دانشگاه سیستان وبلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عنوان:

برآورد نقطه‌ای، فاصله‌ای و آزمون فرضیه‌های آماری میانگین متغیرهای تصادفی فازی

اساتید راهنما:

دکتر محمد امینی
دکتر حسن رضایی

تحقیق و نگارش:

مهدیه مظفری غربا

زمستان ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی متغیرهای تصادفی فازی می‌پردازیم. برآورد فاصله‌ای و آزمون فرضیه میانگین برای متغیرهای تصادفی فازی را با استفاده از مسئله‌های بهینه‌سازی بیان می‌کنیم. همچنین برآورد نقطه‌ای میانگین فازی را با استفاده از متر L_2 مورد بررسی قرار داده، به‌علاوه با به‌کارگیری تکنیک‌های بوت‌استرپ، آزمون فرضیه میانگین فازی یک‌نمونه‌ای، دونمونه‌ای و چندنمونه‌ای را با استفاده از متر L_2 و فاصله علامت‌دار یائو—ویو ارائه می‌دهیم.

پیش‌گفتار

در جهان واقعی، بعضی داده‌ها نمی‌توانند دقیقاً ثبت یا جمع آوری شوند. در چنین مواردی، تئوری مجموعه‌های فازی به‌عنوان یک ابزار مناسب در مدل‌سازی داده‌های نادقیق می‌تواند مورد استفاده واقع شود. مفهوم مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط زاده[۱] (۱۹۶۵)، مفاهیم پایه و کاربردهای آن به‌طور کامل‌تر توسط کلیر[۲] و یوآن[۳] (۱۹۹۵) و مفهوم متغیرهای تصادفی فازی توسط پوری[۴] و رالسکو[۵] (۱۹۸۶) و کوکرناک[۶] (۱۹۷۸) مطرح شده‌اند.

گِیِر[۷] و میدِن[۸] (۲۰۰۵) نوعی فاصله اطمینان فازی را معرفی کردند که دوگان آزمون فرضیه‌های آماری است و همچنین واجد برخی معیارهای بهینگی نیز هستند. فیتل[۹] (۲۰۰۲) به استنباط درباره پارامتر حقیقی مقدار θ بر پایه داده‌های فازی پرداخته است. وی در ابتدا با استفاده از اصل گسترش و برآوردگرهای مبتنی بر داده‌های حقیقی، برآوردگرهای فازی را برای θ و بر پایه داده‌های فازی معرفی کرده است. آن‌گاه با استفاده از فاصله اطمینان معمولی برای θ و بر پایه یک نمونه تصادفی از f_θ یک ناحیه اطمینان معمولی برای θ بیان کرده است. وو[۱۰] (۲۰۰۹) کاربرد تئوری مجموعه‌های فازی را در فواصل اطمینان آماری برای پارامترهای فازی مجهول با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی فازی ارائه داده است. وی برای محاسبه فواصل اطمینان فازی دوطرفه، درجه‌های اعتماد را تحت مفهوم تئوری مجموعه‌های فازی به دست آورده و مسئله اصلی را به مسائل بهینه‌سازی تبدیل کرده، که در فصل ۲ شرح داده شده است. به‌علاوه در این فصل، فواصل اطمینان

---

[۱] Zadeh
[۲] Klir
[۳] Yuan
[۴] Puri
[۵] Ralescu
[۶] Kwakernaak
[۷] Geyer
[۸] Meeden
[۹] Viertl
[۱۰] Wu

یک‌طرفه راست فازی و یک‌طرفه چپ فازی مورد بررسی واقع می‌شوند.

کاسل[۱۱] و گیل[۱۲] (۱۹۸۹) آزمون فرضیه نیمن پیرسن را با اطلاعات فازی پیشنهاد دادند. آرنولد[۱۳] (۱۹۹۸) برای اولین بار مسئله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های معمولی را مورد بررسی قرار داده است. وو (۲۰۰۵) برای محاسبه آزمون فرضیه‌های فازی، قواعد تصمیم را جهت رد یا پذیرفتن فرض صفر و مقابل با مفهوم درجه خوش‌بینی و درجه بدبینی به وسیله حل مسائل بهینه‌سازی بیان کرده، که در فصل ۳ شرح داده شده است.

کرونر[۱۴] (۲۰۰۰) و مونتنیگرو[۱۵] و همکاران (۲۰۰۴) برای اولین بار روش آزمون مجانبی مسئله یک‌نمونه‌ای را مطرح کردند. بعضی کاربردهای آزمون‌های مجانبی که از لحاظ نظری بیان می‌شوند، در عمل غیر قابل قبول هستند. زیرا آنها نسبتاً پیچیده و شامل پارامترهای مجهول جامعه هستند، همچنین اندازه نمونه‌هائی که منجر به نتایج مناسب می‌شوند، بزرگ می‌باشند. همچنین مونتنیگرو و همکاران، بعضی شیوه‌های آزمون بوت‌استرپ را برای متغیرهای تصادفی فازی ساده نیز مورد مطالعه قرار داده‌اند. از آنجا که تکنیک‌های بوت‌استرپ تواناتر از نتایج مجانبی هستند، تکنیک‌های بوت‌استرپ را مورد استفاده قرار دادند. مونتنیگرو و همکاران (۲۰۰۱) و گیل و همکاران (۲۰۰۶) آزمون فرضیه‌های دونمونه‌ای و چندنمونه‌ای را برای تساوی امید ریاضی‌های فازی بیان کردند. رودریگز[۱۶] و همکاران (۲۰۰۶) آزمون فرضیه دوطرفه برای میانگین جامعه را با استفاده از متر L_2 بیان نموده‌اند. کلوبی[۱۷] (۲۰۰۹) آزمون فرضیه‌های فازی را با استفاده از متر L_2 با به‌کارگیری تکنیک‌های بوت‌استرپ مطرح کرده است، که در فصل ۴ مورد بررسی واقع شده است.

---

[۱۱] Casals
[۱۲] Gil
[۱۳] Arnold
[۱۴] Körner
[۱۵] Montenegro
[۱۶] González-Rodriguez
[۱۷] Colubi

یائو[۱۸] و ویو[۱۹] (۲۰۰۰) ترتیب علامت‌دار را بین اعداد فازی مطرح کرده‌اند. آزمون فرضیه‌های فازی با استفاده از فاصله علامت‌دار یائو—ویو و به‌کارگیری تکنیک‌های بوت‌استرپ در فصل ۵ شرح داده شده است.
مطالب هر فصل به‌طور خلاصه در زیر آمده است.

• در فصل ۱ تعاریف پایه، اعداد فازی، متغیرهای تصادفی فازی، تابع چگالی احتمال فازی، امید ریاضی فازی و واریانس فازی شرح داده شده‌اند.

• در فصل ۲ فواصل اطمینان دوطرفه فازی، یک‌طرفه راست فازی، یک‌طرفه چپ فازی و فرایند محاسبه‌ای آنها با مثال‌های عددی بیان شده است.

• در فصل ۳ آزمون فرضیه‌های دوطرفه و یک‌طرفه فازی، فرایند محاسبه‌ای آنها با مثال‌های عددی بیان شده است. به‌علاوه رابطه بین فواصل اطمینان و آزمون فرضیه‌های فازی نیز موردبررسی واقع شده است.

• در فصل ۴ مفاهیم و تعاریف مقدماتی راجع به متر L_2، برآورد نقطه‌ای میانگین متغیرهای تصادفی فازی، آزمون‌هی مجانبی و بوت‌استرپ فازی در فضای $(F_c(R), D_W^{\varphi})$ و الگوریتم بوت‌استرپ آزمون فرضیه‌های یک‌نمونه‌ای، دونمونه‌ای و چندنمونه‌ای با مثال‌های آنها در فضای $(F_c(R^p), D_K)$ بیان گردیده است.

• در فصل ۵ مفاهیم و تعاریف مقدماتی مربوطبه فاصله علامت‌دار یائو—ویو، الگوریتم بوت‌استرپ آزمون فرضیه‌های یک‌نمونه‌ای، دونمونه‌ای و چندنمونه‌ای با مثال‌های آنها شرح داده شده است.

---

[۱۸] Yao
[۱۹] Wu

نمادها

	نماد
مجموعه فازی A	$\tilde{A}$
عدد فازی a	$\tilde{a}$
مجموعه اعداد فازی	$F(R)$
گردایه مجموعه‌های فازی در R	$F_c(R)$
مجموعه توانی R	$P(R)$
تابع عضویت $\tilde{A}$	$\xi_{\tilde{A}}$
تابع چگالی احتمال فازی	$\tilde{f}(\tilde{x})$
امید ریاضی فازی	$E\left(\tilde{X}\right)$
واریانس فازی	$V\left(\tilde{X}\right)$
قضیه حد مرکزی	CLT
$\frac{1}{2}\left(\tilde{\mu}_1^L+\tilde{\mu}_1^U\right)$	$core(\tilde{\mu}_0)$
ناحیه پذیرش فرضیه $\tilde{H}_0$ در سطح ممنی‌داری α	$K_{\tilde{H}_0;\alpha}$
ناحیه پذیرش فرضیه $\tilde{H}_1$ در سطح معنی‌داری α	$K_{\tilde{H}_1;\alpha}$
درجه ماکسیمال برای قبول $\tilde{H}_0$ (درجه بدبینی برای پذیرفتن $\tilde{H}_1$)	$h^{\max}_{\tilde{H}_0}$
درجه ماکسیمال برای قبول $\tilde{H}_1$ (درجه بدبینی برای پذیرفتن $\tilde{H}_0$)	$h^{\max}_{\tilde{H}_1}$
درجه خوش‌بینی برای پذیرفتن $\tilde{H}_0$ در سطح معنی‌داری α	$l\left(K_{\tilde{H}_0;\alpha}\right)$
درجه خوش‌بینی برای پذیرفتن $\tilde{H}_1$ در سطح معنی‌داری α	$l\left(K_{\tilde{H}_0;\alpha}\right)$
گردایه زیرمجموعه‌های فشرده غیر تهی از R^p	$\kappa_c(R^p)$
گردایه مجموعه‌های فازی در R^p	$F_c(R^p)$
مجموعه متغیرهای تصادفی فازی کران‌دار انتگرال‌پذیر	$\coprod(\Omega, A, P)$
مجموعه توابع حقیقی مقدار	$\Lambda^1_0(P)$
مجموعه متغیرهای تصادفی فازی	$\coprod^{\circ}(\Omega_1\times\Omega_2, A_1\otimes A_2, P)$
فاصله علامت‌دار a و b	$d^*(a,b)$
فاصله علامت‌دار یائو—ویو $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$	$d\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$
خانواده همه نقطه‌های فازی یک − سطحی	$F_p(1)$
p—مقدار	$p-value$

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱ — ۱ مقدمه

هدف این فصل مروری بر مفاهیم پایه و بررسی بعضی از ویژگی‌های مجموعه‌های فازی و موضوعات مرتبط با آن می‌باشد. در این فصل موضوعاتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در فصل‌های بعدی، به‌خصوص در مسائل برنامه‌ریزی خطی و تحلیل‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱ — ۲ تعاریف پایه

مجموعه‌های کلاسیک، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شوند. اگر یک عضو از مجموعه مرجع آن ویژگی را دارا باشد، عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد، عضو مجموعه نیست. مثلاً اگر مجموعه مقادیر ممکن برای طول قد انسان‌ها $X = [۰, ۲۵۰]$، و p ویژگی بلندتر از ۱۸۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه p یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانند A را تعریف می‌کند که عبارت از انسان‌های با قد بیشتر از ۱۸۰ سانتی‌متر است. اکنون اگر بخواهیم درباره انسان‌های بلند قد بحث کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سر و کار داریم. این‌که چه انسان‌هایی بلند قد هستند و کدام‌ها نیستند، یک موضوع نادقیق و مبهم است. به عبارت دیگر عضویت یا عدم‌عضویت افراد در گردایه انسان‌های بلند قد قطعی و مشخص نیست.

بیشتر مفاهیمی که در زندگی روزمره به‌کار می‌بریم و بر اساس آنها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق هستند و مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. مثلاً لامپ‌های با طول عمر زیاد، مسافت‌های طولانی، نرخ تورم بالا، همگی از این نوع مفاهیم و مجموعه‌ها هستند.

نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این‌گونه مفاهیم است.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از R باشد تابع مشخصه A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A, \end{cases}$$

دقت داشته باشید که دامنه تابع مشخصه، R و برد آن مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ است، یعنی

$$I_A(x) : R \to \{۰, ۱\}.$$

تعریف ۲.۱. زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از R با تابع عضویت $\xi_{\tilde{A}} : R \to [0,1]$ مشخص می‌شود که در آن به ازای هر x از R، مقدار $\xi_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۱. [وو (۱۹۹۹)]

(الف) فرض کنید f یک تابع با مقادیر حقیقی روی فضای توپولوژیک باشد. هرگاه به ازای هر $h \in (0,1]$، $\{x : f(x) \geq h\}$ یک فاصله بسته باشد، f را نیمه پیوسته بالائی گویند.

(ب) تابع f در نقطه y نیمه پیوسته بالائی است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y) + \varepsilon.$$

تعریف ۴.۱. [وو (۱۹۹۹)] تابع f در نقطه y نیمه پیوسته پائینی است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y) - \varepsilon.$$

تعریف ۵.۱. [بازارا[1] و همکاران (۱۹۹۳)] تابع نیمه پیوسته بالائی دارای مقدار ماکسیمم حول مجموعه فشرده S می‌باشد، یعنی

$$\exists\, y \in S \quad : \quad f(x) \geq f(y) \;\; \forall x \in S.$$

تابع نیمه پیوسته پائینی دارای مقدار مینیمم حول مجموعه فشرده S می‌باشد، یعنی

$$\exists\, y \in S \quad : \quad f(x) \leq f(y) \;\; \forall x \in S.$$

قضیه ۶.۱. [وو (۲۰۰۹)] تابع نیمه پیوسته بالائی دارای مقدار ماکسیمم حول یک مجموعه فشرده و تابع نیمه پیوسته پائینی دارای مقدار مینیمم حول یک مجموعه فشرده می‌باشند.

---

[1] Bazaraa

۱ـ۳ اصل توسیع

فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \quad x \in X \ , \ y \in Y,$$

این تابع به هر نقطه از X نقطه‌ای از Y را می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ای معمولی از X باشد. با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت f تحت A، یعنی $f(A)$ را به‌صورت زیر به دست آوریم:

$$f(A) = \{f(a) \in Y \,|a \in A\}.$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری توسیع (گسترش) دهیم که به‌جای این‌که صرفاً روی یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم $f\left(\tilde{A}\right)$، حاصل عمل f بر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right)$. در اینجا تعیین تابع عضویت $\xi_{\tilde{B}}(y)$ مهم است. واضح است که اگر f تابعی یک به یک باشد، آن‌گاه

$$\xi_{\tilde{B}}(y) = \xi_{\tilde{A}}\left(f^{-1}(y)\right).$$

اما در حالت کلی ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل توسیع روش تعریف $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right)$ را ارائه می‌دهد [طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷)].

نخست اصل توسیع را برای توابع یک متغیره بیان کرده و سپس حالت کلی آن را بیان می‌نمائیم.

تعریف ۷.۱. [طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷)] فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی از X باشد. در این‌صورت $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right)$ به‌صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x);x\in X} \xi_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \emptyset, \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس f است که گاهی آن را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهند.

اکنون حالت کلی اصل توسیع (اصل گسترش) را بیان می‌کنیم.

تعریف ۸.۱. [طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷)] فرض کنید $X_1, ..., X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times ... \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آنها باشد. همچنین $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$، n مجموعه فازی به‌ترتیب از $X_1, ..., X_n$ باشند. به‌علاوه $y = f(x_1, ..., x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ به‌صورت مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{\tilde{B}}(y) = f\left(\xi_{\tilde{A}_1}, ..., \xi_{\tilde{A}_n}\right)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x_1, ..., x_n \\ y = f(x_1, ..., x_n)}} \min\left\{\xi_{\tilde{A}_1}(x_1), ..., \xi_{\tilde{A}_n}(x_n)\right\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

مثال ۹.۱. فرض کنید $f : X \to Y$ با ضابطه $f(x) = 2x$ تعریف شود. اگر A مجموعه اعداد فرد مثبت، یعنی $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ ، آن‌گاه

$$f(A) = \{f(a) \in Y \,|\, a \in A\} = \{2, 6, 10, 14, ...\}.$$

اکنون فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X بیان‌گر اعداد تقریباً ۵ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\tilde{A} = \left\{\frac{0/4}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/4}{7}\right\},$$

آن‌گاه طبق اصل توسیع داریم:

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right) = \left\{\frac{0/4}{6}, \frac{0/7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/4}{14}\right\}.$$

۱—۴ مجموعه‌های h — سطحی و ویژگی‌های آنها

در این بخش برای مجموعه فازی داده شده $\tilde{A}$ در R، مجموعه‌های مشخصی را معرفی می‌کنیم که مجموعه‌های h — سطحی نامیده می‌شوند. این مجموعه‌های مشخص، نقش مهمی را در مطالعه نظریه

مجموعه‌های فازی ایفا می‌کنند. زیرا هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ در R را می‌توان به‌صورت یکتا توسط یک خانواده از چنین مجموعه‌هایی متناظر با $\tilde{A}$ نمایش داد. به‌علاوه استفاده از مجموعه‌های $h-$ سطحی، کار ما را در مطالعه حساب فازی بسیار راحت می‌کند.

تعریف ۱۰.۱. [وو (۲۰۰۹)] مجموعه $h-$ سطحی $\tilde{A}$ که با $\tilde{A}_h$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_h = \{x \in R : \xi_{\tilde{A}}(x) \geq h\}, \quad \forall h \in (۰, ۱].$$

فرض کنید R دارای توپولوژی معمولی باشد. مجموعه صفر $-$ سطحی $\tilde{A}_۰$ به‌صورت «بستار» [۲] $\{x \in R : \xi_{\tilde{A}}(x) > ۰\}$ تعریف می‌شود، یعنی

$$\tilde{A}_۰ = closure\left(\{x \in R : \xi_{\tilde{A}}(x) > ۰\}\right) = closure\left(\cup_{h>۰}\tilde{A}_h\right).$$

قضیه ۱۱.۱. [طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷)] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی در R باشند.

(الف) خانواده $\left\{\tilde{A}_h \,|h \in [۰, ۱]\right\}$ یکنواست، یعنی

$$۰ < h \leq t \leq ۱ \Rightarrow \tilde{A}_t \subseteq \tilde{A}_h.$$

(ب) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \;\; \Leftrightarrow \;\; \tilde{A}_h \subseteq \tilde{B}_h \;\; , \;\; \forall h \in [۰, ۱]$

(ج) $\left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right)_h = \tilde{A}_h \cap \tilde{B}_h \;\; , \;\; \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right)_h = \tilde{A}_h \cup \tilde{B}_h$

قضیه ۱۲.۱. (اصل تجزیه [۳]). فرض کنید $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از R با تابع عضویت $\xi_{\tilde{A}}$ باشد و مجموعه‌های $h-$ سطحی آن به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\tilde{A}_h = \{r : \xi_{\tilde{A}}(r) \geq h\}, \quad \forall h \in [۰, ۱],$$

---

[۲] $closure$

[۳] Resolution Identity

آن‌گاه تابع عضویت $\tilde{A}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\xi_{\tilde{A}}(r) = \sup_{0 \le h \le 1} h.I_{\tilde{A}_h}(r),$$

که $I_{\tilde{A}_h}(r)$ یک تابع مشخصه از $\tilde{A}_h$ است، به‌قسمی‌که

$$I_{\tilde{A}_h}(r) = \begin{cases} 1 & r \in \tilde{A}_h \\ 0 & r \notin \tilde{A}_h \end{cases}$$

اثبات: به ازای هر r،

$$\begin{aligned} \sup_{0\le h\le 1} h.I_{\tilde{A}_h}(r) &= \sup_{0\le h\le 1} \min\{h, I_{\tilde{A}_h}(r)\} \\ &= \max\{\sup_{0\le h\le \xi_{\tilde{A}}(r)} \min\{h, I_{\tilde{A}_h}(r)\}, \sup_{\xi_{\tilde{A}}(r)<h\le 1} \min\{h, I_{\tilde{A}_h}(r)\}\} \\ &= \max\{\sup_{0\le h\le \xi_{\tilde{A}}(r)} \min\{h, 1\}, \sup_{\xi_{\tilde{A}}(r)<h\le 1} \min\{h, 0\}\} \\ &= \sup_{h\le \xi_{\tilde{A}}(r)} h = \xi_{\tilde{A}}(r). \square \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۱ . فرض کنید $X = \{0, 1, 2, ...\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسون مربوط به تعداد تصادفات شبانه روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X بیان‌گر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$\xi_{\tilde{A}}(r) = \left\{\frac{1}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4}\right\},$$

بنا بر اصل تجزیه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{A}}(r) = 0/2 &\left\{\tfrac{1}{0}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}\right\} \cup 0/4 \left\{\tfrac{1}{0}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right\} \\ &\cup 0/6 \left\{\tfrac{1}{0}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}\right\} \cup 0/8 \left\{\tfrac{1}{0}, \tfrac{1}{1}\right\} \cup 1 \left\{\tfrac{1}{0}\right\}, \end{aligned}$$

یا به‌طور خلاصه‌تر

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{A}}(r) &= 0/2\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup 0/4\{0, 1, 2, 3\} \\ &\quad \cup 0/6\{0, 1, 2\} \cup 0/8\{0, 1\} \cup 1\{1\} \\ &= \left\{\tfrac{1}{0}, \tfrac{0/8}{1}, \tfrac{0/6}{2}, \tfrac{0/4}{3}, \tfrac{0/2}{4}\right\}. \end{aligned}$$

۱ـ۵ مجموعه‌های فازی محدب

مفهوم تحدب مجموعه‌های فازی برای بسیاری از تعاریف از جمله عدد فازی و حساب فازی مهم است.

قضیه ۱۴.۱ . [کلیر و یوآن (۱۹۹۵)] مجموعه فازی $\tilde{A}$ در R، یک مجموعه فازی محدب است اگر و تنها اگر

$$\xi_{\tilde{A}}\left(tx+(1-t)\,y\right)\geq \min\left\{\xi_{\tilde{A}}\left(x\right),\xi_{\tilde{A}}\left(y\right)\right\} \quad , \quad \forall x,y\in R \quad , \quad \forall t\in[0,1] .$$

(یعنی، $\xi_{\tilde{A}}$ یک تابع شبه واگرا است).

قضیه ۱۵.۱ . [وو (۱۹۹۹) و زاده (۱۹۶۵)] مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و تنها اگر $\{x\in R:\xi_{\tilde{A}}\left(x\right)\geq h\}$ به ازای هر $h\in[0,1]$ محدب باشد.

تعریف ۱۶.۱ . مجموعه فازی $\tilde{A}$ را کران‌دار گوئیم، هرگاه به ازای هر $h\in(0,1]$ مجموعه‌های $h-$ سطحی آن مجموعه‌هائی کران‌دار باشند.

تعریف ۱۷.۱ . اگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ در R هم محدب و هم کران‌دار باشد آن را یک مجموعه فازی محدب کران‌دار گوئیم.

۱ـ۶ حساب بازه‌ای

گاهی اوقات مشاهده می‌شود که پارامترهای مسئله دقیقاً معلوم نیستند، بلکه این پارامترها در یک بازه قرار می‌گیرند. در چنین مواقعی با استفاده از حساب بازه‌ای، محاسبات (عملگرهای) ریاضی را روی بازه‌ها انجام می‌دهیم و برآورد قابل قبولی از کمیت‌های مورد نظر را به‌صورت عبارات بازه‌ای به دست می‌آوریم. در این قسمت، دو بازه بسته $a=[a^L,a^U]$ و $b=[b^L,b^U]$ را در R در نظر می‌گیریم.