

فهرست مطالب

۱	مقدمه و پیش درآمد	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۱	توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل	۲.۱
۵	مشخصه سازی توزیع های با نرخ شکست غیر یکنوا	۱.۲.۱
۶	آماره کل زمان آزمایش و تابع نرخ شکست غیر یکنوا	۲.۲.۱
۸	برخی اندازه های قابلیت اعتماد و کاربرد آنها در آب-بندی	۳.۱
۱۰	اندازه های قابلیت اعتماد توزیع های گسسته	۴.۱
۱۲	چند توزیع وزنی خاص	۵.۱
۱۵	برخی توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل	۶.۱
۱۷	طول عمر سیستم های k از n	۷.۱
۲۲	میانگین و صدک های مانده عمر توزیع های با نرخ شکست وانی شکل	۲
۲۲	مقدمه	۱.۲
۲۳	میانگین مانده عمر	۲.۲
۲۳	توزیع های پیوسته	۱.۲.۲
۲۷	توزیع های گسسته	۲.۲.۲
۳۰	صدک مانده عمر	۳.۲
۳۰	توزیع های پیوسته	۱.۳.۲
	مشخصه سازی تابع صدک مانده عمر برای توزیع های با نرخ شکست وانی	۲.۳.۲
۳۱	شکل	
	مشخصه سازی تابع صدک مانده عمر برای توزیع های با نرخ شکست وارون	۳.۳.۲
۳۶	وانی شکل	
۳۹	توزیع های گسسته	۴.۳.۲

۴۴	نقطه تغییر قابلیت اعتماد شرطی و میانگین مانده عمر برای توزیع های وزنی	۳
۴۴	مقدمه	۱.۳
۴۵	برخی از ویژگی های قابلیت اعتماد آماره های مرتب	۲.۳
۴۷	چند مدل با نرخ شکست وانی شکل و آماره های مرتب آنها	۱.۲.۳
۵۳	ماکسیمم قابلیت اعتماد شرطی	۲.۲.۳
۵۷	ماکسیمم میانگین مانده عمر توزیع های وزنی	۳.۲.۳
۶۲	برخی از ویژگی های قابلیت اعتماد رکوردها	۳.۳
۶۴	مثال هایی از توزیع هایی با نرخ شکست وانی شکل و نرخ شکست رکورد آنها	۱.۳.۳
۶۸	ماکسیمم قابلیت اعتماد شرطی و میانگین مانده عمر	۲.۳.۳
۷۰	ویژگی های قابلیت اعتماد نرخ شکست و ارون متناسب	۴.۳
۷۱	مثال هایی از توزیع های با نرخ شکست وانی شکل	۱.۴.۳
۷۴	ماکسیمم قابلیت اعتماد شرطی و میانگین مانده عمر	۲.۴.۳
۷۶	نقطه تغییر صدک مانده عمر برای توزیع های وزنی با نرخ شکست وانی شکل	۴
۷۶	مقدمه	۱.۴
۷۷	نقطه تغییر تابع α -PRL برای توزیع های وزنی با نرخ شکست وانی شکل	۲.۴
۷۹	آماره های مرتب	۱.۲.۴
۸۰	رکوردها	۲.۲.۴
۸۲	مدل نرخ شکست معکوس متناسب	۳.۲.۴
۸۴	نقطه تغییر تابع MRL برای توزیع های وزنی با نرخ شکست و ارون وانی شکل	۳.۴
۸۷	نقطه تغییر تابع α -PRL برای توزیع های وزنی با نرخ شکست و ارون وانی شکل	۴.۴
۹۱	چند توزیع طول عمر گسسته با نرخ شکست وانی شکل	۵
۹۱	مقدمه	۱.۵
۹۳	توزیع وایبل اصلاح شده گسسته	۲.۵
۹۵	ارزیابی مدل	۱.۲.۵
۹۷	برآورد پارامترها	۲.۲.۵
۹۷	مطالعه شبیه سازی	۳.۲.۵
۹۸	مثال های کاربردی	۴.۲.۵
۱۰۳	چند توزیع گسسته با نرخ شکست وانی شکل	۳.۵
۱۰۶	برآورد پارامترها	۱.۳.۵
۱۰۸	شبیه سازی	۲.۳.۵

۱۱۵	۶	میانگین و صدک مانده عمر سیستم های سری و موازی
۱۱۵	۱.۶	مقدمه
۱۱۶	۲.۶	میانگین مانده عمر سیستم های موازی
۱۱۸	۳.۶	صدک مانده عمر یک سیستم موازی
۱۲۰	۱.۳.۶	نتایج جدید در ارتباط با صدک مانده عمر سیستم های موازی
۱۲۸	۴.۶	صدک مانده عمر سیستم های سری

لیست تصاویر

- ۱.۱ مدل نرخ شکست وانی شکل. این نمودار نرخ شکست مربوط به مدل طول عمری است که به داده های واقعی برازش شده است. ۴
- ۲.۱ مدل نرخ شکست وارون وانی شکل. این نمودار تابع نرخ شکست مدل طول عمری است که داده های واقعی را توصیف می کند. ۵
- ۳.۱ (a) تابع نرخ شکست (۲۹.۱) برای چند مقدار از پارامترها. (b) تابع نرخ شکست (۳۰.۱) برای مقادیری از پارامترها. ۱۷
- ۴.۱ (a) تابع نرخ شکست (۳۱.۱) برای دو دسته از پارامترها. (b) تابع نرخ شکست معرفی شده در (۳۲.۱) برای پارامترهای مختلف. ۱۸
- ۵.۱ (a) صورت های مختلف تابع نرخ شکست (۳۳.۱). (b) شکل های ممکن تابع نرخ شکست (۳۴.۱). ۱۸
- ۶.۱ (a) شکل های مختلف تابع نرخ شکست مدل (۳۷.۱). (b) تابع نرخ شکست معرفی شده در (۳۹.۱) برای مقادیری از پارامترها. ۱۹
- ۷.۱ (a) تابع نرخ شکست مربوط به مدل (۴۰.۱) برای مقادیر مختلف ρ و k . (b) تابع نرخ شکست (۴۱.۱) برای پارامترهای مختلف. ۱۹
- ۱.۲ (a) تابع نرخ شکست مدل وایبل سه بخشی در مثال ۱.۲. (b) تابع MRL برای این مدل. ۲۶
- ۲.۲ (a) تابع نرخ شکست توزیع لگ-لجستیک در مثال ۱.۲. (b) تابع MRL این توزیع. ۲۷
- ۳.۲ (a) تابع MRL در مثال ۲.۲ که نشان دهنده یک فرم وارون وانی است. (b) تابع نرخ شکست مربوط به این مدل که برخلاف انتظار وانی شکل نیست. ۲۸
- ۴.۲ (a) تابع α -PRL برای توزیع وایبل چند بخشی و برای سه مقدار مختلف α در مثال ۳.۲. (b) تابع α -PRL برای توزیع لگ-لجستیک در این مثال برای سه مقدار α ۴۰
- ۱.۳ (a) نمودار $h_{۳:۳}(t)$ در مثال ۱.۳. (b) نمودار $h_{۲:۲}(t)$ در مثال ۲.۳. ۴۸
- ۲.۳ (a) نمودار $h_{۲:۲}(t)$ در مثال ۳.۳. (b) نمودار $h_{۲:۲}(t)$ و $h_{۲:۳}(t)$ در مثال ۵.۳. ۵۰

- ۳.۳ در هر دو نمودار محور عمودی نشان دهنده تابع های قابلیت اعتماد شرطی توصیف شده در مثال ۶.۳ هستند. ۵۶
- ۴.۳ (a) توابع میانگین مانده عمر $m(t)$ ، $m_2(t)$ و $m_3(t)$ در مثال ۷.۳. (b) توابع میانگین مانده عمر مربوط به توابع نرخ شکست $h(t)$ و $h_{2,2}(t)$ در مثال ۸.۳. ۶۰
- ۵.۳ (a) نمودار $h(t)$ ، $h_{2,3}(t)$ و $h_{2,4}(t)$ در مثال ۱۰.۳ (b) نمودار $h(t)$ و $h_{2,3}(t)$ در مثال ۱۲.۳. ۶۶
- ۶.۳ (a) نمودار $h_{2,2}(t)$ ، $h_{2,3}(t)$ و $h_{3,3}(t)$ در مثال ۱۴.۳. (b) نمودار توابع قابلیت اعتماد شرطی معرفی شده در این مثال. ۶۹
- ۷.۳ نمودار توابع میانگین مانده عمر مورد بررسی در مثال ۱۵.۳. ۷۰
- ۸.۳ (a) محور عمودی تابع های نرخ شکست معرفی شده در مثال ۱۸.۳ را نشان می دهد. (b) محور عمودی مقادیر تابع های قابلیت اعتماد شرطی در مثال ۱۹.۳ را نمایش می دهد. ۷۳
- ۹.۳ نمودار تابع MRL. ۷۵
- ۱.۴ (a) تابع های نرخ شکست توصیف شده در مثال ۱.۴. (b) تابع های PRL-۵/۵ در مثال ۱.۴. ۸۱
- ۲.۴ (a) محور عمودی نشان دهنده تابع های نرخ شکست معرفی شده در مثال ۲.۴ است. (b) محور عمودی مقادیر تابع PRL-۵/۵ را نشان می دهد. ۸۳
- ۳.۴ محور عمودی نشان دهنده مقادیر تابع PRL-۵/۵ است. ۸۴
- ۴.۴ (a) توابع نرخ شکست مدل های توصیف شده در مثال ۴.۴. (b) توابع MRL مربوط به این مدل ها. ۸۷
- ۵.۴ (a) توابع نرخ شکست برای مدل های توصیف شده در مثال ۵.۴. (b) توابع $q_{0.5}(x)$ برای این مدل ها. ۸۹
- ۱.۵ (a) تابع جرم احتمال و (b) تابع نرخ شکست توزیع DMW. ۹۴
- ۲.۵ نمودار تابع معرفی شده در (۱۲.۵) به ازای $q = 0.5, b = 0.5, c = 1/1$ ۹۶
- ۳.۵ نمودار y در مقابل x ۹۹
- ۴.۵ (a) توابع توزیع تجربی و برازش شده برای داده های آرست. (b) توابع نرخ شکست تجربی و برازش شده برای این داده ها. ۱۰۱
- ۵.۵ (a) تابع توزیع تجربی و برازش شده برای داده های زمان خرابی موتور اتوبوس. (b) تابع نرخ شکست تجربی و برازش شده برای این داده ها. ۱۰۲
- ۶.۵ (a) تابع جرم احتمال (۱۸.۵) برای بعضی پارامترها. (b) تابع نرخ شکست (۲۰.۵) برای بعضی پارامترها. ۱۰۴

- ۷.۵ (a) تابع جرم احتمال (۲۲.۵) برای بعضی پارامترها. (b) تابع نرخ شکست (۲۴.۵) برای بعضی پارامترها. ۱۰۶
- ۸.۵ (a) نمودار y_1 در مقابل x_1 . (b) نمودار y_1 در مقابل x_2 ۱۱۰
- ۹.۵ (a) نمودار مقادیر y_2 در مقابل x_1 . (b) نمودار تابع توزیع تجربی و توابع توزیع برازش شده برای چند مدل گسسته. ۱۱۱
- ۱۰.۵ (a) محورهای عمودی و افقی به ترتیب مقادیر $h(t_i, t_{i+1})$ و t_i را نشان می دهند. (b) توابع نرخ شکست برازش شده به بعضی مدل ها. ۱۱۲
- ۱۱.۵ نمودار تابع میانه مانده عمر، $q_{0.5}(t)$ ، برای مدل (۲۶.۵). ۱۱۴
- ۱۲.۵ نمودار تابع MRL برای مدل (۲۶.۵). ۱۱۴
- ۱.۶ (a) محور عمودی مقادیر توابع صدک مانده عمر در مثال ۱.۶ را نشان می دهد. (b) محور عمودی توابع صدک مانده عمر معرفی شده در مثال ۲.۶ را نشان می دهد. ۱۲۳
- ۲.۶ محور عمودی مقادیر توابع صدک مورد بررسی در مثال ۳.۶ را نشان می دهد. ۱۲۷
- ۳.۶ محور عمودی مقادیر توابع صدک مانده عمر مورد بررسی در مثال ۴.۶ را نشان می دهد. ۱۲۹

لیست جداول

۱۳	بعضی از مدل های وزنی خاص.	۱.۱
۵۲	مدل های در نظر گرفته شده برای بررسی نموداری.	۱.۳
۵۲	فرم نرخ شکست آماره های مرتب برای مدل وایبل اصلاح شده با $a = 1$ و $\lambda = 1$.	۲.۳
	فرم نرخ شکست آماره های مرتب برای مدل تعمیم وایبل اصلاح شده با $\alpha = 1$ و $\lambda = 1$.	۳.۳
۵۲	فرم نرخ شکست آماره های مرتب برای مدل وایبل جمعی با $a = 1$ و $c = 1$.	۴.۳
۷۴	نقاط ماکسیمم کننده توابع قابلیت اعتماد شرطی و MRL در مثال ۱۹.۳.	۵.۳
۸۱	نقطه تغییر تابع PRL-۵/۵ در مثال ۱.۴.	۱.۴
۸۲	نقاط تغییر تابع PRL-۵/۵ در مثال ۲.۴.	۲.۴
۸۴	نقاط تغییر تابع PRL-۵/۵ برای مدل های مثال ۳.۴.	۳.۴
۹۸	برآورد پارامترها و واریانس برآوردگرها با روش نمودار WPP.	۱.۵
۹۹	برآورد پارامترها و واریانس برآوردگرها با روش درستنمایی ماکسیمم.	۲.۵
۹۹	جزء صحیح طول عمرهای معرفی شده در آرست (۱۹۸۷).	۳.۵
۱۰۰	نتایج برازش مدل رگرسیونی.	۴.۵
۱۰۱	برآورد ماکسیمم درستنمایی و مقادیر AIC برای چند مدل گسسته.	۵.۵
۱۰۲	زمان خرابی موتور اتوبوس در ۱۰۰۰ مایل.	۶.۵
۱۰۳	برآورد درستنمایی ماکسیمم و مقادیر AIC برای چند مدل گسسته.	۷.۵
۱۰۹	نتایج شبیه سازی برای مدل (۱۷.۵).	۸.۵
۱۰۹	نتایج شبیه سازی برای مدل (۲۱.۵).	۹.۵
۱۱۰	تعداد دوره های کامل شده تا خرابی برای ۶۰ وسیله الکتریکی.	۱۰.۵
۱۱۳	برآورد درستنمایی ماکسیمم و مقادیر AIC برای چند مدل گسسته.	۱۱.۵

فصل ۱

مقدمه و پیش درآمد

۱.۱ مقدمه

در عصر حاضر، با توجه به اهمیت و کاربردهای ویژه ای که مفاهیم قابلیت اعتماد پیدا کرده اند، بیان تعریف ها و معیارهای دقیق از این مفاهیم و مطالعه پیرامون ویژگی های آنها ضرورت یافته است. در این فصل، تعریف های دقیق از برخی مفاهیم و اندازه های قابلیت اعتماد ارائه می شوند و ویژگی هایی مربوط به آنها بیان می شوند. در بخش ۲.۱، توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل معرفی شده و نتایجی در ارتباط با مشخصه سازی این رده از توزیع ها به طور خلاصه ارائه می شوند. بخش های ۳.۱ و ۴.۱ به معرفی برخی اندازه های قابلیت اعتماد از جمله توابع میانگین مانده عمر^۱ (MRL) و صدک α مانده عمر^۲ (α -PRL) به ترتیب در حالت پیوسته و گسسته اختصاص دارند. در بخش ۵.۱، چند توزیع وزنی خاص، که در این رساله مورد توجه هستند، معرفی می شوند. بخش ۶.۱ به مرور چند توزیع وانی (وارون وانی) شکل می پردازد و در انتها، مقدمه ای در ارتباط با طول عمر یک سیستم k از n در بخش ۷.۱ ارائه می شود.

۲.۱ توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل

یکی از معروف ترین اندازه های قابلیت اعتماد که توزیع مربوطه را مشخصه سازی می کند، تابع نرخ شکست^۴، $h(t)$ ، است و برای یک متغیر طول عمر پیوسته، به عنوان خطر شکست در لحظه t به شرط

^۱ Mean residual life

^۲ α -Percentile residual life

^۳ k -out-of- n system

^۴ Hazard rate function

بقا تا t تفسیر می شود. به عبارت دیگر، $h(t)dt$ احتمال شکست در بازه $[t, t + dt]$ به شرط بقا تا زمان t است. برای یک متغیر طول عمر گسسته، تابع نرخ شکست $h(t)$ احتمال شرطی وقوع شکست در t به شرط بقا تا این لحظه را می دهد.

دو رده مهم از توزیع های طول عمر که بر اساس رفتار تابع نرخ شکست تعریف می شوند، رده توزیع های با نرخ شکست صعودی^۵ (IHR) و رده توزیع های با نرخ شکست نزولی^۶ (DHR) هستند. صعودی بودن نرخ شکست یک متغیر تصادفی نشان دهنده فرسایش یا میرایی بودن در طول زمان است، در حالی که نزولی بودن آن تقویت و بهبود را در طول زمان نشان می دهد.

در بسیاری از موقعیت های طبیعی، با اشیائی (موجودات زنده یا کالاهای تولید شده) سرو کار داریم که سه دوره متفاوت، دوره پر خطر آغازین^۷، دوره مفید^۸ و دوره فرسایش^۹ را در عمر خود تجربه می کنند. شیئی را در نظر بگیرید که در ابتدای عمر در معرض مخاطره های زیادی است و با گذر از دوره پر خطر آغازین، به شرایط مطلوبی می رسد و پس از گذراندن یک دوره مفید طول عمر که خطری جدی آن را تهدید نمی کند، دوره فرسایش که در آن بتدریج فرسوده و مستهلک می شود آغاز می شود. به صورت ساده تر، نرخ شکست در یک بازه ابتدایی عمر اکیداً نزولی، در یک بازه میانی تقریباً ثابت و در انتهای عمر اکیداً صعودی است. در قابلیت اعتماد آماری، چنین رفتاری توسط مدل های طول عمر با نرخ شکست وانی شکل^{۱۰} توصیف می شود. داده های طول عمر متنوعی با نرخ شکست وانی شکل مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند که مطالعه مدل های با نرخ شکست وانی شکل را موجه و معنی دار می کند. لای و زی^{۱۱} (۲۰۰۶) نمونه هایی از این گونه داده ها را جمع آوری کرده اند. آنها تعاریف متنوعی که برای رده توزیع های با نرخ شکست وانی شکل ارائه شده اند، را مرور کردند. در بعضی از این تعریف ها، توزیع های با نرخ شکست صعودی یا نزولی نیز در این رده قرار می گیرند.

به طور مشابه، موقعیت هایی طبیعی وجود دارند که مدل مناسب برای توصیف داده ها در ابتدا نرخ شکستی اکیداً صعودی سپس تقریباً ثابت و در انتها اکیداً نزولی را نشان می دهد. به عبارت دیگر مدل مناسب نرخ شکست وارون وانی شکل^{۱۲} دارد. به عنوان مثال، زمان بازگشت بعضی بیماریها پس از انجام یک درمان مدلی با نرخ شکست وارون وانی شکل دارد. مولفان و محققان زیادی داده های واقعی با چنین مدل نرخ شکستی را مورد بررسی و مطالعه قرار داده اند. برای فهرستی از این گونه داده ها نیز می توان به لای و زی (۲۰۰۶) مراجعه کرد.

^۵Increasing hazard rate

^۶Decreasing hazard rate

^۷Infant mortality period

^۸Useful period

^۹Wear-out period

^{۱۰}Bathtub shaped hazard rate

^{۱۱}Lai and Xie

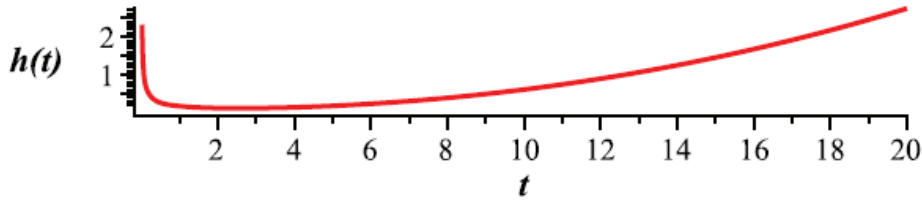
^{۱۲}Upside-down bathtub shaped hazard rate

هر چند بیشتر مطالعات انجام شده در ارتباط با مدل های با نرخ شکست وانی شکل به سه دهه پیش منحصر می شود اما این گونه نرخ شکست در قابلیت اعتماد مهندسی به زمان های دورتری برمی گردد به عنوان مثال می توان به کائو^{۱۳} (۱۹۵۹)، کامینز^{۱۴} (۱۹۶۲) و شومن^{۱۵} (۱۹۶۸) اشاره کرد. راجارشی^{۱۶} و راجارشی^{۱۶} (۱۹۸۸) و لای و همکاران (۲۰۰۱) مطالعات مروری مفیدی در این زمینه انجام داده اند. مولفان زیادی از قبیل گلسر^{۱۷} (۱۹۸۰)، مدهلکار و سیرواستاوا^{۱۸} (۱۹۹۳)، ناوارو و هراندز^{۱۹} (۲۰۰۴)، زی و همکاران (۲۰۰۲) و وانگ^{۲۰} (۲۰۰۰) مدل های طول عمری با نرخ شکست وانی شکل معرفی کرده اند.

رده توزیع های با نرخ شکست وارون وانی شکل شامل توزیع های لگ نرمال^{۲۱}، معکوس وایبل^{۲۲}، معکوس گوسین^{۲۳}، بیرنام سندرس^{۲۴}، لگ لجستیک^{۲۵}، نمایی شده وایبل^{۲۶} و ... است. مدهلکار و سیرواستاوا (۱۹۹۳)، دیمیتراکاپلا^{۲۷} و همکاران (۲۰۰۷) و سیلوا^{۲۸} و همکاران (۲۰۱۰) مدل هایی با نرخ شکست وارون وانی شکل معرفی کردند و از آنها برای برازش به داده های واقعی استفاده نمودند. چانگ^{۲۹} (۲۰۰۰) یک مسئله آب-بندی بهینه را برای مدل های با نرخ شکست وارون وانی شکل مورد مطالعه قرار داد و جیانگ^{۳۰} و همکاران (۲۰۰۳) خواص طول عمر چنین مدل هایی را بررسی و مطالعه کردند.

متغیر طول عمر پیوسته T را با توزیع $F(t)$, $t \in (0, u)$, $0 < u \leq \infty$ و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ در نظر بگیرید. مانده عمر مشروط بر بقا حداقل تا زمان t با نماد

$$T_t = T - t | T > t, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$
^{۱۳}Kao^{۱۴}Kamins^{۱۵}Shooman^{۱۶}Rajarshi and Rajarshi^{۱۷}Glaser^{۱۸}Mudholkar and Sirvastava^{۱۹}Navarro and Hernandez^{۲۰}Wang^{۲۱}Log-Normal^{۲۲}Inverse Weibull^{۲۳}Inverse Gaussian^{۲۴}Birnbaum Saunders^{۲۵}Log-logistic^{۲۶}Exponentiated Weibull^{۲۷}Dimitrakopoulou^{۲۸}Silva^{۲۹}Chang^{۳۰}Jiang



شکل ۱.۱: مدل نرخ شکست وانی شکل. این نمودار نرخ شکست مربوط به مدل طول عمری است که به داده های واقعی برازش شده است.

نمایش داده می شود. می توان اندازه های قابلیت اعتماد را برحسب تابع توزیع متغیر تصادفی T_t که عبارت است از،

$$F_t(x) = 1 - \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \quad (2.1)$$

به دست آورد. بر این اساس، تابع نرخ شکست آن برابر است با،

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(T-t \leq \Delta | T \geq t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} F_t(\Delta),$$

و اگر $f(t)$ تابع چگالی مربوط به T باشد، این تابع به صورت زیر ساده می شود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (3.1)$$

تابع نرخ شکست توزیع طول عمر را نیز مشخصه سازی می کند. در واقع، داریم،

$$\bar{F}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t h(u) du \right\}.$$

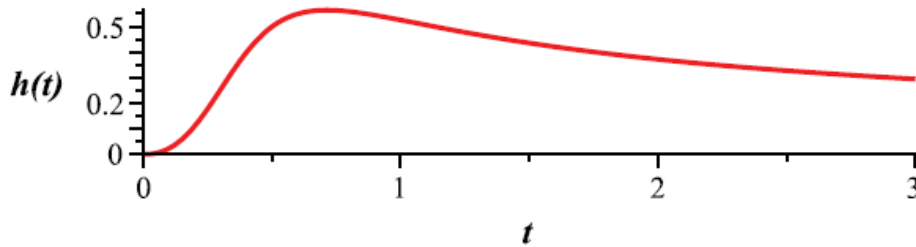
براساس تابع نرخ شکست رده های مهمی از توزیع های طول عمر معرفی شده اند که دو رده بسیار معروف توزیع های IHR و DHR هستند.

تعریف ۱.۱ توزیع F دارای خاصیت IHR است اگر تابع نرخ شکست $h(t)$ صعودی باشد. این توزیع DHR است اگر $h(t)$ نزولی باشد.

تعریف های متنوعی از رده خانواده توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل ارائه شده اند. لای و زی (۲۰۰۶) با اشاره به این مطلب به مرور و بررسی آنها پرداختند. در سرتاسر این رساله، تابع نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل به صورت زیر فرض می شود مگر اینکه به تعریف دیگری اشاره شود.

تعریف ۲.۱ تابع $0 < t < u, 0 < u \leq \infty$ را $h(t)$ وانی شکل با نقاط تغییر $0 < t_0 \leq t_1 < u$ گوئیم اگر این تابع در بازه $(0, t_0)$ نزولی اکید، در بازه (t_0, t_1) ثابت و در بازه (t_1, u) صعودی اکید باشد. t_0 و t_1 را به ترتیب نقطه تغییر اول و دوم این تابع می نامیم. در صورتی که $t_0 = t_1$ باشد، h را وانی شکل با نقطه تغییر t_0 گوئیم.

تابع h را وارون وانی شکل با نقاط تغییر $t_0 \leq t_1$ (وارون وانی شکل با نقطه تغییر t_0) گوئیم هرگاه $-h$ وانی شکل با نقاط تغییر $t_0 \leq t_1$ (وانی شکل با نقطه تغییر t_0) باشد.



شکل ۲.۱: مدل نرخ شکست وارون وانی شکل. این نمودار تابع نرخ شکست مدل طول عمری است که داده های واقعی را توصیف می کند.

شکل ۱.۱ نمودار تابع نرخ شکست یک مدل طول عمر است که به یک دسته داده شامل طول عمر ۶۰ قطعه الکتریکی برازش داده شده است و یک تابع نرخ شکست وانی شکل را نمایش می دهد. برای مشاهده داده ها به جدول III در بینگتن و همکاران (۲۰۰۶) مراجعه کنید.

دیمیتریکاپلا و همکاران (۲۰۰۷) مدل طول عمری با تابع نرخ شکست وارون وانی شکل را معرفی کردند و آن را برای توصیف دسته ای از ۴۶ طول عمر مربوط به یک دستگاه گیرنده و فرستنده هواپیما بکار بردند. شکل ۲.۱ تابع نرخ شکست این مدل برازش یافته را رسم می کند و نشان دهنده مدل طول عمری با نرخ شکست وارون وانی شکل است.

در دو زیر بخش ۱.۲.۱ و ۲.۲.۱ نتایجی در ارتباط با مشخصه سازی تابع نرخ شکست بررسی می شوند که هر چند در فصل های بعد مورد استفاده نیستند، اما با توجه به اهمیت و کاربرد فوق العاده ای که دارند مرور مختصر آنها خالی از لطف نیست.

۱.۲.۱ مشخصه سازی توزیع های با نرخ شکست غیر یکنوا

گلسر (۱۹۸۰) شرایط کافی برای صعودی بودن، نزولی بودن، وانی شکل بودن و وارون وانی شکل بودن تابع نرخ شکست ارائه داد و برای این منظور، تعریف ۳.۱ را در نظر گرفت. برخلاف تعریف ۲.۱، در این تعریف تنها یک نقطه تغییر برای تابع نرخ شکست فرض می شود.

تعریف ۳.۱ تابع نرخ شکست $h(t)$ وانی شکل است هرگاه برای یک $t^* > 0$ ، این تابع روی بازه $(0, t^*)$ نزولی اکید باشد، $h'(t^*) = 0$ و روی بازه (t^*, ∞) صعودی اکید باشد. $h(t)$ وارون وانی شکل است اگر $-h(t)$ وانی شکل باشد.

تابع $\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$ نقش مهمی در مشخص کردن رفتار تابع نرخ خطر دارد و با $h(t)$ به صورت

$$\left(\frac{1}{h(t)}\right)' = \frac{\eta(t)}{h(t)} - 1,$$

رابطه دارد را در نظر بگیرید. در اینجا فرض می شود $f(t)$ دوبار مشتق پذیر است.

قضیه ۱.۱ (گلسر ۱۹۸۰)

(الف) اگر به ازای هر $t > 0$ داشته باشیم $\eta'(t) > 0$ ، آنگاه $h(t)$ اکیداً صعودی است.

(ب) اگر برای هر $t > 0$ داشته باشیم $\eta'(t) < 0$ ، آنگاه $h(t)$ اکیداً نزولی است.

(ج) فرض کنید یک $t_0 > 0$ وجود دارد طوری که برای هر $t \in (0, t_0)$ ، $\eta'(t) < 0$ ، $\eta'(t_0) = 0$ و برای هر $t > t_0$ ، $\eta'(t) > 0$. اگر y_0 ای وجود داشته باشد که $h'(y_0) = 0$ ، آنگاه $h(t)$ وانی شکل است و در غیر این صورت صعودی است.

(د) فرض کنید یک $t_0 > 0$ وجود دارد طوری که برای هر $t \in (0, t_0)$ داشته باشیم $\eta'(t) > 0$ ، $\eta'(t_0) = 0$ و برای هر $t > t_0$ ، $\eta'(t) < 0$. اگر نقطه ای مانند y_0 وجود داشته باشد طوری که $h'(y_0) = 0$ ، آنگاه $h(t)$ وارون وانی شکل است و در غیر این صورت نزولی است.

گلسر (۱۹۸۰) نشان داد کاربرد این نتایج در خانواده توزیع های نمایی بسیار برجسته است و مثالهایی در این زمینه از قبیل تعمیمی از توزیع گاما و نرمال بریده شده، چگالی تعمیم یافته گاما، لگ نرمال، توزیع های آمیخته ای از گاما و توزیع آمیخته وایبل ارائه داد. گپتا و وارن^{۳۱} (۲۰۰۱) این نتایج را برای حالتی که تابع نرخ شکست بیش از یک نقطه تغییر^{۳۲} دارد تعمیم دادند.

۲.۲.۱ آماره کل زمان آزمایش و تابع نرخ شکست غیر یکنوا

فرض کنید $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$ زمانهای مرتب شده از توزیع F باشند. آماره کل زمان آزمایش^{۳۳} (TTT) عبارت است از،

$$H_n\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{j=1}^i T_{(j)} + (n-i)T_{(i+1)} = \sum_{j=1}^i (n-j+1)(T_{(j)} - T_{(j-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن $T_{(0)} = 0$ در نظر گرفته می شود. در واقع با مشاهده i امین زمان وقوع، $T_{(i)}$ ، $H_n\left(\frac{i}{n}\right)$ کران پایینی برای زمان کل n مشاهده می دهد که نسبت به i صعودی است. تحت فرض نمایی بودن توزیع F ، به آسانی نشان داده می شود که $H_n\left(\frac{i}{n}\right)$ دارای توزیع کای دو با $2i$ درجه آزادی است. همچنین آماره مقیاس شده کل زمان آزمایش^{۳۴} به صورت زیر است:

$$\phi_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{H_n\left(\frac{i}{n}\right)}{H_n(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

آماره کل زمان آزمایش برای اولین بار توسط استین و سبل^{۳۵} (۱۹۵۳) به منظور استنباط درباره توزیع نمایی^{۳۶} معرفی شد. بعد از آن، مولفان زیادی کاربرد این آماره را در زمینه هایی از قبیل تشخیص مدل،

^{۳۱}Gupta and Warren

^{۳۲}Change point

^{۳۳}Total time on test

^{۳۴}Scaled total time on test

^{۳۵}Epstein and Sobel

^{۳۶}Exponential distribution

مشخصه سازی رده هایی از توزیع های طول عمر و آزمون فرضیه نشان دادند. فرض کنید $F^{-1}(p) = \inf\{t : F(t) \geq p\}$ تابع معکوس F باشد. آماره TTT به صورت زیر نیز نوشته می شود.

$$H_n\left(\frac{i}{n}\right) = n \int_0^{F_n^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)} \bar{F}_n(u) du,$$

که در آن F_n تابع توزیع تجربی است. با توجه به قضیه گلیونکو-کانتلی^{۳۷} (صفحه ۱۴۰، چانگ ۲۰۰۱) به طور یکنواخت در $u \in \mathbb{R}$ داریم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n(u) = \bar{F}(u),$$

پس، در صورتی که F اکیداً صعودی باشد، برای هر t می توان نوشت

$$\lim_{\frac{i}{n} \rightarrow t, n \rightarrow \infty} F_n^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) = F^{-1}(t).$$

و بنابراین

$$\lim_{\frac{i}{n} \rightarrow t, n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{F_n^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)} \bar{F}_n(u) du}{\int_0^1 \bar{F}_n(u) du} = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du.$$

به عبارت ساده تر

$$\lim_{\frac{i}{n} \rightarrow t, n \rightarrow \infty} \phi_n\left(\frac{i}{n}\right) = \phi(t), \quad (4.1)$$

که در آن $H(t) = \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du$ ، $\phi(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du$ و $\mu = \int_0^\infty \bar{F}(u) du$ به ترتیب تبدیل TTT توزیع F ، تبدیل TTT مقیاس شده آن و میانگین این توزیع اند. برای تابع توزیع اکیداً صعودی F ، $t \in [0, 1]$ ، $\phi(t)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی است و بنابراین (با توجه به لم ۹.۲ A در گات^{۳۸} ۲۰۰۵) همگرایی (۴.۱) به طور یکنواخت بر $t \in [0, 1]$ است.

تبدیل TTT با تابع نرخ شکست به صورت زیر رابطه دارد:

$$\frac{d}{dp} H^{-1}(p)|_{p=F(t)} = \frac{1}{h(t)}.$$

قضیه ۲.۱ نشان می دهد که تبدیل TTT ابزار مفیدی برای مشخصه سازی رده های توزیع های طول عمر با نرخ شکست صعودی، رده توزیع های با نرخ شکست نزولی و توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل است. بارلو و کمپو^{۳۹} (۱۹۷۵) قسمت های "الف" و "ب" را ثابت کردند. لی و تامپسون^{۴۰} (۱۹۷۶) نیز به طور جداگانه قسمت "الف" را نشان دادند. علاوه بر این، برای چندین رده معروف دیگر از توزیع های طول عمر مشخصه سازی هایی بر این اساس اثبات شده است که برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می توان به لای و زی (۲۰۰۶) مراجعه کرد.

^{۳۷}Glivenko-Cantelli Theorem

^{۳۸}Gut

^{۳۹}Barlow and Campo

^{۴۰}Lee and Thompson

قضیه ۲.۱ فرض کنید F یک تابع توزیع پیوسته باشد.

الف) F $IHR(DHR)$ است اگر و تنها اگر $\phi(p)$ مقعر (محدب) باشد.

ب) F نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل دارد اگر و تنها اگر نقطه ای مانند $p_0 \in (0, 1)$ وجود داشته باشد که $\phi(p)$ در $(0, p_0)$ محدب (مقعر) و در $(p_0, 1)$ مقعر (محدب) باشد.

بر اساس این مشخصه سازی، برگمن^{۴۱} (۱۹۷۹) آزمونی برای نمایی بودن توزیع طول عمر در مقابل وانی بودن تابع نرخ شکست ارائه داد. آرست^{۴۲} (۱۹۸۷) توزیع دقیق آماره این آزمون را تحت فرض نمایی بودن بدست آورد.

۳.۱ برخی اندازه های قابلیت اعتماد و کاربرد آنها در آب-بندی

اندازه های مختلفی برای یک متغیر طول عمر مورد مطالعه قرار گرفته است. از این جمله می توان به تابع قابلیت اعتماد، MRL، متوسط میانگین مانده عمر، متوسط هارمونیک میانگین مانده عمر، واریانس مانده عمر، آنتروپی مانده عمر، ضریب تغییرات مانده عمر و α -PRL اشاره کرد. با توجه به اینکه وسائل با نرخ شکست وانی شکل ممکن است در ابتدای عمر در معرض خطر زیادی باشند، بهتر است با ترتیب یک آزمایش آب-بندی آنها را برای کار در عرصه های واقعی یا سپردن به مشتری آماده کرد. در این آزمایش، وسائل به مدت معینی تحت شرایط معمول به کار گرفته می شوند و آنهایی که این دوره را به سلامت سپری کنند مورد تأیید قرار می گیرند. لیمیس و بنک^{۴۳} (۱۹۹۰) و بلاک و ساویتس^{۴۴} (۱۹۹۷) مطالعات مروری خوبی در ارتباط با آب-بندی انجام دادند. صالحی طبس^{۴۵} (۱۳۸۶) نیز به مطالعه پیرامون این موضوع پرداخته است.

می (۱۹۹۴) تابع قابلیت اعتماد شرطی،

$$\bar{F}_t(x) = 1 - F_t(x), \quad (5.1)$$

که $F_t(x)$ در (۲.۱) تعریف شده است را به عنوان معیاری برای آب-بندی در نظر گرفت. بر این اساس، برای مقدار ثابت $\tau > 0$ ، اگر

$$\bar{F}_b(\tau) = \max_{t > 0} \bar{F}_t(\tau),$$

آنگاه b زمان بهینه آب-بندی^{۴۶} را نشان می دهد.

^{۴۱}Bergman

^{۴۲}Aarset

^{۴۳}Leemis and Beneke

^{۴۴}Savits

^{۴۵}Salehi Tabas

^{۴۶}Optimal burn-in time

در صورتی که امید ریاضی T_t در (۱.۱) موجود و متناهی باشد، تابع MRL توزیع F برابر است با،

$$m(t) = E(T_t) = \frac{\int_0^t \bar{F}(u) du}{\bar{F}(t)}. \quad (۶.۱)$$

این تابع به عنوان یک معیار مهم در متون قابلیت اعتماد مورد توجه قرار گرفته است و با توجه به رابطه

$$\bar{F}(t) = \frac{m(0)}{m(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{m(u)} du \right\},$$

توزیع طول عمر مربوطه را مشخصه سازی می کند. تابع نرخ شکست و تابع MRL به صورت زیر با یکدیگر ارتباط دارند.

$$h(t) = \frac{m'(t) + 1}{m(t)}, \quad (۷.۱)$$

این رابطه به سادگی نشان می دهد که $-1 \leq m'(t)$

برای توزیع F ، تابع α -PRL برابر است با،

$$q_\alpha(t) = F_t^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F_t(x) \geq \alpha\},$$

که $F_t(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی T_t ، معرفی شده در (۱.۱) است. با عملیات جبری، تابع صدک مانده عمر به صورت

$$q_\alpha(t) = F^{-1}(1 - \alpha \bar{F}(t)) - t, \quad (۸.۱)$$

حاصل می گردد. جو و پروشان (۱۹۸۴a) بعضی ویژگی های این اندازه قابلیت اعتماد را مطالعه کردند. آنها نشان دادند که برخلاف تابع MRL، تابع α -PRL توزیع طول عمر را مشخصه سازی نمی کند. با اینحال، سنگ و چو (۱۹۹۵) و لین (۲۰۰۹) ثابت کردند دو تابع α -PRL و β -PRL وقتی $\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-\beta)}$ غیر گویا باشد توزیع طول عمر را مشخصه سازی می کنند.

وقتی تابع نرخ شکست پیوسته و تابع α -PRL مشتق پذیر باشد، داریم،

$$q'_\alpha(t) + 1 = \frac{h(t)}{h(t + q_\alpha(t))}. \quad (۹.۱)$$

در متون قابلیت اعتماد آماری، MRL و α -PRL به اندازه های شناخته شده ای که برای توصیف و مطالعه متغیرهای طول عمر قابلیت های زیادی دارند، معروف اند. در بسیاری از مواقع، مطالعه ویژگی های قابلیت اعتماد یک متغیر طول عمر از زاویه MRL مورد بررسی قرار گرفته است. هر چند، مطالعات زیادی در ارتباط با صدک مانده عمر نیز صورت پذیرفته است، اما نسبت به توانایی هایی که این اندازه در زمینه قابلیت اعتماد دارد و همچنین نسبت به MRL کمتر مورد توجه قرار گرفته است. علاوه بر اینکه این اندازه طول عمر می تواند به عنوان یک رقیب جدی MRL مطرح باشد، در بسیاری از مواقع می تواند مناسب تر نیز باشد و نقش شایسته ای در مطالعات مربوط داشته باشد. حتی به عنوان یک دیدگاه سازنده این دو اندازه می توانند با همدیگر مورد بررسی و مقایسه قرار بگیرند. همانطور که انتظار می رود، رفتار این دو اندازه شباهت فراوانی با یکدیگر دارند، به طور مثال وقتی تابع نرخ شکست وانی (وارون وانی)

^{۴۷}Song and Cho

^{۴۸}Lin

شکل باشد، هر دوی این اندازه ها فرم وارون وانی شکل یا نزولی (وانی شکل یا صعودی) خواهند داشت. از طرف دیگر، تفاوت مقادیر این دو اندازه چولگی توزیع شرطی طول عمر را در طول زمان نشان می دهد. میانگین نرخ شکست، متوسط میانگین مانده عمر، متوسط هارمونیک مانده عمر و واریانس مانده عمر به ترتیب به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\nu(t) = \frac{1}{t} \int_0^t h(u) du, \quad (10.1)$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t m(u) du, \quad (11.1)$$

$$\delta(t) = \left[\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{m(u)} du \right]^{-1}, \quad (12.1)$$

و

$$\sigma^2(t) = E(T_t^2) - m^2(t) = \frac{2}{F(t)} \int_t^\infty \bar{F}(u) m(u) du - m^2(t), \quad (13.1)$$

همینطور آنتروپی T_t عدم قطعیت طول عمر یک شیء که در زمان t زنده است را نشان می دهد و عبارت است از،

$$H(t) = E(-\ln f_t(T_t)) = - \int_t^\infty \frac{f(u)}{F(u)} \ln \frac{f(u)}{F(u)} du, \quad (14.1)$$

که در آن f_t نشان دهنده چگالی متغیر تصادفی T_t است.

بعضی از مولفان به مطالعه این اندازه ها برای یک متغیر با نرخ شکست وانی شکل (وارون وانی شکل) پرداخته اند. گپتا و آکمن (۱۹۹۵) نشان دادند میانگین مانده عمر یک متغیر طول عمر با نرخ شکست وانی شکل، وارون وانی شکل است. می (۱۹۹۵) نیز نتایج مشابهی در این زمینه بدست آورد و تابع میانگین مانده عمر را به عنوان معیار مناسبی برای آب-بندی در نظر گرفت. بر این اساس، نقطه ای که این تابع ماکسیمم مقدار خود را می گیرد، نقطه آب-بندی بهینه معرفی می شود. بلاک و همکاران (۲۰۰۲) تعمیمی از نتایج این مولفان ارائه دادند و رفتار اندازه های قابلیت اعتماد مختلفی را برای توزیع های با نرخ شکست وانی (وارون وانی) شکل مورد مطالعه قرار دادند. آنها تابع ضریب تغییرات مانده عمر، $CV(t) = \frac{\sigma(t)}{m(t)}$ ، را به عنوان ملاکی برای آب-بندی در نظر گرفتند. بر این اساس، زمان بهینه آب-بندی برابر t_{opt} است اگر $CV(t)$ در این نقطه کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. آنها نشان دادند برای یک توزیع وانی شکل داریم $t_{opt} \geq t^*(m)$ ، که $t^*(m)$ نقطه ای است که تابع میانگین مانده عمر ماکسیمم می شود.

۴.۱ اندازه های قابلیت اعتماد توزیع های گسسته

گاهی اوقات طول عمر اشیاء با یک واحد گسسته اندازه گیری می شوند به طور مثال وقتی طول عمر یک کلید روشن/خاموش یا وسیله ای که تحت اثر ضربه است را مورد مطالعه قرار می دهیم. منطقی

است که در چنین مواقعی برای توصیف داده ها از مدل های گسسته استفاده شود. برای اطلاعات بیشتر در ارتباط با نقش و اهمیت توزیع های گسسته در ادبیات قابلیت اعتماد می توان به جیانگ (۲۰۱۰) و آقابابایی جزی^{۴۹} و همکاران (۲۰۰۹) و بسیاری دیگر مراجعه کرد. فرض کنید T یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع $F(k)$ ، تابع بقا $S(k) = P(T \geq k)$ و تابع جرم احتمال $p(k)$ ، $k = k_0, k_1, k_2, \dots$ که $T_k = T - k | T \geq k$ را با نماد $k_i \in \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$ باشد. مانده عمر شرطی به شرط بقا تا زمان k با نماد $T_k = T - k | T \geq k$ و تابع توزیع این متغیر را با

$$F_k(x) = P(T - k \leq x | T \geq k) = 1 - \frac{S((k+x)^+)}{S(k)},$$

نمایش می دهند که $S(y^+) = \lim_{x \rightarrow y^+} S(x)$ است. تابع نرخ شکست به صورت زیر تعریف می شود.

$$h(k) = F_k(0) = \frac{p(k)}{S(k)}, \quad k = k_0, k_1, k_2, \dots, \quad (15.1)$$

سالویا و بولینگر^{۵۰} (۱۹۸۲) این تابع نرخ شکست را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند تابع دلخواه

$h(k) : \mathbb{W} \rightarrow [0, 1]$ یک تابع نرخ شکست است اگر و تنها اگر

(الف) $h(k_*) = 1$ برای بعضی $k_* \in \mathbb{W}$ و برای همه $k \geq k_*$ ، $h(k) = 1$

یا

(ب) برای همه $k \in \mathbb{W}$ ، $0 \leq h(k) < 1$ و $\sum_{k \in \mathbb{W}} h(k) = \infty$.

مانند حالت پیوسته، این تابع نرخ شکست توزیع طول عمر را به صورت

$$P(T \geq k_i) = \prod_{k=k_0}^{k_i-1} \bar{h}(k), \quad (16.1)$$

که $\bar{h}(k) = 1 - h(k)$ مشخصه سازی می کند.

تعریف ۴.۱ تابع گسسته مقدار $h(k)$ ، $k = k_0, k_1, k_2, \dots$ وانی شکل با نقاط تغییر $k_* \leq k_{**}$ است هرگاه این تابع برای $k \leq k_*$ نزولی اکید، برای $k_* \leq k \leq k_{**}$ ثابت و برای $k \geq k_{**}$ صعودی اکید باشد. k_* و k_{**} را به ترتیب نقطه تغییر اول و نقطه تغییر دوم گوئیم. وقتی $k_* = k_{**}$ این تابع وانی شکل با نقطه تغییر k_* نامیده می شود.

تابع h را وارون وانی شکل با نقاط تغییر $k_* \leq k_{**}$ (وارون وانی شکل با نقطه تغییر k_*) گوئیم هرگاه h -وانی شکل با نقاط تغییر $k_* \leq k_{**}$ (وانی شکل با نقطه تغییر k_*) باشد.

تابع MRL این توزیع گسسته در یک نقطه k_i در صورت وجود برابر است با،

$$m(k_i) = E(T_{k_i}) = E(T - k_i | T \geq k_i), \quad (17.1)$$

که به شکل زیر ساده می شود:

$$m(k_i) = \frac{1}{S(k_i)} \sum_{j=i}^{\infty} (k_{j+1} - k_j) S(k_{j+1}), \quad (18.1)$$

^{۴۹} Aghababaei Jazi

^{۵۰} Salvia and Bollinger

در حالت گسسته معمولاً $k_i = i$ در نظر گرفته می شود و بنابراین مقدار تابع MRL به صورت زیر نوشته می شود.

$$m(i) = \frac{1}{S(i)} \sum_{j=i}^{\infty} S(j+1). \quad (19.1)$$

تابع α -PRL توزیع گسسته فوق برابر است با،

$$q_{\alpha}(k) = \inf\{x \in \mathbb{W} : F_k(x) \geq \alpha\}, \quad k = k_0, k_1, k_2, \dots, \quad (20.1)$$

که با عملیات جبری ساده داریم،

$$q_{\alpha}(k) = \inf\{x \in \mathbb{W} : S((k+x)^+) \leq \bar{\alpha}S(k)\}, \quad k = k_0, k_1, k_2, \dots,$$

برخلاف تابع MRL، معرفی شده در (18.1)، که توزیع طول عمر مربوط را مشخصه سازی می کند، تابع α -PRL این ویژگی را ندارد. گس و پارک^{۵۱} (1988)، می (1993)، باتاچارجی^{۵۲} (1982)، ابراهیمی^{۵۳} (1986) و تانگ^{۵۴} و همکاران (1999) از جمله مولفانی هستند که به مطالعه ویژگی های تابع MRL برای توزیع های گسسته پرداخته اند.

۵.۱ چند توزیع وزنی خاص

مفهوم توزیع های وزنی در زمینه های مختلف آماری زیادی از جمله قابلیت اعتماد، جنگل بانی و بوم شناسی کاربرد قابل توجهی دارد. معرفی این مفهوم به فیشر^{۵۵} (1934) برمی گردد، هرچند این مفهوم به صورت فرمول بندی شده توسط راتو^{۵۶} (1965) ارائه شد. راتو (1985) و پاتیل^{۵۷} (2002) مطالعات مروری خوبی در این زمینه انجام داده اند. یکی از کاربردهای توزیع های وزنی که مولفان زیادی از جمله پاتیل (1981، 1996) و پاتیل و ارد^{۵۸} (1976)، پاتیل و راتو (1978) و تالیه^{۵۹} و همکاران (1995) به آن پرداخته اند، استنباط آماری نارایب^{۶۰} در مورد پارامترهای یک توزیع، با استفاده از داده های اریب^{۶۱} است. همچنین، بارتزویچ^{۶۲} (2009)، پیکز^{۶۳} و همکاران (2003) و ناندا و جین^{۶۴} (1999) نتایجی در

^{۵۱}Guess and Park

^{۵۲}Bhattacharjee

^{۵۳}Ebrahimi

^{۵۴}Tang

^{۵۵}Fisher

^{۵۶}Rao

^{۵۷}Patil

^{۵۸}Ord

^{۵۹}Taillie

^{۶۰}Unbiased inference

^{۶۱}Biased data

^{۶۲}Bartoszewicz

^{۶۳}Pakes

جدول ۱.۱: بعضی از مدل های وزنی خاص.

مدل وزنی	$\omega(t)$
آماره های مرتب	$F^{k-1}(t)\bar{F}^{n-k}(t)$
k -رکورد	$(-\ln \bar{F}(t))^{n-1}\bar{F}^{k-1}(t)$
رکورد بالا	$(-\ln \bar{F}(t))^{n-1}$
رکورد پایین	$(-\ln F(t))^{n-1}$
نرخ شکست معکوس متناسب	$\theta F^{\theta-1}(t)$

ارتباط با ویژگی های قابلیت اعتماد توزیع های وزنی ارائه کردند. علاوه بر این، توزیع برخی از مدل های طول عمر مانند توزیع طول عمر سیستم های k از n ، رکوردها، k -رکوردها، مدل با نرخ شکست متناسب، مدل با نرخ شکست معکوس متناسب و ... به صورت توزیع های وزنی خاصی از توزیع پایه نوشته می شوند. بنابراین، هر نتیجه بدست آمده برای یک توزیع وزنی کلی ممکن است در مورد این مدل های طول عمر برقرار باشد.

فرض کنید T متغیر طول عمری با تابع توزیع $F(t)$ ، $t > 0$ و $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابعی با این ویژگی که $0 < E(\omega(T)) < \infty$ باشد. بنابراین، تابع توزیع وزنی F_ω با وزن ω به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_\omega(t) = \frac{1}{E(\omega(T))} \int_0^t \omega(u) dF(u). \quad (21.1)$$

علاوه بر این، اگر f تابع چگالی T باشد، تابع چگالی توزیع وزنی برابر است با،

$$f_\omega(t) = \frac{\omega(t)f(t)}{E(\omega(T))}, \quad (22.1)$$

تابع نرخ شکست مربوط به این مدل وزنی عبارت است از،

$$h_\omega(t) = \varphi(t)h(t), \quad (23.1)$$

که $h(t)$ تابع نرخ شکست توزیع F است و $\varphi(t) = \frac{\omega(t)\bar{F}(t)}{\int_t^\infty \omega(u)dF(u)}$. در اینجا، متغیر تصادفی مربوط به توزیع F_ω را با نماد T_ω در نظر می گیریم. در ادامه، به بررسی بعضی از وزن های خاص از جمله آماره های مرتب، رکوردها، مدل نرخ شکست متناسب و مدل نرخ شکست معکوس متناسب می پردازیم.

فرض کنید T_1, T_2, \dots, T_n نشان دهنده طول عمر n شیء مستقل با توزیع یکسان F باشند. k امین آماره مرتب را با نماد $T_{k:n}$ نمایش می دهیم و بوضوح $1 \leq k \leq n-1$ ، $T_{k:n} \leq T_{k+1:n}$. این آماره نشان دهنده طول عمر یک سیستم k از n ^{۶۵} است و علاوه بر این دو آماره مرتب $T_{1:n}$ و $T_{n:n}$ به ترتیب طول عمر یک سیستم سری و موازی با n مولفه را نشان می دهند. توزیع $T_{k:n}$ یک توزیع وزنی از توزیع F با وزن

$$\omega(t) = F^{k-1}(t)\bar{F}^{n-k}(t), \quad (24.1)$$

است.

چندلر ^{۶۶} (۱۹۵۲) مفهوم رکورد را در متون آماری معرفی کرد و خواص پایه ای زیادی را در مورد رکوردها

^{۶۴}Nanda and Jain

^{۶۵} k -out-of- n system

^{۶۶}Chandler