بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

یک الگوریتم بهینه سازی بر پایه برنامه ریزی خطی برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر حسن میش مست نهی

تحقیق و نگارش:
علی محمدی

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

تیرماه 1390

تقدیم به...

پیشگاه مقدس حضرت صاحب الزمان (عج)

با آرزوی تعجیل در فرجش

سپاس گزاری . . .

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود آدمی را به زیور عقل آراست.

بوسه می زنم بر دستان پر مهر پدر و مادر عزیزم که بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدسشان را.

تشکر می کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش.

ممنونم از زحمات و راهنمایی های اساتید گرامی خصوصاً جناب آقای دکتر میش مست.

و سپاسگزارم از تمام دوستانی که در تهیه این پایان نامه از یاریم دریغ ننمودند، آقایان حمید محمدی، مجتبی محمدی، محمد سیف پناه، حمید حاج محمدی و . . .

چکیده

در این پایان‌نامه یک الگوریتم بهنیه‌سازی برپایه برنامه‌ریزی خطی که تعمیم الگوریتم صفحه برش دنباله‌ای برای مسائل محدب با قیود نامساوی است، معرفی شده، برای تمام مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌طورپیوسته مشتق‌پذیر شامل قیود نامساوی و تساوی غیرخطی بسط داده شده‌است. روش جدید که برپایه حل زیرمسأله‌های برنامه‌ریزی خطی است یک روش منتخب و خوب برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی است. هدف اولیه الگوریتم توصیف شده این است که سطح کارایی را روی مسائلی که تابع هدف و قیود به‌راحتی محاسبه می‌شوند بهینه کند.

درابتدا کلیات برنامه‌ریزی غیرخطی و الگوریتم‌های متداول حل آن به‌طور خلاصه مورد بررسی قرارگرفته است و پس از مرور الگوریتم‌های موجود برپایه برنامه‌ریزی خطی الگوریتم صفحه برش دنباله‌ای (SCP) برای حل مسائل محدب معرفی شده است. در ادامه به تعمیم الگوریتم SCP پرداخته و همگرایی آن به نقطه ایستای کارش—کان—تاکر اثبات شده است. در پایان هم کاربرد الگوریتم فوق در حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته بیان شده‌است.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی غیرخطی، صفحه‌برش دنباله‌ای، برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته.

فهرست مندرجات

فهرست جداول

فهرست اشکال

فصل ۱

برنامه‌ریزی غیرخطی، کلیات و روش‌های متداول

۱—۱ مقدمه

هنگامی‌که می‌خواهیم یک مدل ریاضی را برای کاربردهای زندگی واقعی شبیه‌سازی کنیم بهترین راه به‌کار بردن الگوریتم بهینه‌سازی ریاضی برای کمینه‌سازی یک تابع هزینه معروف، محدود به یک سری قیود است. یک مثال نوعی کمینه‌سازی وزن یک ساختار مکانیکی نسبت به وزنه‌های مشخص و قیودی برای عکس‌العمل‌های دینامیکی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های مجاز است. امروزه مسائل طراحی عملی و صنعتی مرکب زیادی به‌وسیله الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی حل شده بدون اینکه هیچ شانسی برای نگرش‌های تجربی و سنتی برای حصول نتایج برابر وجود داشته باشد.

تنوع زیادی از انواع مختلف مسائل بهینه‌سازی وجود دارد، به‌طور نمونه برنامه‌ریزی‌های خطی، درجه دوم، غیرخطی مقید و نامقید، پویا، اندازه بزرگ، نیمه معین، ناهموار، صحیح آمیخته، کنترل بهینه، بهینه‌سازی تصادفی و ....

در این فصل ما فقط مسائل هموار یعنی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مقید مشتق‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. در ادامه این فصل متداول‌ترین روش‌هاو الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به طور کاملاً خلاصه معرفی خواهندشد. توجه کنید که تشریح کامل این الگوریتم‌ها در این مجال نمی‌گنجد، لذا تنها جهت آشنایی با راهبرد اصلی الگوریتم‌ها و مقایسه آنها با الگوریتم جدیدی که در فصل‌های آینده به تفصیل خواهد آمد، این فصل طراحی شده است. [۱]،[۱۰]،[۱۳]و [۱۹]

۱—۲ مفاهیم کلی

مسئله برنامه‌ریزی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \qquad\qquad , \\ s.t. \quad & g_j(\mathbf{x}) = ۰, \quad j = ۱, \ldots, m_e, \\ & g_j(\mathbf{x}) \geq ۰, \quad j = m_e + ۱, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{۱—۱}$$

در اینجا،$\mathbf{x}$ یک بردار n بعدی، که بردار متغیرهای مسئله است، $f(\mathbf{x})$ تابع هدف یا تابع هزینه برای کمینه شدن تحت قیود غیرخطی تساوی و نامساوی مفروض $g_j(\mathbf{x}), j = ۱, \ldots, m$ هستند. این توابع روی $\mathbb{R}^n$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر فرض می‌شوند. از فرمول‌بندی فوق نتیجه می‌شود که اجازه نداریم از متغیرهای گسسته و صحیح استفاده کنیم. مدل (۱—۱) برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) نامیده می‌شود.

پیش از معرفی و بررسی الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌طور خلاصه به برخی مفاهیم مورد نیاز در نظریه بهینه‌سازی می‌پردازیم:

گرادیان تابع حقیقی $f(\mathbf{x})$ عبارت است از:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_۱} f(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}) \right)^T .$$

مشتق‌گیری مجدد ماتریس هسین تابع $f(\mathbf{x})$ را به‌دست می‌دهد که عبارت است از:

$$\nabla^۲ f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^۲}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \right)_{i,j=۱,\ldots,n}$$

ماتریس ژاکوبین تابع برداری $F(\mathbf{x}) = (f_۱(\mathbf{x}), \ldots, f_l(\mathbf{x}))^T$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(\mathbf{x})\right)_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,l}$$

که به‌فرم زیر نیز نوشته می‌شود.

$$\nabla F(\mathbf{x}) = (\nabla f_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla f_l(\mathbf{x})).$$

ابزار اصلی برای استخراج شرایط بهینگی و الگوریتم‌های بهینه‌سازی تابع لاگرانژ نامیده می‌شود به‌صورت زیر برای تمام $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ تعریف می‌شود.

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\mathbf{x})$$

منظور از تعریف $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ پیوند تابع هدف $f(\mathbf{x})$ و قیود $g_j(\mathbf{x}),\ j = 1, \ldots, m$ است متغیرهای u_j مضارب‌لاگرانژ مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی نامیده می‌شوند. به‌علاوه ناحیه شدنی که مجموعه تمام جواب‌های شدنی است را با P نمایش می‌دهیم،

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, m_e,\ g_j(\mathbf{x}) \geq 0,\ j = m_e + 1, \ldots, m\}.$$

قیود نامساوی فعال نسبت به $\mathbf{x} \in P$ به‌وسیله مجموعه اندیس زیر مشخص می‌شود.

$$I(\mathbf{x}) = \{j :\ g_j(\mathbf{x}) = 0,\ m_e < j \leq m\}.$$

۱—۳   شرایط بهینگی

۱—۳—۱   تحدب و شرایط لازم قیود

در حالت کلی می‌توان انتظار داشت که یک الگوریتم بهینه‌سازی یک مینیمم موضعی را محاسبه کند نه سراسری، یعنی یک نقطه $\mathbf{x}^*$ که برای تمام $\mathbf{x} \in P \cap U(\mathbf{x}^*)$، که $U(\mathbf{x}^*)$ یک همسایگی مناسب برای $\mathbf{x}^*$ است، داشته باشیم:.$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$

هر مینیمم موضعی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی یک مینیمم سراسری است، اگر این مسأله محدب باشد. برای مثال اگر f محدب، برای $j = 1, \ldots, m_e$، g_j خطی و برای $j = m_e + 1, \ldots, m$، g_j مقعر باشند. این شرایط به ناحیه شدنی P تحمیل می‌کند که محدب باشد.

تعریف ۱—۱ تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود، اگر برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in (0, 1)$،

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

و مقعر نامیده می‌شود اگر ‘ $\leq$ ’ و ‘ $\geq$ ’ در نامساوی فوق جابه‌جا شوند.[۱۰]

برای تابع دوبار مشتق‌پذیر f، تحدب معادل این خاصیت است که $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ نیمه معین مثبت باشد، یعنی برای تمام $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{z}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{z} \geq 0$.

اساساً تحدب یک مسأله بهینه‌سازی از دیدگاه نظری مهم است، چون همگرایی، دوگانی یا قضایای دیگر می‌توانند فقط در این حالت خاص اثبات شوند. هرچند در عمل، به‌سختی می‌توان تحقیق کرد که آیا یک مسأله عددی محدب است یا خیر.

برای اینکه شرایط بهینگی فوق را فرمول‌بندی کنیم احتیاج به پیش‌فرض خاصی جهت اجتناب از رفتار

غیرعادی مجموعه شدنی P در یک جواب موضعی داریم. این شرایط را شرایط لازم قیود می‌نامیم.

دراینجا کافیست تعریف زیر برقرار باشد.

تعریف ۱—۲ شرایط لازم قیود در $\mathbf{x}^* \in P$ صدق می‌کند اگر گرادیان قیود فعال (یعنی برای $j \in \{1,\ldots,m_e\} \cup I(\mathbf{x}^*)$ بردارهای $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$) مستقل خطی می‌باشد.[۱۳]

۱—۳—۲ شرایط کارش ـ کان ـ تاکر

برای توسعه و استنباط یک روش بهینه‌سازی، قضایای ذیل ضروری هستند. این قضایا بهینگی را توصیف می‌کنند و بنابراین برای آزمون دقت همگرایی تکرارهای بهینه سازی مهم هستند.

قضیه ۱—۱ **(شرایط لازم بهینگی مرتبه دوم)** فرض کنید f و g_j، $j = 1,\ldots,m$ تا مرتبه دوم به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم موضعی (۱—۱) و شرایط لازم قیود در $\mathbf{x}^*$ برقرار باشد، آنگاه یک $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ موجود است به‌طوری‌که:

$$
\begin{aligned}
u_j^* &\geq 0 \quad , \quad j = m_e + 1,\ldots,m, \\
g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,m_e, \\
g_j(\mathbf{x}^*) &\geq 0 \quad , \quad j = m_e + 1,\ldots,m, \\
\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*) &= 0 \quad , \\
u_j^* g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad , \quad j = m_e + 1,\ldots,m
\end{aligned}
\tag{۱—۲}
$$

برای هر $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ که $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0,\ j \in \{1,\ldots,m_e\} \cup I(\mathbf{x}^*)$

$$\mathbf{s}^T \nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\mathbf{s} \geq 0 \qquad (۳-۱)$$

عبارات (۱-۲) این قضیه شرط کارش ـ کان ـ تاکر[۱] نامیده می‌شود و بیان می‌کند که در یک جواب موضعی، گرادیان تابع هدف می‌تواند به‌وسیله یک ترکیب خطی از گرادیان‌های قیود فعال نمایش داده شود. به‌علاوه گزاره (۱-۳) ایجاب می‌کند که تابع روی فضای مماسی تعریف شده به‌وسیله‌ی قیود فعال معین مثبت است.

قضیه ۱-۲ (شرایط کافی بهینگی مرتبه دوم) فرض کنید f و g_j، $j = 1, \ldots, m$ دوبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ مفروض باشند طوری‌که شرایط زیر برقرار باشند

$$\begin{aligned}
u_j^* &\geq 0 \quad , \quad j = m_e + 1, \ldots, m, \\
g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, m_e, \\
g_j(\mathbf{x}^*) &\geq 0 \quad , \quad j = m_e + 1, \ldots, m, \\
\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) &= 0 \quad , \\
u_j^* g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad , \quad j = m_e + 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

برای هر $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ که $\mathbf{s} \neq 0,\ \nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0,\ j = 1, \ldots, m_e$ و برای هر $\mathbf{s}$ که

$\mathbf{u}_j^* > 0,\ \nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0,\ j = m_e + 1, \ldots, m$، داشته باشیم:

$$\mathbf{s}^T \nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\mathbf{s} > 0$$

[۱] Karush-Kuhn-Tucker Conditions

آنگاه $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم موضعی منفرد برای f روی P است، یعنی یک همسایگی $U(\mathbf{x}^*)$ برای $\mathbf{x}^*$ وجود دارد که برای هر $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ و $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^*) \cap P$، $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$. [۱۰]

۱—۴ الگوریتم‌های بهینه‌سازی

در این بخش به‌طور خلاصه راهبردهای اصلی تعدادی از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی مقید را توضیح می‌دهیم.

- روش‌های جریمه و مانع
- روش‌های نقطه درونی
- روش‌های کاهش گرادیان تعمیم‌یافته
- روش‌های لاگرانژ افزوده
- روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم دنباله‌ای
- روش‌های برنامه‌ریزی محدب دنباله‌ای

۱—۴—۱ روش‌های جریمه و مانع

روش‌های جریمه و مانع‌از اولین تلاشها برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید هستند.[۱۰] ایده اصلی این روش‌ها ایجاد یک دنباله از مسائل بهینه‌سازی نامقید و حل آنها به‌وسیله روش‌های کمینه‌سازی استاندارد است، طوری‌که مینیمم مسائل نامقید به جواب مساله مقید همگرا باشد. برای ساده شدن این مفهوم، در این