بسم الله الرحمن الرحيم

٤٢٨٠٤

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بررسی یکتایی تجزیه روی مدول‌های آرتینی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

مینا قربانی

استاد راهنما

دکتر احمد حقانی

۱۳۷۹

۳۰ /۴/ ۱۳۸۱

از اطلاعات و مدارک علمی ایران
[illegible]

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی خانم مینا قربانی

تحت عنـــوان

بررسی یکتایی تجزیه روی مدول‌های آرتینی

در تاریخ ۷۹/۱۱/۲۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر احمد حقانی
۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بیژن طائری
۳ـ استاد داور ۱	دکتر حبیب شریف
۴ـ استاد داور ۲	دکتر فرید بهرامی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر امیر نادری

خدایا تو را سپاس

آنگاه که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی، و چشمه سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

الها تو را سپاس

که راز دانستن را بر من عیان ساختی و بر تارک ذهنم تاج آموختن و پژوهیدن نهادی و چراغ روشنی‌بخش عقل را پیش چشمم برافروختی، تا ببینم آنچه را که در پس پرده اوهام و خیال پوشیده بود و بخوانم آنچه را که استاد بر لوح دلم می‌نگاشت، تا پاس بدارم گنجینه‌ای را که معلم، آن گنجور دانش ازلی تو، بر من سپرد.

معبودا تو را سپاس

که از فیض اساتید و معلمانی والا، ذهنم را بارور ساختی و وجود مقدسشان را پیامبر روح و دلم گردانیدی، تا مرا به بهشت علم و سعادت رهنمون سازند.

با سپاس و تشکر از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر احمد حقانی که در تهیه و تنظیم رساله راهنمایم بودند.

تقدیم به پدر و مادرم
که شمع سوزان زندگیم بودند و عصاره جانشان را در طبق اخلاص، ارزانی جسمم کردند، تا گامی چند در راه آینده‌ام بردارم.
تقدیم به آنان که نهال وجودم، در گلستان آغوش پرمهرشان، نشو و نما یافت و به من آموختند، که زندگی جز آموختن نیست.
تقدیم به تمام عزیزان زندگیم.

فهرست مطالب

چکیده:

در این رساله ثابت می‌کنیم که قضیه کرول - اشمیدت در حالت کلی برای مدول‌های آرتینی بر قرار نیست. این جواب سئوالی است که توسط کرول در سال ۱۹۳۲ پرسیده شد. بدین منظور ابتدا حلقه‌های نیم موضعی را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم، که هرگاه S یک جبر مدول متناهی روی حلقه جابجایی نوتری نیم - موضعی R باشد، آنگاه می توان S را بعنوان حلقه درونریختی یک مدول آرتینی در نظر گرفت. با استفاده از این مطلب، ثابت می کنیم که هرگاه S یک جبر مدول متناهی روی حلقه جابجایی نوتری نیم - موضعی R باشد، آنگاه هر تجزیه نا منحصر بفرد از هر S - مدول نوتری، یک تجزیه نا منحصر بفرد از یک مدول آرتینی روی حلقه غیر نوتری مربوطه بدست می‌دهد.

فصل اول
نتایج مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم هم‌ارزی و دوگانی موریتا[۱]، مولدها و هم‌مولدها[۲]، مدول‌های متناهیاً نشانده شده[۳] و زیرمدول‌های کوچک[۴]، پرداخته و قضایای مورد نیاز در فصول آتی، در ارتباط با هر یک از مفاهیم فوق، ارائه می‌دهیم.

۱- هم‌ارزی و دوگانی موریتا

تعریف (۱-۱) فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند، تابعگون هموردا[۵] (پادوردا)[۶] از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ که با نماد $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ نشان داده می‌شود، جفتی از توابع می‌باشد، یکی تابع شیء، که به ازای هر شیء C از $\mathcal{C}$، شیء $F(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد، و دیگری تابع مورفیسم، که به هر مورفیسم $f: C \to C'$ از $\mathcal{C}$، مورفیسم $F(f) : F(C) \to F(C')$ $(F(f) : F(C') \to F(C))$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد، بطوریکه:

(۱) به ازای هر مورفیسم همانی I_c از $\mathcal{C}$، $F(I_c) = I_{F(c)}$.

(۲) به ازای هر دو مورفیسم f و g که ترکیب fog آنها تعریف شده باشد، $F(fog) = F(f) \circ F(g)$.

۱- Morita equivalent and duality

۲- Generators and cogenerators

۳- Finitely embedded modules

۴- Small submodules (superfluous)

۵- Covariant functor

۶- Contravariant functor

$(F(fog) = F(g) \circ F(f))$.

و یک تابعگون را جمعی نامند، هرگاه برای هر C' و C در رسته جمعی $\mathcal{C}$ و هر $f : C \to C'$ در $\mathcal{C}$،

$F(f+g)=F(f)+ F(g)$.

تعریف (۱-۲) فرض کنید $\mathcal{C}=(C , mor_{\mathcal{C}} , \circ)$ و $\mathcal{D} = (D , mor_{\mathcal{D}} , \circ)$ دو رسته باشند. تابعگون‌های هموردِ F و G از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ را در نظر بگیرید. تبدیل طبیعی[۱] از F به G را نگاشت $\eta :\mathcal{C} \to mor_{\mathcal{D}}$ با ضابطه $\eta(M) = \eta_M$ که $\eta_M:F(M) \to G(M)$ تعریف کرده، بطوریکه برای هر $f: M \to N$، دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_M"'] & F(N) \arrow[d, "\eta_N"] \\ G(M) \arrow[r, "G(f)"] & G(N) \end{tikzcd}$$

حال اگر η_M یکریختی باشد، گوئیم تبدیل طبیعی $\eta :F \to G$ یکریختی طبیعی است و می‌نویسیم $F \approx G$.

توجه (۱-۳) با نمادهای بالا، اگر F و G تابعگون‌های پادورد باشند، آنگاه یکریختی طبیعی بین F و G را مانند آنچه که بیان شد، می‌توان تعریف کرد، با این تفاوت که برای هر $f:M \to N$ در $\mathcal{C}$ دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} F(N) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_N"'] & F(M) \arrow[d, "\eta_M"] \\ G(N) \arrow[r, "G(f)"] & G(M) \end{tikzcd}$$

نمادگذاری - فرض کنید R یک حلقه باشد، رسته R ـ مدول‌های چپ (راست) را با R - Mod (Mod - R) نشان داده و مجموعه همریختی‌های از M به M' در R - Mod را با $Hom_R (M , M')$ و مجموعه درونریختی‌های در M را در R - Mod با $End_R (M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف (۱-۴) فرض کنید R و S حلقه باشند. R - Mod و S - Mod هم‌ارز نامیده می‌شوند، هرگاه تابعگون‌های هموردِ $F : R\text{ - Mod} \to S\text{ - Mod}$ و $G : S\text{ - Mod} \to R\text{ - Mod}$ موجود باشند، بطوریکه $GF \approx I_{R\text{-Mod}}$ و $FG \approx I_{S\text{-Mod}}$، هرگاه I نشان‌دهنده تابعگون همانی باشد. در این حالت، حلقه‌های R و S هم‌ارز موریتا نامیده می‌شوند.

۱- Natural transformation

گزاره (۱-۵) فرض کنید $F : R\text{ - Mod} \to S\text{ - Mod}$ یک هم‌ارزی باشد. بنابراین برای هر M' و M در $R\text{ - Mod}$، تحدید F به $\mathrm{Hom}_R(M , M')$ یک یکریختی گروه آبلی

$$F : \mathrm{Hom}_R (M , M') \to \mathrm{Hom}_S (F(M) ,F(M'))$$

است، بطوریکه $F(f)$ یک بروریختی (تکریختی) در $S\text{ - Mod}$ است اگر و تنها اگر f یک بروریختی (تکریختی) در $R\text{ - Mod}$ باشد. بعلاوه، اگر $M \neq 0$، آنگاه تحدید $F : \mathrm{End}_R (M) \to \mathrm{End}_S (F(M))$ یک یکریختی حلقوی است.

اثبات - گزاره (۲-۲۱) از [۱] ■

نمادگذاری: فرض کنید M یک R-مدول چپ باشد. بنابراین هر $X \subseteq M$، پوچساز[1] چپ X در R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l.\mathrm{Ann}_R (X) = \{ r \in R \mid r x = 0 \quad (x \in X)\}$$

و برای هر $S \subseteq R$ پوچساز راست S در M را به صورت $r.\mathrm{Ann}_M (S) = \{x \in M \mid s x = 0 \ (s \in S)\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف (۱-۶) مدول M در $R\text{ - Mod}$ وفادار[2] است، هرگاه پوچساز M در R صفر باشد.

گزاره (۱-۷) فرض کنید R و S حلقه بوده و M یک گروه آبلی باشد. اگر $M \in R\text{ - Mod}$ و $\lambda : R \to \mathrm{End}_R (M)$ و $M \in \mathrm{Mod}\text{ - }S$ و $\rho : S \to \mathrm{End}_S (M)$، آنگاه عبارات زیر معادلند.

(۱) M، $R\text{ - }S$ - دومدول است.

(۲) $\lambda : R \to \mathrm{End}_R (M_S)$، یک همریختی حلقوی است.

(۳) $\rho : S \to \mathrm{End}_S ({}_RM)$، یک همریختی حلقوی است.

بنابراین، برای $R\text{ - }S$ - دومدول M همریختی‌های حلقوی متعارف ضرب از راست و چپ $\rho : S \to \mathrm{End}_S ({}_RM)$ و $\lambda : R \to \mathrm{End}_R (M_S)$، بطوریکه برای هر $r \in R$، $x \in M$ و $s \in S$، $\lambda(r) : x \to rx$ و $\rho(s): x \to xs$ را خواهیم داشت. در اینجا، ${}_RM$ (M_S) وفادار است، اگر و تنها اگر λ (ρ) یک به یک باشد، و هرگاه λ و ρ پوشا باشند، گوئیم $R\text{ - }S$ - دومدول M یک دومدول متعادل[3] می‌باشد.

اثبات - گزاره (۱۰-۴) از [۱] ■

۱- Annihilator

۲- Faithful

۳- Balanced bimodule

نتیجه (۱-۸) اگر R یک حلقه و λ و ρ ضرب از چپ و راست باشند، آنگاه $\lambda : R \to End_R (R_R)$ و $\rho : R \to End_R ({}_RR)$ یکریختی می‌باشند.

تعریف (۱-۹) فرض کنید U یک R - S - دومدول باشد. بنابراین تابعگون‌های جمعی پادورد $Hom_S (-, U) : Mod - S \to R - Mod$ و $Hom_R (- , U) : R - Mod \to Mod - S$، U - دوگان[1] نامیده می‌شود.

نمادگذاری - برای نشان دادن این تابعگون‌ها، می‌نویسیم: $(\ )^* = Hom_R (- , U)$. بنابراین اگر $f : M_1 \to M_2$ در R - Mod، آنگاه $f^* : M_2^* \to M_1^*$ در Mod - S است و $f^{**} : M_1^{**} \to M_2^{**}$ در R - Mod می‌باشد. مدول M^*، U- دوگان M و نگاشت f^*، U- دوگان f نامیده می‌شوند. همچنین، M^{**} و f^{**} را دوگان مضاعف M و f می‌نامند. برای هر M در R - Mod یا Mod - S نگاشت $\delta_M : M \to M^{**}$ با ضابطه $[\delta_M (m)] (\gamma)= \gamma(m)$ برای هر $\gamma \in M^*$ و $m \in M$، یک R- همریختی است، هرگاه $M \in R - Mod$ بوده و S- همریختی است، هرگاه $M \in Mod - S$. بعلاوه، اگر $f : M_1 \to M_2$، آنگاه برای هر $m \in M_1$ و $\gamma \in M_2^*$ داریم:

$$\left[f^{**}\left(\delta_{M_1}(m)\right)\right](\gamma) = \left[\delta_{M_1}(m) \circ f^*\right](\gamma) = \left[\delta_{M_1}(m)\right](\gamma \circ f)$$
$$= \gamma\left(f(m)\right) = \left[\delta_{M_2}\left(f(m)\right)\right](\gamma)$$

بنابراین دیاگرام زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_{M_1}"'] & M_2 \arrow[d, "\delta_{M_2}"] \\
M_1^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & M_2^{**}
\end{tikzcd}$$

لذا $\delta : I_{R-\ Mod} \to ((\ )^*)^*$ و $\delta : I_{Mod\ -\ S} \to ((\ )^*)^*$ تبدیلات خطی طبیعی می‌باشند.

تعریف (۱-۱۰) با نمادهای بالا، مدول M، U- بازتابی[2] است، هرگاه δ_M یکریختی باشد.

تعریف (۱-۱۱) فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون‌های پادورد $H' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ و $H'' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ یک دوگانی بین $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ می‌باشند، هرگاه یکریختی‌های طبیعی $H'H'' \approx I_{\mathcal{D}}$ و $H''H' \approx I_{\mathcal{C}}$ موجود باشند.

۱- U - dual

۲- U - reflexive

گزاره (۱-۱۲) فرض کنید U یک R - S - دومدول و $\lambda : R \to End_R(U_S)$ ضرب از چپ باشد، آنگاه δ_R R یک به یک و پوشا است اگر و تنها اگر λ چنین باشد.

اثبات - تعریف کنید $\rho: U \to Hom_R(R, U) = ({}_RR)^*$ با ضابطه $\rho(u)(r) = \lambda(r)u$ به ازای هر $u \in U$ و $r \in R$. ρ یک همریختی گروه‌های آبلی است. نشان می‌دهیم ρ یک S_ همریختی یک به یک و پوشاست. برای $r \in R$ و $s \in S$ و $u \in U$ داریم:

$$\rho(us)(r) = r(us) = (ru)s = (\rho(u)(r))s$$

چون R^* یک S_ مدول راست است، لذا: $\rho(us)(r) = (\rho(u)s)(r)$ بنابراین $\rho(us) = \rho(u)s$.

فرض کنید به ازای $u \in U$، $\rho(u) = 0$ در این صورت برای هر $r \in R$، $\rho(u)(r) = 0$ بنابراین $ru = 0$. بویژه، به ازای $r = 1_R$، $ru = 0$ و در نتیجه $u = 0$. حال اگر $f \in R^*$ و $f(1_R) = u$، آنگاه به ازای هر $r \in R$، $f(r) = rf(1) = ru$. بنابراین، $f = \rho(u)$، یعنی ρ پوشاست.

نگاشت $\rho^* : R^{**} \to U^*$ با ضابطهٔ $\rho^*(f) = f\rho$ برای هر $f \in R^{**}$ در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم ρ^* یک R_ یکریختی است. بدین منظور، فرض کنید $r \in R$ و $u \in U$، لذا برای $f \in R^{**}$ داریم:

$$\rho^*(rf)(u) = ((rf)\rho)(u) = (rf)\rho(u) = r(f\rho)(u) = (r\rho^*(f))(u)$$

بنابراین برای هر $r \in R$ و $f \in R^{**}$، $\rho^*(rf) = r\rho^*(f)$.

اگر برای $f \in R^{**}$، $\rho^*(f) = 0$، چون ρ پوشاست، لذا برای هر $g \in R^*$، $u \in U$ موجود است، بطوریکه $g = \rho(u)$، بنابراین:

$$f(g) = f(\rho(u)) = (f\rho)(u) = (\rho^*(f))(u) = 0$$

لذا $f = 0$، یعنی ρ^* یک به یک است.

حال فرض کنید $\eta : R^* \to U$ معکوس ρ بوده و $g \in U^*$، آنگاه

$$\rho^*(g\eta) = g\eta\rho = g$$

لذا ρ^* پوشاست. از طرفی برای هر $r \in R$ و $u \in U$ داریم:

$$[\rho^*(\delta_R(r)](u) = \delta_R(r)\rho(u) = \rho(u)(r) = \lambda(r)(u)$$

بنابراین $\rho^* \circ \delta_R = \lambda$ و این امر گزاره را اثبات می‌کند ■

نتیجه (۱-۱۳) فرض کنید U یک R - S - دومدول باشد. آنگاه ${}_RR$ و S_S، U_ بازتابی است، اگر و تنها اگر U

یک R - S - دومدول بطور وفادار متعادل باشد.

تعریف (۱-۱۴) فرض کنید R و S حلقه بوده و U یک R - S - دومدول باشد. گوئیم U یک دوگانی موریتا تعریف می‌کند هرگاه:

(۱) $_RR$ و S_S ، U- بازتابی باشند.

(۲) هر زیرمدول و هر مدول عامل[۱] U- بازتابی، U- بازتابی باشد.

۲ - مولدها و هم‌مولدها

مفهوم مجموعه مولد برای یک مدول رسته‌ای نیست و دارای دوگان طبیعی نمی‌باشد. لذا یک تعریف هم‌ارز، که رسته‌ای بوده و تنها به عناصر و مورفیسم‌های رسته M وابسته است و نه به عناصر مدول M و دارای دوگان خیلی مهم می‌باشد، ارائه می‌دهیم. این مفهوم و دوگان آن مولد و هم‌مولد نامیده می‌شوند. ابتدا مدول‌های تصویری[۲] و تزریقی[۳] را مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف (۲-۱) فرض کنید M و U در R - Mod باشند. M را U- تصویری گویند، هرگاه برای هر بروریختی $g : U \to N$ و هر همریختی $\gamma : M \to N$ همریختی $\bar{\gamma} : M \to U$ موجود باشد بطوریکه $g.\bar{\gamma} = \gamma$ و M را U- تزریقی نامند، هرگاه برای هر تکریختی $f : K \to U$ و هر همریختی $\gamma : K \to M$ همریختی $\bar{\gamma} : U \to M$ موجود باشد، بطوریکه $\bar{\gamma} f = \gamma$.

اگر مدول M برای هر مدول U، U- تصویری (U- تزریقی) باشد، تصویری (تزریقی) نامیده می‌شود.

گزاره (۲-۲) اگر $0 \to U' \to U \to U'' \to 0$ یک دنباله دقیق از R- مدول‌های چپ بوده بطوریکه M، U- تصویری (U- تزریقی) باشد، آنگاه M نسبت به U' و U'' نیز تصویری (تزریقی) است.

اثبات -گزاره (۱۲-۱۶) و (۱۳-۱۶) از [۱] ■

گزاره (۲-۳) فرض کنید U و M در R - Mod بوده و $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ یک مجموعه اندیس‌گذاری شده در R - Mod باشد. آنگاه

(۱) $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ ، U- تصویری است اگر و تنها اگر هر M_α، U- تصویری باشد.

(۲) $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ ، U- تزریقی است اگر و تنها اگر هر M_α، U- تزریقی باشد.

۱- Factor module

۲- Projective

۳- Injective

اثبات - گزاره (۱۰-۱۶) از [۱] ■

نتیجه (۲-۴) فرض کنید $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ یک مجموعه اندیس‌گذاری شده در R - Mod باشد، آنگاه

(۱) $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ تصویری است اگر و تنها اگر هر M_α تصویری باشد.

(۲) $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ تزریقی است اگر و تنها اگر هر M_α تزریقی باشد.

تعریف (۲-۵) مدول M، شبه - تصویری[۱] (شبه - تزریقی[۲]) نامیده می‌شود، هرگاه M- تصویری (M- تزریقی) باشد.

مثال (۲-۶) گروه آبلی $\bigoplus_p Z_p$ (p در مجموعه اعداد اول تغییر می‌کند) شبه - تصویری و شبه - تزریقی است.

گزاره (۲-۷) هر جمعوند مستقیم از یک مدول شبه - تزریقی، شبه - تزریقی است.

اثبات - گزاره (۷۳-۶) از [۲] ■

تعریف (۲-۸) فرض کنید $\mathcal{U}$ یک کلاس از مدول‌ها باشد. مدول M (متناهیاً) تولید شده توسط $\mathcal{U}$ است، هرگاه مجموعه اندیس‌گذاری شده (متناهی) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ در $\mathcal{U}$ و بروریختی $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \to M \to 0$ موجود باشد.

مدول U در R - Mod مولد است، هرگاه هر مدول در R - Mod را تولید کند.

نمادگذاری - برای M در R - Mod از M^Λ برای نمایش یک مجموع مستقیم از Λ کپی M استفاده می‌کنیم.

قضیه (۲-۹) اگر مدول M دارای مجموعه مولد $X \subseteq M$ باشد، آنگاه بروریختی $R^{(X)} \to M \to 0$ وجود دارد. بعلاوه، R بطور متناهی M را تولید می‌کند، اگر و تنها اگر مجموعه مولد متناهی باشد.

اثبات - قضیه (۱-۸) از [۱] ■

گزاره (۲-۱۰) عبارات زیر برای R- مدول چپ P معادلند.

(۱) P تصویری است.

(۲) هر بروریختی $M \to P \to 0$، شکافی است.

(۳) P با یک جمعوند مستقیم از R- مدول‌های چپ آزاد یکریخت است.

اثبات - (۲) ⇐ (۱) فرض کنید $f: M \to P$ بروریختی باشد. چون P تصویری است، لذا همریختی $g: P \to M$ موجود است بطوریکه $fg = I_P$. بنابراین، بروریختی f، شکافی است.

(۳) ⇐ (۲) طبق (۲-۹) هر مدول، تصویر یک مدول آزاد است.

۱- Quasi - projective

۲- Quasi - injective