

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

یک الگوریتم بهینه سازی بر پایه برنامه ریزی خطی برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر حسن میش مست نهی

تحقیق و نگارش:

علی محمدی

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

تیرماه 1390

تقديم به...

پيشگاه مقدس حضرت صاحب الزمان (عج)

با آرزوی تعجيل در فرجش

سپاس گزارى... پ

سپاس خداوندگار حکيم را که با لطف بی کران خود آدمی را به زیور عقل آراست.

بوسه می زنم بر دستان پر مهر پدر و مادر عزیزم که بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدسشان را.

مشکرمی کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و کرمای امید بخش وجودش.

ممنونم از زحمات و راهنمایی های اساتید گرامی خصوصاً جناب آقای دکتر میثم مست.

و سپاسگزارم از تمام دوستانی که در تهیه این پایان نامه از یاریم دریغ ننمودند، آقایان حمید محمدی، مجتبی محمدی، محمد سیف پناه، حمید

حاج محمدی و...

چکیده

در این پایان نامه یک الگوریتم بهینه سازی برپایه برنامه ریزی خطی که تعمیم الگوریتم صفحه برش دنباله ای برای مسائل محدب با قیود نامساوی است، معرفی شده، برای تمام مسائل برنامه ریزی غیرخطی به طور پیوسته مشتق پذیر شامل قیود نامساوی و تساوی غیرخطی بسط داده شده است. روش جدید که برپایه حل زیرمسئله های برنامه ریزی خطی است یک روش منتخب و خوب برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی است. هدف اولیه الگوریتم توصیف شده این است که سطح کارایی را روی مسائلی که تابع هدف و قیود به راحتی محاسبه می شوند بهینه کند.

در ابتدا کلیات برنامه ریزی غیرخطی و الگوریتم های متداول حل آن به طور خلاصه مورد بررسی قرار گرفته است و پس از مرور الگوریتم های موجود برپایه برنامه ریزی خطی الگوریتم صفحه برش دنباله ای (SCP) برای حل مسائل محدب معرفی شده است. در ادامه به تعمیم الگوریتم SCP پرداخته و همگرایی آن به نقطه ایستای کارش - کان - تاکر اثبات شده است. در پایان هم کاربرد الگوریتم فوق در حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی صحیح آمیخته بیان شده است.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی غیرخطی، صفحه برش دنباله ای، برنامه ریزی غیرخطی صحیح آمیخته.

فهرست مندرجات

۱	برنامه‌ریزی غیرخطی، کلیات و روش‌های متداول	۱
۲	۱-۱ مقدمه	۱-۱
۳	۲-۱ مفاهیم کلی	۲-۱
۵	۳-۱ شرایط بهینگی	۳-۱
۵	۱-۳-۱ تحدب و شرایط لازم قیود	۱-۳-۱
۶	۲-۳-۱ شرایط کارش - کان - تاکر	۲-۳-۱
۸	۴-۱ الگوریتم‌های بهینه‌سازی	۴-۱
۸	۱-۴-۱ روش‌های جریمه و مانع	۱-۴-۱
۱۰	۲-۴-۱ روش‌های لاگرانژ افزوده	۲-۴-۱
۱۱	۳-۴-۱ روش‌های نقطه درونی	۳-۴-۱
۱۳	۴-۴-۱ روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم دنباله‌ای	۴-۴-۱
۱۶	۵-۴-۱ روش‌های کاهش گرادیان تعمیم‌یافته	۵-۴-۱

۱۷ روش‌های برنامه‌ریزی محدب دنباله‌ای	۶-۴-۱
۲۰ الگوریتم‌های موجود بر پایه برنامه‌ریزی خطی	۲
۲۱ مقدمه	۱-۲
۲۱ روش صفحه برش کلی	۲-۲
۲۱ روش صفحه برش	۱-۲-۲
۲۲ شکل کلی الگوریتم	۲-۲-۲
۲۳ الگوریتم صفحه برش محدب کلی	۳-۲-۲
۲۵ بهسازی الگوریتم ، الگوریتم ابرصفحه پشتیبان	۴-۲-۲
۲۷ حذف کردن قیود غیرلازم	۵-۲-۲
۲۷ روش تقریبی	۳-۲
۲۸ تشریح ریاضی	۱-۳-۲
۳۱ برنامه‌ریزی خطی متوالی	۴-۲
۳۲ کلیات الگوریتم و روش	۱-۴-۲
۳۴ مرحله برنامه‌ریزی خطی	۲-۴-۲
۳۵ تعیین ناحیه اطمینان برای مرحله برنامه‌ریزی خطی	۳-۴-۲
۳۶ نقطه کوشی	۴-۴-۲
۳۷ گام EQP	۵-۴-۲
۳۸ گام آزمایشی	۶-۴-۲
۳۹ طرح کلی الگوریتم	۷-۴-۲

۴۱	الگوریتم صفحه برش دنباله‌ای برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی محدب	۳
۴۲ مقدمه	۱-۳
۴۳ کلیات مسئله و الگوریتم	۲-۳
۴۴ زیرتکرارهای LP	۳-۳
۴۴ جستجوی خطی	۱-۳-۳
۴۵ معیار توقف زیرتکرار	۲-۳-۳
۴۶ تکرار NLP	۴-۳
۴۷ تعیین تکرارهای قابل قبول	۱-۴-۳
۴۸ معیار توقف	۵-۳
۴۸ الگوریتم SCP	۶-۳
۵۰ تشریح یک تکرار NLP	۷-۳
۵۳ بررسی الگوریتم	۸-۳
۵۳ مسأله LP	۱-۸-۳
۵۵ مسائل LP نشدنی	۲-۸-۳
۵۶ جستجوی خطی	۳-۸-۳

۵۷	۳-۸-۴	برآورد مضارب لاگرانژ
۵۷	۳-۸-۵	برآوردهای هسین
۵۸	۳-۹	آزمون عددی
۶۱	۴	یک الگوریتم جدید برپایه برنامه‌ریزی خطی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی
۶۲	۴-۱	مقدمه
۶۲	۴-۲	مرور کلی الگوریتم
۶۴	۴-۳	تشریح الگوریتم
۶۴	۴-۳-۱	زیرتکرارهای برنامه‌ریزی خطی
۶۹	۴-۳-۲	تکرارهای NLP
۷۳	۴-۳-۳	بهنگام‌سازی کران‌های ناحیه اطمینان
۷۴	۴-۳-۴	معیار توقف تکرار NLP
۷۵	۴-۳-۵	الگوریتم SCP
۷۷	۴-۴	همگرایی
۸۹	۴-۵	آزمون عددی
۹۲	۵	کاربرد الگوریتم صفحه برش دنباله‌ای در حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته

۹۳	مقدمه	۱-۵
۹۴	پیشینه حل مسائل MINLP	۲-۵
۹۷	الگوریتم	۳-۵
۹۷	خلاصه الگوریتم	۱-۳-۵
۹۹	شاخه و کران	۲-۳-۵
۱۰۰	حل زیرمسائل NLP	۳-۳-۵
۱۰۱	انتخاب متغیر شاخه‌سازی	۴-۳-۵
۱۰۱	شیوه شاخه‌سازی	۵-۳-۵
۱۰۲	انتخاب جهت شاخه‌سازی	۶-۳-۵
۱۰۳	به دست آوردن کران‌های پایین	۷-۳-۵
۱۰۴	کمینه‌سازی تعداد زیرتکرارهای LP	۸-۳-۵
۱۰۴	همگرایی به یک جواب بهین	۹-۳-۵
۱۰۵	آزمون عددی	۴-۵
۱۰۸		نتیجه‌گیری و پیشنهاد	A
۱۱۰		مراجع	B
۱۱۴		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	C

فهرست جداول

جدول ۱-۳	تشریح مسائل آزمون	۵۹
جدول ۲-۳	مقایسه الگوریتم SCP، کلی و نرم افزار LANCELOT	۶۰
جدول ۱-۴	مقایسه الگوریتم SCP و نرم افزارهای LANCELOT و DONLP2	۹۰
جدول ۱-۵	تشریح مسائل آزمون	۱۰۵
جدول ۲-۵	مقایسه الگوریتم SCP با روش های دیگر	۱۰۶

فهرست اشکال

۲۳	شکل ۱-۲ روش صفحه برش
۲۶	شکل ۲-۲ الگوریتم ابرصفحه پشتیبان
۵۲	شکل ۱-۳ زیرتکرار اول از تکرار NLP
۵۲	شکل ۲-۳ زیرتکرار دوم از تکرار NLP
۵۵	شکل ۳-۳ جهت جستجو در گام دوم بدون قید مزدوج
۵۶	شکل ۴-۳ جستجوی خطی بر مبنای M و \bar{L}

فصل ۱

برنامه‌ریزی غیرخطی، کلیات و روش‌های

متداول

۱-۱ مقدمه

هنگامی که می‌خواهیم یک مدل ریاضی را برای کاربردهای زندگی واقعی شبیه‌سازی کنیم بهترین راه به‌کار بردن الگوریتم بهینه‌سازی ریاضی برای کمینه‌سازی یک تابع هزینه معروف، محدود به یک سری قیود است. یک مثال نوعی کمینه‌سازی وزن یک ساختار مکانیکی نسبت به وزنه‌های مشخص و قیودی برای عکس‌العمل‌های دینامیکی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های مجاز است. امروزه مسائل طراحی عملی و صنعتی مرکب زیادی به‌وسیله الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی حل شده بدون اینکه هیچ شانس برای نگرش‌های تجربی و سنتی برای حصول نتایج برابر وجود داشته باشد.

تنوع زیادی از انواع مختلف مسائل بهینه‌سازی وجود دارد، به‌طور نمونه برنامه‌ریزی‌های خطی، درجه دوم، غیرخطی مقید و نامقید، پویا، اندازه بزرگ، نیمه معین، ناهموار، صحیح آمیخته، کنترل بهینه، بهینه‌سازی تصادفی و ...

در این فصل ما فقط مسائل هموار یعنی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مقید مشتق‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. در ادامه این فصل متداول‌ترین روش‌ها و الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌طور کاملاً خلاصه معرفی خواهند شد. توجه کنید که تشریح کامل این الگوریتم‌ها در این مجال نمی‌گنجد، لذا تنها جهت آشنایی با راهبرد اصلی الگوریتم‌ها و مقایسه آنها با الگوریتم جدیدی که در فصل‌های آینده به تفصیل خواهد آمد،

این فصل طراحی شده است. [۱]، [۱۰]، [۱۳] و [۱۹]

۱-۲ مفاهیم کلی

مسئله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m_e, \\ & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1-1)$$

در اینجا \mathbf{x} یک بردار n بعدی، که بردار متغیرهای مسئله است، $f(\mathbf{x})$ تابع هدف یا تابع هزینه برای کمینه شدن تحت قيود غیرخطی تساوی و نامساوی مفروض $g_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, m$ هستند. این توابع روی \mathbb{R}^n به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر فرض می‌شوند. از فرمول‌بندی فوق نتیجه می‌شود که اجازه نداریم از متغیرهای گسسته و صحیح استفاده کنیم. مدل (1-1) برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) نامیده می‌شود.

پیش از معرفی و بررسی الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌طور خلاصه به برخی مفاهیم مورد نیاز در نظریه بهینه‌سازی می‌پردازیم:

گرادیان تابع حقیقی $f(\mathbf{x})$ عبارت است از:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}) \right)^T.$$

مشتق‌گیری مجدد ماتریس هسین تابع $f(\mathbf{x})$ را به دست می‌دهد که عبارت است از:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

ماتریس ژاکوبین تابع برداری $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_l(\mathbf{x}))^T$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(\mathbf{x}) \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, l}$$

که به فرم زیر نیز نوشته می‌شود.

$$\nabla F(\mathbf{x}) = (\nabla f_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_l(\mathbf{x})).$$

ابزار اصلی برای استخراج شرایط بهینگی و الگوریتم‌های بهینه‌سازی تابع لاگرانژ نامیده می‌شود به صورت

زیر برای تمام $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ تعریف می‌شود.

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m u_j g_j(\mathbf{x})$$

منظور از تعریف $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ پیوند تابع هدف $f(\mathbf{x})$ و قیود $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$ است متغیرهای u_j

مضارب لاگرانژ مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی نامیده می‌شوند. به علاوه ناحیه شدنی که مجموعه تمام جواب‌های

شدنی است را با P نمایش می‌دهیم،

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, m_e, g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = m_e + 1, \dots, m\}.$$

قیود نامساوی فعال نسبت به $\mathbf{x} \in P$ به وسیله مجموعه اندیس زیر مشخص می‌شود.

$$I(\mathbf{x}) = \{j : g_j(\mathbf{x}) = 0, m_e < j \leq m\}.$$

۳-۱ شرایط بهینگی

۱-۳-۱ تحدب و شرایط لازم قیود

در حالت کلی می‌توان انتظار داشت که یک الگوریتم بهینه‌سازی یک مینیمم موضعی را محاسبه کند نه سراسری، یعنی یک نقطه \mathbf{x}^* که برای تمام $\mathbf{x} \in P \cap U(\mathbf{x}^*)$ که $U(\mathbf{x}^*)$ یک همسایگی مناسب برای \mathbf{x}^* است، داشته باشیم: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$.

هر مینیمم موضعی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی یک مینیمم سراسری است، اگر این مسأله محدب باشد. برای مثال اگر f محدب، برای $g_j, j = 1, \dots, m_e$ خطی و برای $g_j, j = m_e + 1, \dots, m$ مقعر باشند. این شرایط به ناحیه شدنی P تحمیل می‌کند که محدب باشد.

تعریف ۱-۱ تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود، اگر برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$

و مقعر نامیده می‌شود اگر ' \leq ' و ' \geq ' در نامساوی فوق جابه‌جا شوند. [۱۰]

برای تابع دوبار مشتق‌پذیر f ، تحدب معادل این خاصیت است که $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ نیمه معین مثبت باشد، یعنی برای تمام $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{z}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{z} \geq 0$.

اساساً تحدب یک مسأله بهینه‌سازی از دیدگاه نظری مهم است، چون همگرایی، دوگانگی یا قضایای دیگر می‌توانند فقط در این حالت خاص اثبات شوند. هرچند در عمل، به‌سختی می‌توان تحقیق کرد که آیا یک مسأله عددی محدب است یا خیر.

برای اینکه شرایط بهینگی فوق را فرمول‌بندی کنیم احتیاج به پیش‌فرض خاصی جهت اجتناب از رفتار

غیرعادی مجموعه شدنی P در یک جواب موضعی داریم. این شرایط را شرایط لازم قیود می‌نامیم. در اینجا کفایت تعریف زیر برقرار باشد.

تعریف ۲-۱ شرایط لازم قیود در $\mathbf{x}^* \in P$ صدق می‌کند اگر گرادینان قیود فعال (یعنی برای

$$j \in \{1, \dots, m_e\} \cup I(\mathbf{x}^*)$$
 بردارهای $(\nabla g_j(\mathbf{x}^*))$ مستقل خطی می‌باشد. [۱۳]

۲-۳-۱ شرایط کارش - کان - تاکر

برای توسعه و استنباط یک روش بهینه‌سازی، قضایای ذیل ضروری هستند. این قضایا بهینگی را توصیف می‌کنند و بنابراین برای آزمون دقت همگرایی تکرارهای بهینه‌سازی مهم هستند.

قضیه ۱-۱ (شرایط لازم بهینگی مرتبه دوم) فرض کنید f و g_j ، $j = 1, \dots, m$ تا مرتبه دوم به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و \mathbf{x}^* یک مینیمم موضعی (۱-۱) و شرایط لازم قیود در \mathbf{x}^* برقرار باشد، آنگاه یک $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} u_j^* &\geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, m_e, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &\geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m, \\ \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) &= 0, \\ u_j^* g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2-1)$$

برای هر $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ که $j \in \{1, \dots, m_e\} \cup I(\mathbf{x}^*)$ $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0$,

$$\mathbf{s}^T \nabla_{\mathbf{x}}^{\downarrow} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \mathbf{s} \geq 0 \quad (3-1)$$

عبارات (۱-۲) این قضیه شرط کارش - کان - تاکرا^۱ نامیده می‌شود و بیان می‌کند که در یک جواب موضعی، گرادیان تابع هدف می‌تواند به وسیله یک ترکیب خطی از گرادیان‌های قیود فعال نمایش داده شود. به علاوه گزاره (۱-۳) ایجاب می‌کند که تابع روی فضای مماسی تعریف شده به وسیله قیود فعال معین مثبت است.

قضیه ۱-۲ (شرایط کافی بهینگی مرتبه دوم) فرض کنید f و g_j ، $j = 1, \dots, m$ دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ مفروض باشند طوری که شرایط زیر برقرار باشند

$$\begin{aligned} u_j^* &\geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, m_e, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &\geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m, \\ \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) &= 0, \\ u_j^* g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m \end{aligned}$$

برای هر $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ که $\mathbf{s} \neq 0$ ، $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0$ ، $j = 1, \dots, m_e$ و برای هر \mathbf{s} که

$$u_j^* > 0, \quad \nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s} = 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m$$

$$\mathbf{s}^T \nabla_{\mathbf{x}}^{\downarrow} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \mathbf{s} > 0$$

^۱ Karush-Kuhn-Tucker Conditions

آنگاه x^* یک مینیمم موضعی منفرد برای f روی P است، یعنی یک همسایگی $U(x^*)$ برای x^* وجود دارد که برای هر $x \neq x^*$ و $x \in U(x^*) \cap P$ ، $f(x^*) < f(x)$. [۱۰]

۴-۱ الگوریتم‌های بهینه‌سازی

در این بخش به طور خلاصه راهبردهای اصلی تعدادی از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی مقید را توضیح می‌دهیم.

- روش‌های جریمه و مانع
- روش‌های نقطه درونی
- روش‌های کاهش گرادیان تعمیم‌یافته
- روش‌های لاگرانژ افزوده
- روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم دنباله‌ای
- روش‌های برنامه‌ریزی محدب دنباله‌ای

۱-۴-۱ روش‌های جریمه و مانع

روش‌های جریمه و مانع از اولین تلاشها برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید هستند. [۱۰] ایده اصلی این روش‌ها ایجاد یک دنباله از مسائل بهینه‌سازی نامقید و حل آنها به وسیله روش‌های کمینه‌سازی استاندارد است، طوری که مینیمم مسائل نامقید به جواب مساله مقید همگرا باشد. برای ساده شدن این مفهوم، در این