتهی از زیرمجموعه‌های X و $\mu : \mathfrak{F} \to [0,\infty]$ تابع مجموعه ای نامنفی و حقیقی مقدار توسعه‌یافته باشد. در این صورت قرارداد می کنیم:*

۱. $\sup_{x\in\emptyset}\{x : x \in [0,\infty]\} = 0$.

۲. $\inf_{x\in\emptyset}\{x : x \in [0,1]\} = 1$.

۳. $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.

۴. $\frac{1}{\infty} = 0$.

۵. $\infty - \infty = 0$.

۶. $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$ ، که در اینجا $\{a_i\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است.

تعریف ۵.۳.۱. μ اندازه فازی[11] روی $(X, \mathfrak{F})$ نامیده می شود اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\mu(\emptyset) = 0$ (به صفر رسیدن در $\emptyset$)؛

۲. اگر $E \in \mathfrak{F}$، $F \in \mathfrak{F}$ و $E \subseteq F$، آنگاه

$\mu(E) \leq \mu(F)$ (یکنوایی)؛

۳. هرگاه $\{E_n\} \subset \mathfrak{F}$، $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{F}$ ، آنگاه

$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ (پیوستگی از پایین)؛

۴. وقتی $\{E_n\} \subset \mathfrak{F}$، $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ ، $\mu(E_1) < \infty$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{F}$، در این صورت

$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ (پیوستگی از بالا).

تعریف ۶.۳.۱. μ اندازه فازی نیم پیوسته (شبه پیوسته) [12] پایین روی $(X, \mathfrak{F})$ نامیده می‌شود اگر در شرایط ۱، ۲ و ۳ تعریف اندازه فازی صدق کند و μ اندازه فازی نیم پیوسته (شبه پیوسته) بالایی روی $(X, \mathfrak{F})$ نامیده می‌شود اگر در شرایط ۱، ۲ و ۴ تعریف اندازه فازی صدق کند.

همچنین اندازه فازی یا اندازه فازی نیم پیوسته μ منظم نامیده می شود اگر و تنها اگر $\mu(X) = 1$ و $X \in \mathfrak{F}$.

[11] Fuzzy measure
[12] Semicontinuous

تعریف ۷.۳.۱. $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ را فضای اندازه فازی (یا فضای اندازه فازی شبه پیوسته) روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathfrak{F})$ می‌نامیم اگر μ اندازه فازی (یا اندازه فازی شبه پیوسته) روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathfrak{F})$ باشد و $X \in \mathfrak{F}$.

اندازه فازی (یا اندازه فازی شبه پیوسته) در مقایسه با اندازه کلاسیك روی یك نیم‌حلقه، خاصیت جمع‌پذیری را ندارد اما خاصیت یکنوایی، پیوستگی (نیم‌پیوستگی) و به صفر رسیدن روی مجموعه تهی را دارد. اندازه فازی (یا اندازه فازی شبه‌پیوسته) را به‌عنوان اندازه‌های غیر جمع‌پذیر در نظر می‌گیریم.

تعریف ۸.۳.۱. اندازه فازی μ را متناهی می‌نامیم هرگاه برای هر $E \in \mathfrak{F}$، داشته باشیم $\mu(E) < \infty$.

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنید μ یک اندازه فازی متناهی باشد. آنگاه برای هر دنباله $\{E_n\} \subset \mathfrak{F}$ که حد آن موجود باشد خواهیم داشت*

$$lim_n \mu(E_n) = \mu(lim_n E_n).$$

برهان. فرض می‌کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها در $\mathfrak{F}$ باشد که حد آن موجود است. می‌گیریم

$$E = lim_n E_n = lim_n sup E_n = lim_n inf E_n$$

باتوجه به متناهی بودن μ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu(\lim_n supE_n) \\
&= lim_n\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \\
&= lim_n sup\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \\
&\geq lim_n sup\mu(E_n) \\
&\geq lim_n inf\mu(E_n) \\
&\geq \lim_n inf\mu(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i) \\
&= lim_n\mu(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i) \\
&= \mu(lim_n inf E_n) \\
&= \mu(E).
\end{aligned}$$

بنابراین $lim_n\mu(E_n)$ موجود است و داریم $lim_n\mu(E_n) = \mu(E)$.

□

تعریف ۱.۳.۱۰. اندازه‌ی μ را جامع می‌نامیم اگر و فقط اگر برای هر دنباله‌ی دوبدو مجزای $\{E_n\}$ از مجموعه‌ها در $\mathfrak{F}$ داشته باشیم $lim_n\mu(E_n) = 0$.

قضیه ۱.۳.۱۱. *فرض کنید μ اندازه فازی نیم پیوسته بالایی متناهی باشد. در این صورت μ جامع است.*

برهان. فرض کنید E_n دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبدو مجزا در $\mathfrak{F}$ باشد. اگر درنظر بگیریم $F_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$، آنگاه $\{F_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌ها در $\mathfrak{F}$ می‌باشد و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} lim_n F_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \\ &= lim_n sup E_n \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

چون μ اندازه فازی نیم پیوسته بالایی متناهی است با توجه به متناهی بودن و پیوستگی μ از بالا، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} lim_n \mu(F_n) &= \mu(lim_n F_n) \\ &= \mu(\emptyset) \\ &= 0. \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه

$$0 \leqslant \mu(E_n) \leqslant \mu(F_n)$$

نتیجه خواهد شد

$$lim_n \mu(E_n) = 0$$

پس μ جامع می‌باشد.

نتیجه ۱۲.۳.۱ . *هر اندازه فازی متناهی روی یک فضای اندازه‌پذیر، جامع است.*