نام و نام‌خانوادگی: سجاد محمدی	**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد
رشته و گرایش: ریاضی محض-هندسه	**دانشکده‌ی:** علوم ریاضی
استاد راهنما : دکتر محمد شفیعی	**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۹/۱۱/۲۷
استاد مشاور:	

چکیده:

چندگوناها، فضاهای توپولوژیک هاسدورف با پایه‌ی شمارش پذیری هستند که برخلاف خمینه های توپولوژیک دارای بعد متغیر می‌باشند. هدف اصلی ما در این پایان نامه، معرفی چندگوناها و معرفی مفاهیمی مانند فضای مماس، کلاف تاری، قضیه ی تابع ضمنی و ... روی چندگوناها است. همچنین درکنار آن نظریه ی عمومی فردهولم که با SC- ساختمان‌ها مرتبط است، نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

چندگوناها و نظریه ی عمومی فردهولم کاربرد گسترده ای در مسائل متنوعی شامل نظریه‌ی فلوئر، نظریه‌ی گروموف-ویتن، هومولوژی سایا و نظریه ی میدان همتافته دارند.

[ـُا ـِ] [ـُا ـِ] [ـُا ـِ] [ـُا ـِ] [ـُا ـِ]

[ـُا ـِ] [ـُا ـِ] ء؛

بسمه تعالی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا زیرمدول‌های نیم‌اول در حلقه‌های ناجابه‌جایی را تعریف کرده و ارتباط آنها را با زیرمدول‌های رادیکال بررسی می‌کنیم. سپس حلقه‌های جابه‌جایی نوتری R را به قسمی مشخص می‌کنیم که هر زیرمدول نیم‌اول از یک $R-$ مدول، به صورت اشتراکی از زیرمدول‌های اول باشد.

پیش‌گفتار

بعد از معرفی زیرمدول‌های اول، موضوع رادیکال یک زیرمدول توجه علاقه‌مندان به این نظریه را به خود جلب کرد. با توجه به اینکه یک زیرمدول رادیکال، اشتراک تعدادی زیرمدول اول است، لذا این سئوال مطرح گردید که آیا هر زیرمدول نیم‌اول الزاماً زیرمدول رادیکال است؟ از این رو ارتباط زیرمدول‌های نیم‌اول و زیرمدول‌های رادیکال مورد توجه افراد بسیاری قرار گرفت. تا اینکه Man در [۹]، با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان داد که هر زیرمدول نیم—اول، الزاماً زیرمدول رادیکال نیست. این مطلب توسط $Smith$ و $McCasland$ در [۷]، در مورد زیرمدول‌های تنها مورد بررسی قرار گرفت. پاره‌ای از محققین در این زمینه به بررسی این موضوع از دیدگاه رادیکال یک زیرمدول پرداخته‌اند که می‌توان به $Smith$ در مرجع [۱۳]، اشاره کرد. در این پایان‌نامه که مربوط به مراجع [۹] و [۸] می‌باشد، به مطالعه‌ی زیرمدول‌هایی از مدول‌های نوتری می‌پردازیم که نیم‌اول و رادیکال می‌باشند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است که بجز فصل دوم و بخش اول از فصل سوم که در آن‌ها، حلقه‌ها ناجابه‌جایی هستند، همه حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌باشد که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم به معرفی زیرمدول اول و زیرمدول رادیکال پرداخته و برخی از خصوصیات آنها را بیان می‌کنیم. در فصل سوم به معرفی زیرمدول‌های نیم‌اول در حلقه‌های ناجابه‌جایی و جابه‌جایی پرداخته و به بررسی ارتباط زیرمدول‌های نیم‌اول و زیرمدول‌های رادیکال می‌پردازیم. در فصل چهارم به بررسی حلقه‌های نوتری با این ویژگی می‌پردازیم که هر زیرمدول نیم‌اول از $R-$ مدول M به صورت اشتراکی از زیرمدول‌های اول M باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی پرداخته و سپس به بیان قضایایی می‌پردازیم که در ادامه مفید خواهند بود.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشد. $\alpha \subseteq A$ را عدد ترتیبی گوییم هرگاه برای هر $\beta \subseteq \alpha$، $\beta = \{\gamma \in A \mid \gamma \leq \beta\}$. عدد ترتیبی $\alpha \in A$ را عدد حدی ترتیبی گوییم هرگاه عدد ترتیبی $\beta \in A$ موجود نباشد به قسمی که $\alpha = \beta^+ = \beta + 1$.

تعریف ۲.۱.۱ اصل استقرای ترامتناهی فرض کنید A یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب و S زیرمجموعه‌ای از A با این ویژگی باشد که برای هر $\alpha \in A$، اگر $\{\gamma \in A \mid \gamma < \alpha\} \subseteq S$ باشد، آنگاه $\alpha \in S$ باشد. در این صورت $A = S$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. رادیکال I را اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول R و شامل I تعریف کرده و آن را با $rad(I)$ نشان می‌دهیم. اگر ایده‌آل اولی از R شامل I وجود نداشته باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $rad(I) = R$. رادیکال ایده‌آل صفر را رادیکال پوچ یا رادیکال اول حلقه R می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه R باشد. گوییم ایده‌آل I اولیه است هرگاه برای $r, s \in R$، اگر $rs \in I$ ، آنگاه $r \in I$، یا عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به قسمی که $s^n \in I$. در این صورت $P = rad(I)$، ایده‌آل اولی از حلقه R بوده و I را $P-$ اولیه می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه R باشد. گوییم ایده‌آل I اول است هرگاه برای $r, s \in R$، اگر $rs \in I$ ، آنگاه $r \in I$ یا $s \in I$. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R را طیف R نامیده و با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ گوییم ایده‌آل I از حلقه R، اول مینیمال است هرگاه برای هر ایده‌آل اول J از R که $J \subseteq I$، $I = J$. مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R را با $Min(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ رادیکال جیکوبسون حلقه‌ی R را با نماد $J(R)$ نشان داده و اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۱ عنصر $a \in R$ را مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه $0 \neq b \in R$ موجود باشد به قسمی که $ab = 0$.

تعریف ۹.۱.۱ عنصر $a \in R$ را پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به قسمی که $a^n = 0$. به وضوح هر عنصر پوچ‌توان، مقسوم علیه صفر است. مجموعه‌ی

همه‌ی عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R که ایده‌آلی از R است را رادیکال پوچ حلقه‌ی R نامیده و با $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱ رادیکال پوچ حلقه‌ی R با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R برابر است، لذا $Nil(R) = \bigcap_{p \in Spec(R)} p = rad(0)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱.۸]. ■

تذکر ۱۱.۱.۱ طبق قضیه‌ی ۱۰.۱.۱، $Nil(R)$ با اشتراک همه ایده‌آل‌های اول مینیمال R برابر است.

تعریف ۱۲.۱.۱ حلقه‌ی R را کاهش یافته گوییم هرگاه عنصر پوچ‌توان نداشته باشد. به عبارت دیگر $rad(0) = 0$.

تعریف ۱۳.۱.۱ بعد کرول حلقه‌ی R را با $dimR$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR = sup\{ n \in N \cup \{0\} \mid \exists p_i \in Spec(R)(1 \leq i \leq n) \ni p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n\}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای، I ایده‌آلی از A و J ایده‌آلی از B باشد. ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ در B را توسیع I نامیده و آن را با I^e نمایش می‌دهیم. همچنین $f^{-1}(J)$ ایده‌آلی از A بوده که آن را انقباض J نامیده و با J^c نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۵.۱.۱ فرض کنید $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای، I ایده‌آلی از A و J ایده‌آلی از B باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) $I \subseteq I^{ec}$ و $J^{ce} \subseteq J$.

ب) $I^e = I^{ece}$ و $J^{cec} = J^c$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱.۱۷]. ■

تعریف ۱.۱.۱۶ $R-$ مدول $M \neq 0$ را ساده گوییم، هرگاه شامل هیچ زیرمدولی به جز زیرمدول صفر و خودش نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۷ $R-$ مدول M را نیم‌ساده گوییم، هرگاه M به صورت مجموع مستقیمی از $R-$ مدول‌های ساده باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸ حلقه‌ی R نیم‌ساده است هرگاه به عنوان $R-$ مدول، نیم‌ساده باشد.

قضیه ۱.۱.۱۹ اگر حلقه‌ی R نیم‌ساده باشد، آنگاه هر $R-$ مدول، نیم‌ساده است.

اثبات : رجوع شود به [۱۱، قضیه ۵.۴]. ■

قضیه ۱.۱.۲۰ $R-$ مدول M نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول M، جمعوند مستقیم M باشد.

اثبات : رجوع شود به [۱۱، قضیه ۴.۱]. ■

تعریف ۱.۱.۲۱ زیرمدول N از M را اساسی گوییم، هرگاه برای هر زیرمدول غیرصفر L از M، $N \cap L \neq 0$ و می‌نویسیم $N \leq_e M$.

قضیه ۱.۱.۲۲ الف) فرض کنید A، B و C سه $R-$ مدول باشند به قسمی که $A \subseteq B \subseteq C$. در این صورت $A \leq_e C$ اگر و تنها اگر $A \leq_e B$ و $B \leq_e C$.

ب) فرض کنید $\{ A_i \mid i \in I\}$ و $\{ B_i \mid i \in I\}$ دو خانواده از $R-$ مدول‌ها باشند به قسمی که برای هر $i \in I$، $A_i \leq_e B_i$. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} B_i$.

اثبات : رجوع شود به [۲، قضیه ۲۱.۳]. ■

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. پوچ‌ساز M را با نماد $Ann_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ann_R(M) = \{ r \in R \mid rM = \circ \}.$$

به وضوح $Ann_R(M)$ ایده‌آلی از R است. اگر $Ann_R(M) = \circ$، آنگاه $R-$ مدول M را وفادار می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ حلقه‌ی R را ابتدایی گوییم، هرگاه یک $R-$ مدول ساده و وفادار موجود باشد. منظور از فاکتور ابتدایی، فاکتور $\frac{R}{I}$ برای ایده‌آل I از R است به قسمی که $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی ابتدایی باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) را نوتری گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R (زیرمدول‌های M) ایستا باشد. گوییم حلقه‌ی R در شرط زنجیر افزایشی روی ایده‌آل‌های دوطرفه صدق می‌کند هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های دوطرفه R، ایستا باشد.

قضیه ۲٦.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل R(زیرمدول M) با تولید متناهی باشد.

اثبات : رجوع شود به [۳، قضیه ۹.۱.۸]. ■

تعریف ۲۷.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) را آرتینی گوییم هرگاه هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R (زیرمدول‌های M) ایستا باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱ منظور از یک سری ترکیبی برای $R-$ مدول M، زنجیر

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

از زیرمدول‌های M است به قسمی که برای هر i ($1 \leq i \leq n$)، $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ یک $R-$ مدول ساده باشد. در این حالت گوییم M دارای یک سری ترکیبی از طول n است ومی‌نویسیم $l(M) = n$.

قضیه ۲۹.۱.۱ فرض کنید M دارای یک سری ترکیبی از طول n و N زیرمدولی سره از M باشد. در این صورت $l(N) < l(M)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.٦]. ■

لم ۳۰.۱.۱ (لم ناکایاما) فرض کنید M یک $R-$ مدول با تولید متناهی و $I \subseteq J(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر $M = IM$، آنگاه $M = 0$ است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۶.۲]. ■

حال صورت دیگری از لم ناکایاما را بیان می‌کنیم.

لم ۳۱.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول با تولید متناهی، N زیرمدولی از M و $I \subseteq J(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر $M = IM + N$، آنگاه $M = N$ است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.۲]. ■

تعریف ۳۲.۱.۱ گوییم ایده‌آل I از R دارای تجزیه‌ی اولیه است، هرگاه ایده‌آل‌های اول و متمایز P_i، ایده‌آل‌های P_i- اولیه q_i ($i = 1, \cdots, n$)، از R موجود باشند به قسمی که

$I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$. تجزیه‌ی اولیه I، مینیمال است هرگاه برای هر $1 \leq j \leq n$، $I \neq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} q_i$.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ که $rad(q_i) = P_i$، یک تجزیه‌ی اولیه مینیمال از I باشد. در این صورت P_i ها را ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم.

قضیه ۳۴.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از R و $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$، که $rad(q_i) = P_i$، یک تجزیه‌ی اولیه مینیمال از I باشد. در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_i = \{x \in R \mid (I : x) \neq I\}.$$

به ویژه اگر ایده‌آل صفر تجزیه‌ی اولیه مینیمال داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R با اجتماع همه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به صفر، برابر است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.۴]. ■

قضیه ۳۵.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی ازحلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت ایده‌آل اول P از R، یک ایده‌آل اول وابسته به I است اگر و تنها اگر $a \in R$ موجود باشد به قسمی که $P = (I : a)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱۷.۷]. ■

فصل ۲

مدول‌های اول و زیرمدول‌های رادیکال

۱.۲ مدول‌های اول

در این فصل همه‌ی حلقه‌ها، یکدار و همه‌ی $R-$ مدول‌ها، چپ یکانی می‌باشند. در این بخش به بیان و بررسی مدول‌های اول پرداخته و درباره مجموع مستقیم و ویژگی‌های آن توضیح می‌دهیم. به‌ویژه در قضیه ۱۲.۱.۲، یکتایی جمع مستقیم مدول‌های اول با پوچ‌سازهای متمایز را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. زیرمدول سره N از M را اول گوییم هرگاه برای $r \in R$ و زیرمدول L از M اگر $rL \subseteq N$، آنگاه $L \subseteq N$ یا $rM \subseteq N$ باشد. اگر N یک زیرمدول اول از M باشد، آنگاه ایده‌آل $P = (N : M) = Ann_R(\frac{M}{N})$ یک ایده‌آل اول حلقه‌ی R است. در این حالت N را $P-$ اول می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول $R-$ مدول M را طیف M نامیده و با $Spec(M)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۲ ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R، زیرمدولی اول از $R-$ مدول R می‌باشند و برعکس.

مثال ۳.۱.۲ فرض کنید R یک قلمرو صحیح و K، میدان کسرهای حلقه‌ی R باشد. در این صورت زیرمدول $\{0\}$، تنها زیرمدول اول از $R-$ مدول K می‌باشد. به ویژه $\{0\}$ تنها زیرمدول اول از $Z-$ مدول Q است.

مثال ۴.۱.۲ فرض کنید V یک فضای برداری و W زیرفضای سره‌ای از V باشد. در این صورت $(V:W)=\{0\}$ است. لذا همه‌ی زیرفضاهای سره از V، $\{0\}-$اول می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۲ $R-$ مدول M را اول گوییم هرگاه زیرمدول صفر از M، اول باشد. بنابراین زیرمدول N از $R-$ مدول M اول است اگر و تنها اگر $\frac{M}{N}$ یک $R-$ مدول اول باشد.

تذکر ۶.۱.۲ هرگاه M یک $R-$مدول اول باشد، آنگاه هر زیرمدول سره N از M به عنوان $R-$ مدول، اول است.

قضیه ۷.۱.۲ هرگاه M یک $R-$مدول اول باشد، آنگاه پوچ‌ساز M یک ایده‌آل اول حلقه‌ی R است.

اثبات : چون M یک $R-$ مدول اول بوده لذا صفر، زیرمدولی اول از M است. بنابراین $P=Ann_R(M)=(0:M)$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است. ■

لم ۸.۱.۲ اگر M یک $R-$ مدول اول و N زیرمدولی غیرصفر از M باشد، آنگاه $Ann_R(M)=Ann_R(N)$.

اثبات : چون $N\subseteq M$ است، لذا $Ann_R(M)\subseteq Ann_R(N)$ می‌باشد. حال فرض کنید $x\in Ann_R(N)$ باشد، در این صورت $xN=0$ است. چون

M اول است، $xM = \circ$ و در نتیجه $x \in Ann_R(M)$. بنابراین $Ann_R(N) \subseteq Ann_R(M)$. ■

لم ۹.۱.۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. اگر $\{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌های اول از M با پوچ‌سازهای متمایز در R باشند، آنگاه $\sum_{\alpha \in A} L_\alpha$ ، یک مجموع مستقیم است.

اثبات : کافی است نشان دهیم برای هر خانواده متناهی $\{L_۱, \cdots, L_n\}$ از $R-$ مدول‌های اول از M با پوچ‌سازهای متمایز در R، مجموع $L_۱ + \cdots + L_n$ مستقیم است. برای اثبات از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. فرض کنید $n = ۲$ و $L_۱ \cap L_۲ \neq \circ$ باشد. چون $L_۱ \cap L_۲ \subseteq L_۱$ و $L_۱ \cap L_۲ \subseteq L_۲$ است، طبق لم ۸.۱.۲، $Ann_R(L_۱) = Ann_R(L_۱ \cap L_۲) = Ann_R(L_۲)$ و این یک تناقض است. حال فرض کنید $n > ۲$ و مجموع هر زیرمجموعه‌ی سره از $\{L_۱, \cdots, L_n\}$ مستقیم باشد. نشان می‌دهیم

$$L = L_۱ \cap (L_۲ \oplus \cdots \oplus L_n) = \{\circ\}.$$

فرض کنید $L \neq \circ$ باشد. طبق فرض

$$L_۱ \cap (L_۳ \oplus \cdots \oplus L_n) = \{\circ\}. \qquad (۱)$$

ابتدا نشان می‌دهیم L را می‌توان درون $L_۲$ نشاند.

فرض کنید $x \in L$. در این صورت $x = l_۱ = l_۲ + \cdots + l_n$، که در آن برای هر i $(۱ \leq i \leq n)$، $l_i \in L_i$. حال نگاشت

$$f: \quad L \longrightarrow L_۲$$

را با ضابطه $f(l) = l_2$ در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که f یک تک‌ریختی $R-$ مدولی است. فرض کنید $x_1 = l_2 + \cdots + l_n$ و $x_2 = l'_2 + \cdots + l'_n$ عضو L باشند. در این صورت اگر $x_1 = x_2$، آنگاه

$$l_2 + \cdots + l_n = l'_2 + \cdots + l'_n$$

بوده و لذا $(l_2 - l'_2) = (l'_3 - l_3) + \cdots + (l'_n - l_n)$. حال چون $(l_2 - l'_2) \in L_2$ و

$$(l_3 - l'_3) + \cdots + (l_n - l'_n) \in L_3 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

طبق فرض $l_2 - l'_2 = 0$. بنابراین $l_2 = l'_2$ و لذا $l_i = l'_i$، $3 \leq i \leq n$ می‌باشد. لذا f خوش‌تعریف است. بوضوح f یک هم‌ریختی $R-$ مدولی است. حال اگر برای x_1 و x_2 از عناصر L، $f(x_1) = f(x_2)$، آنگاه، داریم

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (l_2 + \cdots + l_n) - (l'_2 + \cdots + l'_n) \\ &= (l_3 - l'_3) + \cdots + (l_n - l'_n). \end{aligned}$$

اما $x_1 - x_2 \in L_1$ و

$$(l_3 - l'_3) + \cdots + (l_n - l'_n) \in L_3 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

لذا طبق (۱)، $x_1 - x_2 = 0$. در نتیجه $x_1 = x_2$ بوده $Ker(f) = 0$ می‌باشد. پس f یک تک‌ریختی $R-$ مدولی است. بنابراین L را می‌توان درون L_2 بنشانیم. پس L را می‌توان به عنوان زیرمدول L_2 در نظر گرفت. لذا طبق لم ۸.۱.۲، $Ann_R(L) = Ann_R(L_2)$. از طرف دیگر L زیرمدول غیر صفر L_1 نیز می‌باشد، لذا طبق لم

۸.۱.۲، $Ann_R(L_1) = Ann_R(L)$ که تناقض است. بنابراین مجموع $L_1 + \cdots + L_n$ مستقیم است. ■

لم ۱۰.۱.۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول، P ایده‌آل اولی از R و $\{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌های اول M باشند به طوری که برای هر $\alpha \in A$، $Ann_R(L_\alpha) = P$. اگر $\sum_{\alpha \in A} L_\alpha$ یک مجموع مستقیم باشد، آنگاه یک $R-$ مدول اول با پوچ‌ساز P خواهد بود.

اثبات : قرار دهید $L = \bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha$. فرض کنید $x \in Ann_R(L)$ باشد، در این صورت $xL = 0$، اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in A$، $xL_\alpha = 0$، اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in A$، $x \in Ann_R(L_\alpha)$ باشد. بنابراین $x \in P$ می‌باشد. لذا $Ann_R(L) = P$. حال نشان می‌دهیم L اول است. فرض کنید زیرمدول ناصفر N از L و $s \in R$ موجود باشند به قسمی که $sN = 0$. لذا $0 \neq n \in N$ وجود دارد به قسمی که $sRn = 0$. کافی است نشان دهیم $s \in P$. مجموعه اندیس $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ در A را مینیمال با این ویژگی انتخاب کنید که

$$n \in L_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus L_{\alpha_n}.$$

و $n = l_{\alpha_1} + \cdots + l_{\alpha_n}$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $0 \neq l_{\alpha_i} \in L_{\alpha_i}$. نشان می‌دهیم Rn را می‌توان در هر L_{α_j}، $1 \leq j \leq n$ نشاند. j را ثابت و نگاشت $f : Rn \longrightarrow L_{\alpha_j}$ را با ضابطه $f(rn) = rl_{\alpha_j}$ در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که f یک تک‌ریختی $R-$ مدولی است. فرض کنید برای rn و $r'n$ از اعضای Rn داشته باشیم $rn = r'n$. در این صورت

$$r(l_{\alpha_1} + \cdots + l_{\alpha_n}) = r'(l_{\alpha_1} + \cdots + l_{\alpha_n})$$

بوده و لذا

$$(r - r')l_{\alpha_j} = (r' - r)(l_{\alpha_1} + \cdots + l_{\alpha_{j-1}} + l_{\alpha_{j+1}} + \cdots + l_{\alpha_n}).$$

اما $(r'-r)l_{\alpha_j} \in L_{\alpha_j}$ و

$$(r-r')(l_{\alpha_1}+\cdots+l_{\alpha_{j-1}}+l_{\alpha_{j+1}}+\cdots+l_{\alpha_n}) \in \bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} L_{\alpha_i}.$$

از اینرو $(r-r')l_{\alpha_j}=0$ بوده و لذا $rl_{\alpha_j}=r'l_{\alpha_j}$. لذا f خوش‌تعریف است. به وضوح f هم‌ریختی $R-$ مدولی است. حال فرض کنید $f(rn)=0$. در این صورت $rl_{\alpha_j}=0\in L_{\alpha_j}$ می‌باشد. چون L_{α_j}، $P-$ اول و $l_{\alpha_j}\neq 0$ است، لذا $r\in P$. پس $rn=0$ است. بنابراین f یک تک‌ریختی $R-$ مدولی است. لذا Rn را می‌توان به عنوان زیرمدول L_{α_j} در نظر گرفت. از اینرو طبق لم ۸.۱.۲، $r\in P$ می‌باشد. بنابراین L یک $R-$ مدول $P-$ اول است. ■

لم ۱۱.۱.۲ فرض کنید $\{L_\alpha \mid \alpha\in A\}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌های اول و N یک $R-$ مدول اول و زیرمدولی از $L=\bigoplus_A L_\alpha$ باشد. در این صورت $\beta\in A$ موجود است به قسمی که $Ann_R(N)=Ann_R(L_\beta)$.

اثبات : قرار دهید $L=\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha$. طبق لم ۱۰.۱.۲، مجموع مستقیم آن دسته از L_αها که دارای پوچ‌ساز برابر P می‌باشند، یک $R-$ مدول اول با پوچ‌ساز P خواهد بود. طبق لم ۹.۱.۲، مجموع $R-$ مدول‌های اول با پوچ‌ساز متمایز، مستقیم است. بنابراین L را به صورت $\bigoplus_{\beta\in A} L'_\beta$ می‌نویسیم که L'_β ها، $R-$ مدول‌های اول با پوچ‌ساز متمایز می‌باشند. حال اگر برای هر $\beta\in A$، $Ann_R(N)\neq Ann_R(L'_\beta)$، آنگاه $\{L'_\beta \mid \beta\in A\}\cup\{N\}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌های اول با پوچ‌سازهای متمایز بوده و طبق لم ۹.۱.۲، جمع $L+N$ مستقیم است. لذا $N\cap L=N=0$ که تناقض است. بنابراین یک $\beta\in A$ موجود است به قسمی که $Ann_R(N)=Ann_R(L'_\beta)$. ■