فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تعاریف و اصطلاحات

تعریف ۱.۱.۱ (گراف ساده). *هر گراف G زوج دو تایی مرتبی مانند $G=(V,E)$ است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V می‌باشد. اعضای V را رأس ها G و اعضای E را یال های G می‌نامیم. به بیان ساده تر بین دو رأس یک گراف ساده حداکثر یک یال وجود دارد.*

تعریف ۲.۱.۱ (زیر گراف). *فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف باشد. گراف $G'=(V',E')$ را **زیر گراف** G گوییم هرگاه $E'\subseteq E$ و $V'\subseteq V$، به گونه ای که یال های موجود در مجموعه E' تنها با رئوس موجود در V' حادث باشند.*

تعریف ۳.۱.۱ (گراف همبند[۱]). *یک گراف بدون جهت را همبند گوییم، هرگاه بین دو راس دلخواه آن مسیری موجود باشد، در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می نامند.*

تعریف ۴.۱.۱ (مولفه همبندی). *هر گراف ناهمبند، شامل چندین زیرگراف همبند است که هر کدام از آنها را یک **مولفه**[۲] برای گراف می نامیم.*

تعریف ۵.۱.۱ (درجه راس). ***درجه هر راس**، تعداد یال های حادث با آن تعریف می شود. درجه راس v را با $\deg(v)$ نمایش خواهیم داد.*

---

[۱] Connected Graph

[۲] Components

تعریف ۶.۱.۱ (**درخت**). *فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بدون جهت و بدون حلقه است. G را* ***درخت*** *می نامیم، اگر همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد.*

تعریف ۷.۱.۱ (**پل** [۳]). *در نظریه گراف، یک* ***پل*** *(یا یک* ***یال برشی*** [۴] *) یالی است که با حذف آن تعداد مولفه های همبندی افزایش می یابد (می توان گفت یک یال پل است اگر و فقط اگر روی هیچ دوری نباشد).*

تعریف ۸.۱.۱ (**گراف مسطح**[۵]). *گراف مسطح گرافی است که می‌توان آن را در یک صفحه محاط کرد به گونه‌ای که یال‌هایش یکدیگر را تنها در راس‌ها قطع کنند.*

تعریف ۹.۱.۱ (**گراف دوری**[۶]). *گراف دوری به گرافی که متشکل از یک دور باشد گفته می‌شود، گراف دوری با n رأس با نماد C_n نشان داده می‌شود. گراف دوری گرافی همبند بوده که درجه هر رأس آن دو می‌باشد. تعداد رأس‌ها و یال‌های این گراف نیز برابرند.*

تعریف ۱۰.۱.۱ (**گراف ستاره**[۷]). *به هر گراف G با n راس به قسمی که یک راس از درجه $n-۱$ باشد و $n-۱$ راس دیگر از درجه یک باشند یک* ***گراف ستاره*** *می گوییم.*

تعریف ۱۱.۱.۱ (**گراف چرخ** [۸]). *هر گراف G که دارای n راس باشد که $n \geq ۴$ و یکی از رئوس از درجه ی $n-۱$ و بقیه از درجه ی سه باشند، را یک گراف چرخ می نامیم. گراف چرخ n راسی را با W_n نمایش می دهیم.*

تعریف ۱۲.۱.۱ (**گراف دوستی**[۹]). *گراف دوستی F_n، گراف بدون جهت مسطح* [۱۰] *با $۲n+۱$ راس و $۳n$ یال می باشد. گراف دوستی F_n از متصل کردن n کپی از گراف دوری $C_۳$ با یک راس مشترک ساخته می شود.*

گراف همبند $G=(V,E)$ با مجموعه رئوس $\{v_۱,...,v_n\}$ ، با وزن های نامنفی w_i برای $i=۱,۲,...,n$ و طول

[۳] Bridge

[۴] Cut-Edge

[۵] Planar graph

[۶] Cycle graph

[۷] Star graph

[۸] Wheel graph

[۹] Friendship graph

[۱۰] planar undirected graph

مثبت l_e برای هر $e \in E$ در نظر می گیریم. بردار وزن $\vec{W}$ و بردار طول $\vec{L}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{W} = (w_۱, w_۲, ..., w_n)$$

$$\vec{\ell} = (\ell_۱, \ell_۲, ..., l_{|E|})$$

تعریف ۱۳.۱.۱ (نمونه یک مساله). *به دو تایی (F, C) یک نمونه مساله بهینه سازی گویند هرگاه F مجموعه جواب های شدنی (متناهی) و C تابع حقیقی مقدار تعریف شده بر روی F باشد یعنی $C : F \longrightarrow \mathbb{R}$ ، به دنبال پیدا کردن $f \in F$ به طوری که برای هر $y \in F$ داشته باشیم $C(f) \leq C(y)$ (برای مساله مینیمم سازی).*

تعریف ۱۴.۱.۱ (مساله). *به مجموعه Γ مساله بهینه سازی گوییم هرگاه شامل تمام نمونه های مساله باشد.*

تعریف ۱۵.۱.۱ (نماد O ای بزرگ). *یک الگوریتم دارای پیچیدگی $f(n) = O(g(n))$ است ، اگر ثابت های مثبت $n_۰ \in \mathbb{N}$ و $c \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد به طوری که*

$$\forall n > n_۰ \qquad f(n) \leq c.g(n)$$

تعریف ۱۶.۱.۱ (الگوریتم های با زمان چندجمله ای[۱۱]). *الگوریتم هایی که با اندازه ورودی[۱۲] n ، زمان اجرای بدترین حالت آن ها، برای مقدار ثابت k ، برابر $O(n^k)$ می باشد.*

تعریف ۱۷.۱.۱ (کلاس P). *شامل مساله هایی است که در زمان چندجمله ای قابل حل هستند. مخصوصاً،مساله هایی هستند که برای ثابت k می توانند در زمان $O(n^k)$ اجرا شوند، که n اندازه ورودی مساله است.*

تعریف ۱۸.۱.۱ (کلاس NP[۱۳]). ***کلاس NP** شامل مساله هایی است که در زمان چندجمله ای **تصدیق پذیر** [۱۴] است. منظور این است که اگر کسی **گواهی** [۱۵] جوابی را در اختیار ما قرار دهد، در زمان چندجمله ای برحسب اندازه ورودی مساله، می توان تصدیق کرد که گواهی درست است.*

تعریف ۱۹.۱.۱ (مساله تصمیم گیری[۱۶]). *مساله ای که جواب آن بلی یا خیر باشد (یا به طور رسمی تر ۱ یا ۰ باشد)* ***مساله***

[۱۱]Polynomial-time algorithm

[۱۲]input size

[۱۳]Nondeterministic polynomial

[۱۴]Verifiable

[۱۵]Certificate

[۱۶]Decision problem

تصمیم‌گیری است.

تعریف ۲۰.۱.۱ (الگوریتم کاهش [۱۷]). *فرض کنید رویه ای داریم که هر نمونه α از A را به نمونه β از B با ویژگی های زیر تبدیل می کند:*

۱. *تبدیل در زمان چند جمله ای انجام می شود،*

۲. *پاسخ ها یکسان است، یعنی، پاسخ به α "بلی" است اگر وفقط اگر پاسخ به β نیز "بلی" باشد.*

*چنین رویه را **الگوریتم کاهش** زمان چند جمله ای می نامیم.*

تعریف ۲۱.۱.۱ (NP کامل [۱۸]). *یک مساله تصمیم $A \in NP$، **NP کامل** محسوب می گردد اگر تمامی مسایل دیگر رده NP ، در زمان چند جمله ای قابل کاهش به مساله A باشد.*

تعریف ۲۲.۱.۱ (مسایل NP–hard). *مسایل بهینه سازی می باشند که مسایل تصمیم مرتبط با آنها از نوع NP کامل است.*

اغلب مسایل بهینه سازی در دنیای واقعی از نوع مسایل NP–hard می باشند و الگوریتم موثر اثبات شده ای برای حل آنها وجود ندارد و زمان حل بهینه آنها در رده زمان نمایی می باشد.
تحقیق درباره پرسش $P \neq NP$ هسته ی مساله های NP کامل است. اغلب دانشمندان علوم کامپیوتر اعتقاد دارند که $P \neq NP$ منجر به ارتباط بین P ، NP و NP کامل مانند شکل ۱.۱ می شود. اما ممکن است الگوریتم زمان چندجمله ای برای مساله NP کامل پیدا شود و در نتیجه اثبات شود $P = NP$ ، با این وجود چون هنوز الگوریتم زمان چند جمله ای برای مساله NP کامل کشف نشده، اثبات این که مساله ای NP کامل است، گواه هوشمندی بر سختی [۱۹] آن است.

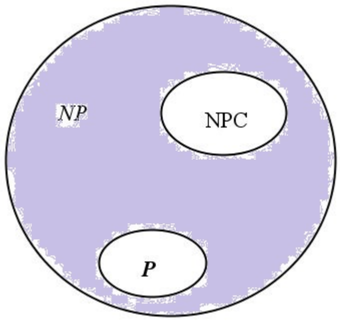
تعریف ۲۳.۱.۱ (مساله کوله پشتی ۰ و ۱ [۲۰]). *فرض کنید n شی داریم که از ۱ تا n شماره گذاری شده اند، شی i ام ارزشی معادل v_i و وزنی برابر با w_i دارد. معمولا فرض می شود که وزن ها و ارزش ها نامنفی اند، بیشترین وزنی که می توان درکوله پشتی حمل کرد، W است. معروف ترین نوع از این مسئله، مسئله ی کوله پشتی ۰ و ۱ است، یعنی تعداد هر شی، یا ۰ است (آن شی را انتخاب نمی‌کنیم) یا ۱ (آن شی انتخاب می شود). مسئله ی کوله پشتی ۰ و ۱ را می توان به صورت زیر، به زبان ریاضی بیان کرد:*

[۱۷] Reduction algorithm

[۱۸] NP-complete

[۱۹] Intractable

[۲۰] 0, 1 Knapsack problem



شکل ۱.۱: ارتباط بین NP, P و NPC .

•

$$x_i = \begin{cases} ۱ & , \quad \text{اگر شی } i \text{ ام انتخاب شود.} \\ ۰ & , \quad \text{اگر شی } i \text{ ام انتخاب نشود.} \end{cases}$$

- مقدار $\sum_{i=۱}^{n} v_i x_i$ را بیشینه کنید.

- به طوری‌که $\sum_{i=۱}^{n} w_i x_i \leqslant W, \quad x_i \in \{۰, ۱\}$

تعریف ۲۴.۱.۱ (مساله کوله پشتی پیوسته [۲۱]**).** *مساله کوله پشتی پیوسته یا همان مساله کوله پشتی کسری* [۲۲]*، شبیه مساله کوله پشتی ۰ و ۱ است اما در این مساله هر کسری از شی می تواند داخل کوله پشتی گذاشته شود، یعنی $۰ \leq x_i \leq ۱$*

تعریف ۲۵.۱.۱ (مساله پوشش مجموعه[۲۳]**).** *نمونه (X, F) از مساله پوشش مجموعه، شامل مجموعه متناهی X و خانواده F از زیر مجموعه های X است، به طوری‌که هر عنصر X متعلق به حداقل یک زیر مجموعه در F است یعنی :*

$$X = \bigcup_{S \in F} S$$

می‌گوییم زیر مجموعه $S \in F$، عناصرش را می پوشاند. مساله یافتن می نیمم اندازه $C \subseteq F$ است که اعضای آن تمام X را می پوشاند:

$$X = \bigcup_{S \in C} S \tag{۱.۱}$$

هر C که در معادله (۱.۱) صدق می کند می گوییم X را می پوشاند.

[۲۱] Continuous knapsack problem

[۲۲] Fractional knapsack problem

[۲۳] Set covering

تعریف ۲۶.۱.۱ (مساله 1-maxian). *گراف* $G=(V,E)$ *با* $|V|=n$ *و* $|E|=m$ *، با وزن های نامنفی* $w_i \in \mathbb{R}^+$ *برای هر* $i \in V$ *و طول* $\ell_e \in \mathbb{R}^+$ *برای هر* $e \in E$*، در نظر می‌گیریم، در یک نمونه 1-maxian هدف انتخاب راسی مانند* x *است که مقدار*

$$f(x) := \sum_{i \in V} w_i d(i,x)$$

بیشترین مقدار شود، که در آن $d(i,v)$ *کوتاهترین فاصله از* i *تا* v *می باشد [۱۳].*

نرم ها

فرض کنید $p,q \in R^n$ نرم های[۲۴] زیر را معرفی می کنیم:

- نرم خطی مستقیم[۲۵] یا نرم مانهاتان [۲۶] (ℓ_1)

$$d_1(p,q) = ||p-q||_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \tag{۲.۱}$$

- نرم اقلیدسی [۲۷] (ℓ_2)

$$d_2(p,q) = ||p-q||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|p_i - q_i|)^2} \tag{۳.۱}$$

- نرم اقلیدسی مربعی [۲۸]

$$d(p,q) = \sum_{i=1}^{n} (|p_i - q_i|)^2 \tag{۴.۱}$$

- نرم چبیشف [۲۹] یا نرم ماکزیمم [۳۰] (ℓ_∞)

$$D_{chebyshev}(p,q) = \max_i (|p_i - q_i|). \tag{۵.۱}$$

[۲۴] Norm

[۲۵] Rectilinear distance

[۲۶] Manhattan distance

[۲۷] Euclidean distance

[۲۸] Euclidean squared distance

[۲۹] Chebyshev distance

[۳۰] Maximum metric

۲.۱ بهینه سازی معکوس

وقتی که یک مساله بهینه سازی را حل میکنیم معمولاً فرض می کنیم که پارامترهای مساله مانند هزینه ها، ظرفیت، فاصله و غیره شناخته شده اند و به دنبال پیدا کردن جواب بهینه هستیم. اما در عمل ممکن است حالتی اتفاق بیفتد، که ما مقدار دقیق پارامترها را نمی دانیم و فقط تخمین هایی برای پارامترها داریم. علاوه بر این ممکن است از طریق مشاهده، تجربه و غیره بهینه بودن جواب مشخصی را از قبل می دانیم. از این رو ایده بهینه سازی معکوس[۳۱]، پیدا کردن مقادیر پارامتر ها است به گونه ای که جواب مورد نظر بهینه باقی بماند.

بهینه سازی معکوس از مدل های برنامه ریزی ریاضی است و نقش اساسی در حمل ونقل[۳۲] ، جریان ترافیک[۳۳] ، علم ژئوفیزیک[۳۴] ، علم پزشکی دارد [۹].

در این جا به یک نمونه از کاربرد بهینه سازی معکوس در زمینه مکان یابی اشاره می کنیم (این مثال کاربردی برگرفته از مرجع [۱۷] است):

فرض کنید یک شبکه جاده ای[۳۵] با مجموعه ای از مشتری ها و خدمات دهنده ها داده شده است. هدف مکان یابی مراکز خدمات دهنده است به طوری که بیشترین فاصله به مشتری ها، حداقل شود. اما اغلب مواجه می شویم با موقعیتی که خدمات دهنده ها از قبل وجود داشته اند و با هزینه های معقول نمی توان آنها را جابجا کرد. در این مواقع به منظور اینکه خدمات دهنده مورد نظر بهینه شود می توان با تغییر در شبکه (بهبود جاده ها و ...) به این هدف دست یافت.

در چند سال اخیر معکوس برخی از مسایل بهینه سازی مورد بررسی واقع شده است. از جمله مساله برنامه ریزی خطی (LP)، برنامه ریزی صحیح (IP) ، مسایل مکان یابی، مسایل جریان در شبکه[۳۶] ، مساله درخت پوشای کمینه[۳۷] ، مساله فروشنده دوره گرد(TSP) ، مساله کوله پشتی و غیره (برای اطلاع بیشتر می توان به مراجع [۱] و [۱۰] و [۲۴] رجوع کرد).

مساله بهینه سازی معکوس را می توان به صورت زیر بیان کرد:

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید* $\Gamma = (c, S, f)$ *یک مساله بهینه سازی باشد به طوری که* $c \in \mathbb{R}^n$ *یک پارامتر و* S *مجموعه*

۳۱ Inverse optimization

۳۲ Transportation

۳۳ Traffic flow

۳۴ Geophysical sciences

۳۵ Road network

۳۶ Network flow problems

۳۷ Minimum Spanning Tree Problem

جواب های شدنی و $f : \mathbb{R}^n \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هدف است. در یک مساله بهینه سازی کلاسیک هدف پیدا کردن یک جواب شدنی با کمترین مقدار تابع هدف است یعنی:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(c,x) \\ s.t. & \\ & x \in S \end{aligned}$$

در **مساله معکوس متناظر** یک جواب شدنی $x^* \in S$ داده شده است. هدف تغییر c به $\tilde{c}$ با کمترین هزینه است به طوری که x^* یک جواب بهینه برای مساله زیر باشد.

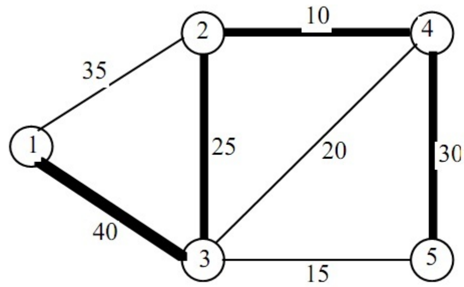
$$\tilde{\Gamma} = (\tilde{c}, S, f)$$

با فرض این که l و u به ترتیب بردار کران های پایین و بالا برای c باشند. مساله معکوس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & ||\tilde{c} - c||_p \\ s.t. & \\ & f(\tilde{c}, x^*) = \min\{f(\tilde{c}, x) : x \in S\}, \\ & l \leq \tilde{c} \leq u, \\ & \tilde{c} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

هزینه تغییرات معمولاً به وسیله نرم‌های ℓ_1 یا L_∞ اندازه‌گیری می‌شوند. برای مثال مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید که در آن ، $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$، و $c \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ و $r < s \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ s.t. & \\ & Ax \geq b, \\ & r \leq x \leq s. \end{aligned}$$



شکل ۲.۱: گراف مثال ۲.۲.۱

با فرض اینکه $\widehat{x}$ یک جواب شدنی باشد که می خواهیم بهینه شود، مساله معکوس متناظر به صورت زیر است:

$$\min||c-\widehat{c}||$$
$$s.t. \qquad \widehat{c}^t\widehat{x}=\min\{\widehat{c}^t x: Ax\geq b, r\leq x\leq s\}.$$

به عنوان نمونه دیگری از مسایل بهینه سازی معکوس، فرض کنید در یک گراف می خواهیم با کمترین تغییر در هزینه کمان ها، یک درخت مورد نظر درخت پوشای کمینه باشد. این یک نمونه ساده از مساله درخت پوشای کمینه معکوس است (مثال زیر از مرجع [۲۷] برگرفته شده است).

مثال ۲.۲.۱. *درگراف شکل ۲.۱ می خواهیم مجموعه یال های $T^*=\{(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴),(۴,۵)\}$ جواب بهینه مساله (درخت پوشای کمینه) باشد.*

فرض کنید δ_{ij} مقداری که به هزینه هرکمان (i,j) اضافه می گردد. بنابراین $۰\leq\delta_{ij}$ برای $(i,j)\in T^*$ و $\delta_{ij}\geq ۰$ برای $(i,j)\notin T^*$. بنابراین برای رسیدن به این منظور باید مدل برنامه ریزی خطی زیر را حل کنیم:

$$min \quad \sum_{(i,j)\in T^*}-\delta_{ij}+\sum_{(i,j)\notin T^*}\delta_{ij}$$
$$s.t. \quad ۳۵+\delta_{۱۲}\geq ۴۰+\delta_{۱۳}$$
$$۳۵+\delta_{۱۲}\geq ۲۵+\delta_{۲۳}$$
$$۲۰+\delta_{۳۴}\geq ۲۵+\delta_{۲۳}$$
$$۲۰+\delta_{۳۴}\geq ۱۰+\delta_{۲۴}$$

$$۱۵ + \delta_{۳۵} \geq ۱۰ + \delta_{۲۴}$$

$$۱۵ + \delta_{۳۵} \geq ۲۵ + \delta_{۲۳}$$

$$۱۵ + \delta_{۳۵} \geq ۳۰ + \delta_{۴۵}$$

$$\delta_{ij} \leq ۰ \quad for\,(i,j) \in T^*$$

$$\delta_{ij} \geq ۰ \quad for\,(i,j) \notin T^*$$

پس از حل مدل فوق جواب بهینه آن به شرح زیر استخراج شد.

$$z^* = ۲۵$$

$$\delta_{۱۲} = ۵$$

$$\delta_{۳۴} = ۵$$

$$\delta_{۳۵} = ۱۵$$

$$\delta_{۱۳} = \delta_{۲۳} = \delta_{۲۴} = \delta_{۴۵} = ۰$$

با اعمال این تغییرات روی گراف، درخت T^* جواب بهینه مساله است.

در رابطه بین یک مساله بهینه سازی و مساله معکوس متناظر آن از لحاظ پیچیدگی محاسباتی سوالات زیر مطرح می شود:

- اگر یک مساله بهینه سازی در زمان چندجمله ای حل شود، آیا معکوس آن نیز در زمان چند جمله ای قابل حل است؟
- اگر یک مساله $NP-hard$ باشد، آیا معکوس آن نیز $NP-hard$ است؟

پاسخ به سوالات بالا منفی است بعنوان مثال مساله maxian-۱ روی گراف های عمومی در زمان چند جمله ای قابل حل است ولی مساله معکوس متناظر آن $NP-hard$ است [۱۳].

مساله p -میانه روی گراف های عمومی $NP-hard$ است، ولی مساله p -میانه معکوس با تغییر وزن راس ها در زمان چند جمله ای قابل حل است [۷]. بسیاری از مساله ها از لحاظ پیچیدگی محاسباتی با مساله معکوس متناظر خود یکسان هستند، بعنوان مثال مساله برنامه ریزی خطی و مساله معکوس آن هر دو در زمان چند جمله ای قابل حل هستند [۱].

۳.۱ مرور ادبیات

در سال های اخیر مسایل بهینه سازی معکوس [۳۸] مورد توجه قرار گرفته است. مساله بهینه سازی معکوس یعنی تغییر در پارامترهای مساله (وزن، مختصات، طول یال ها و غیره) با کمترین هزینه، به طوری که جواب از پیش مشخص شده (مورد نظر) جواب بهینه شود. در سال ۱۹۹۲ برتون [۳۹] و توینت مساله کوتاهترین مسیر معکوس[۴۰] را با کاربرد جالب آن در علم ژئوفیزیک معرفی کردند، در یک شبکه داده شده طول یال ها را تا جایی که امکان دارد تغییر می دهیم به طوری که مسیر مورد نظر بهینه شود [۹] . هیوبرگر در سال ۲۰۰۰ در مقاله تحت عنوان بهینه سازی معکوس، به طور جامع به بررسی مسایل بهینه سازی معکوس و روش های حل و معکوس بعضی از مسایل بهینه سازی پرداخته است[۱۷].

در اینجا ما خود را به مسایل مکان یابی معکوس محدود می کنیم، در مسایل مکان یابی کلاسیک فاصله از مشتری ها به خدمات دهنده کمترین شود. از این رو کیفیت مکان های خدمات دهنده، به وزن(تقاضا)مشتری و فاصله بین مشتری و خدمات دهنده بستگی دارد.

از معروفترین مساله های مکان یابی، مساله p –میانه و مساله p –مرکز می باشند. در مساله p –میانه، هدف انتخاب یک مجموعه از p خدمات دهنده است، به طوری که مجموع (وزن) فاصله از مشتری ها به نزدیکترین خدمات دهنده کمترین شود. در مساله p –مرکز، هدف انتخاب مجموعه ای متشکل از p خدمات دهنده، به طوری که حداکثر (وزن) فاصله بین مشتری ها و نزدیکترین خدمات دهنده کمترین شود.

مساله های مکان یابی بیشتر روی گراف و و روی صفحه مورد توجه می باشند. برای یک مساله مکان یابی روی گراف، مجموعه راس ها بیانگر موقعیت مشتری می باشند و فاصله دو نقطه،کوتاهترین فاصله در گراف با توجه به طول یال ها تعریف می شود. در حالتی که مساله مکان یابی روی صفحه باشد، فاصله ها معمولاً بوسیله نرم های L_1وL_2 یا L_∞ تعریف می شوند. از این رو پارامترهای یک مساله مکان یابی، **وزن رئوس و طول یال ها** در یک گراف و یا **وزن راس ها و موقعیت نقطه** در صفحه می باشند.

بورکارد [۴۱] و همکاران (۲۰۰۴) مساله p –میانه معکوس با تغییر وزن راس ها را مطرح کردند [۷] . آنها نشان دادند که مساله p –میانه معکوس با تغییر وزن راس ها در زمان چندجمله ای حل می شود که در آن p ثابت است نه یک پارامتر ورودی.

[۳۸] Inverse optimizaton problems

[۳۹] Burton

[۴۰] Inverse shorteest path

[۴۱] Rainer Ernst Burkard

آنها یک الگوریتم حریصانه-مانند[۴۲] برای مساله ۱-میانه معکوس روی درخت با وزن های مثبت با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دادند. همچنین آنها یک الگوریتم حریصانه-مانند با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ برای مساله ۱-میانه معکوس روی صفحه که فاصله بین نقاط با متر مانهاتان یا متر ماکزیمم اندازه گیری می شود، ارائه دادند. همچنین نشان دادند که مساله ۱-میانه معکوس روی حلقه[۴۳] در زمان $O(n^{۲})$ حل می شود [۸].

در سال ۲۰۰۸ مساله فرما-وبر معکوس [۴۴]، توسط بورکارد، گلوی[۴۵] و گاسنر[۴۶] مورد مطالعه قرار گرفت. n نقطه در صفحه با وزن های نامنفی داده شده است مساله فرما-وبر معکوس (۱-میانه اقلیدسی معکوس) شامل تغییر وزن راس ها با کمترین هزینه است به طوری که یک نقطه از پیش مشخص شده در صفحه اقلیدسی ۱-میانه شود. آنها با فرض اینکه نقطه مورد نظر نمی تواند با یکی از n نقطه داده شده منطبق شود و همچنین با فرض اینکه هزینه تغییرات وزن تمام راس ها یکسان و برابر واحد است یک الگوریتم حریصانه - مانند که مساله را در زمان $O(n \log n)$ حل می کند ارائه دادند[۶].

گاسنر [۱۳] در سال ۲۰۰۸ مساله maxian-۱ معکوس، با تغییر طول یال ها را مورد بررسی قرار داد و نشان داد که مساله روی گراف های عمومی $NP-hard$ است. وی یک الگوریتم با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ برای این مساله روی درخت ارائه داد.

مساله ۱-میانه معکوس با تغییر مختصات [۴۷] یعنی تغییر موقعیت (مختصات) نقاط داده شده در $\mathbb{R}^d$، با کمترین هزینه به طوری که نقطه از پیش مشخص شده ۱-میانه شود. این مساله توسط باروقی، بورکارد و علیزاده بررسی شد [۴] . آنها نشان دادند که مساله در $\mathbb{R}^d$ با نرم خطی مستقیم NP-hard است اما می تواند با الگوریتم شبه چندجمله ای[۴۸] حل شود. آنها همچنین نشان دادند که این مساله در زمان چند جمله ای قابل حل است وقتی که وزن نقاط مساوی باشند و یک الگوریتم با مرتبه زمانی $O(dn)$ برای مساله در $\mathbb{R}^d$ با نرم اقلیدسی مربعی پیشنهاد دادند. علاوه بر این آنها نشان دادند که مساله روی صفحه و با نرم چبیشف، NP-hard است و برای این حالت نیز الگوریتم شبه چند جمله ای ارائه دادند .

مساله p -میانه معکوس با تغییر طول یال ها در سال ۲۰۰۹ توسط باروقی، بورکارد و گاسنر مطرح شد [۵] . آنها نشان دادند که مساله روی گراف های عمومی NP-hard می باشد و نشان دادند که مساله ۲-میانه معکوس با تغییر طول یال ها روی درخت در زمان چند جمله ای قابل حل است. همچنین آنها نشان دادند که مساله ۲-میانه معکوس با تغییر طول یال ها روی

[۴۲] Greedy-like

[۴۳] Cycle

[۴۴] Inverse Fermat-Weber

[۴۵] M.Galavii

[۴۶] E.Gassner

[۴۷] Inverse 1-median problem with variable coordinates

[۴۸] Pseudo-polynomial

گراف ستاره، در زمان خطی قابل حل است.

گلوی(۲۰۱۰) مساله ۱ -میانه معکوس با تغییر وزن راس ها روی درخت را مورد بررسی قرار داد [۱۶] . وی نشان داد که مساله می تواند به مساله کوله پشتی پیوسته تبدیل شود که پیچیدگی محاسباتی آن از مرتبه $O(n)$ می باشد. وی همچنین نشان داد مساله ۱-میانه معکوس روی مسیر با وزن های مثبت و منفی نیز در زمان خطی قابل حل است.

فصل ۲

مساله p -میانه

در این فصل ابتدا شرحی مختصر درباره انواع مسایل مکان یابی بیان می کنیم. سپس به یکی از معروفترین مسایل مکان یابی یعنی، مساله p -میانه می پردازیم. تاریخچه ای درباره این مساله ارائه کرده و پس از تعریف و مدل بندی مساله، به مساله های ۱و۲-میانه روی درخت می پردازیم. ضمناً الگوریتم گلدمن [۱] برای تعیین ۱-میانه روی درخت، و روش حذف یال [۲] برای تعیین ۲-میانه روی درخت را که در ادامه بحث از آنها استفاده خواهیم کرد، شرح می دهیم.

۱.۲ مسایل مکان یابی

۱.۱.۲ هدف های مسایل مکان یابی

مسایل مکان یابی، هدف های مختلفی را دربردارند. هدف ها در شناسایی و اولویت بندی معیارهای تصمیم گیری در یک مساله مکان یابی، اهمیت و نقش مهمی دارند.

در یک تقسیم بندی توسط درِنزر[۳] (۱۹۹۵)، هدف های مسایل مکان یابی با رویکرد برنامه ریزی ریاضی و برحسب انواع تابع هدف، به سه دسته تقسیم شده اند .

۱. هدف های کششی [۴]: این هدف ها اشاره به نزدیکی هر چه بیشتر محل استقرار خدمات دهنده به مشتریان و کمتر کردن

[۱] Goldmans algorithm

[۲] Arc-Deletion Method

[۳] Drenzer

[۴] Pull

مسافت دارند که شامل قدیمی ترین مسایل مکان یابی می شوند. در واقع مسایلی که تابع هدف آنها به صورت کمینه سازی است، هدف های کششی دارند.

۲. هدف های فشاری[۵]: این هدف ها مسایل مکان یابی مراکز نامطلوب را در بر می گیرند و از اوایل دهه ۱۹۷۰ مورد بررسی قرار گرفتند. هدف در این مسایل، حداکثر کردن فاصله مراکز جدید از مراکز موجود است. مدل هایی که برای این نوع هدف ها ارائه شدند بعد ها به مدل های مکان یابی مضر[۶] معروف شدند. مثال برای این هدف ها، یافتن مکان مناسب برای دفن زباله است که در آن، یکی از هدف ها بیشینه کردن فاصله این مکان، از مناطق مسکونی است.

۳. هدف های متعادل[۷]: هدف هایی هستند که تلاش در متعادل ساختن مسافت بین مراکز و مشتریان دارند و هدف اصلی آنها دستیابی به برابری است. این هدفها بیشتر در تصمیم گیری های عمومی کاربرد دارند؛ جایی که هدف برقراری عدالت بین افراد است. مانند متعادل کردن حجم کاری مراکز پلیس که سبب متعادل شدن ارایه خدمات به متقاضیان می شود.

۲.۱.۲ انواع مسایل مکان یابی

مسایل مکان یابی دارای تنوع بسیار زیادی هستند، از این رو برای سهولت در بیان، این مسایل را به راه های مختلفی دسته بندی کرده اند، اما به طور کلی مسایل تحلیل مکان در یکی از دسته های زیر قرار می گیرند:

۱. مساله p -میانه[۸]: فرض کنید مجموعه ای از مشتریان و همچنین مجموعه ای از مراکز بالقوه جهت خدمت رسانی به این مشتریان وجود داشته باشد. مساله p – میانه عبارت است از احداث مجموعه ای از p مرکز و تخصیص هر یک از مشتریان به نزدیکترین مرکز احداث شده به آن. این قبیل مسایل یک معیار هزینه ای را مینیمم می کند. هزینه ممکن است بر حسب زمان، پول، تعداد سفر، مسافت کل یا هرمقیاس دیگری بیان شود. به علت اینکه در این گونه مسایل، هدف حداقل کردن هزینه کل است، با نام مسایل **حداقل مجموع**[۹] یا **مسئله وبر** نیز مطرح می شوند.

۲. مساله p -مرکز [۱۰]: این مسایل برای تعیین مکان pمرکز به منظور حداقل کردن حداکثر فاصله هر مرکز، تا نقطه تقاضایی که برای خدمت دادن به آن نقطه مورد تقاضا تعیین شده است، استفاده می شوند. در واقع این گونه مسایل برای

[۵] Push

[۶] Obnoxious location Models

[۷] Balancing

[۸] p-median problem

[۹] Minsum

[۱۰] p-center problem

استقرارخدمات اورژانس، مانند: آتش نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورداستفاده قرار می گیرند. در این مسایل تعداد مراکز از پیش مشخص است.

۳. مسئله مکان یابی مراکز با ظرفیت نامحدود (UFLP)[۱۱]: این مسایل در دسته مسایل حداقل مجموع قرار می گیرند اما در این مسایل هزینه، هزینه ثابت رانیز شامل می شود و هزینه ثابت به مکانی بستگی دارد که مرکز در آن قرار می گیرد. تعداد مراکزی که باید استقرار یابند از پیش مشخص نیست، اما به گونه ای معین می شوند که هزینه را کمینه کنند. در این گونه مسایل ظرفیت هر مرکز نامحدود در نظر گرفته می شود از این رو تخصیص یک تقاضا به بیش از یک نقطه خدمات دهنده، هرگز سودبخش نخواهد بود.

۴. مسئله مکان یابی مراکز با ظرفیت محدود (CFLP) [۱۲]: این مسایل شبیه به مسایل UFLP هستند، فقط در این مسایل ظرفیت هر کدام از مراکز محدود است. ممکن است در این مورد جواب بهینه به گونه ای باشد که یک مشتری به بیش از یک منبع تأمین، ارجاع داده شود. در واقع ممکن است پس از تخصیص مشتری به یک مرکز، پس ازبرآوردن بخشی از تقاضای مشتری، ظرفیت مرکز به پایان برسد و برای برآوردن باقی مانده تقاضای مشتری مجبور به اختصاص آن به دیگر مراکز که هزینه بیشتری نیز دربر دارند، شویم.

۵. مسایل تخصیص درجه دو [۱۳]: مسئله ای را بیان می کند که n مرکز، مانند n ماشین که بین آنها جریان برقرار است به گونه ای در n مکان قرار داده شوند تا هزینه کل مینیمم شود. اگر ۴ ماشین داشته باشیم که بخواهیم مستقر کنیم، !۴ ترکیب ممکن وجود خواهد داشت.در مسئله اگر ۲۰ ماشین داشته باشیم، !۲۰ جواب ممکن وجود دارد که در حدود $۲/۴۳۲۹ \times ۱۰^{۱۸}$ حالت مختلف خواهد داشت که این کار حتی برای کامپیوترهای پرسرعت امروزی دشوار است که این سختی مساله را نشان می دهد.

[۱۱] Uncapacitated Facility Location Problem

[۱۲] Capacity Facility Location Problem

[۱۳] Quadratic Assignment Problem

۲.۲ مساله p -میانه

تاریخچه مساله p -میانه

بدون تردید در زمینه مکان یابی خدمات دهنده، مساله p – میانه، یکی از مساله هایی است که بیشترین مطالعه روی آن انجام شده است. ما در ابتدا شرحی مختصر از چگونگی پیدایش مساله و کارهای انجام شده توسط لوییس حکیمی[۱۴] و چارلز رِوِل[۱۵] که به عنوان پدران و نظم دهندگان اصلی مساله شناخته شده اند ارائه می دهیم (این مباحث برگرفته از مرجع [۲۲] و [۲۳] می باشند).

قدمت مساله های **حداقل مجموع** به قرن ۱۷ میلادی باز می گردد، جایی که فِرما سوال زیر را مطرح کرد:

در یک مثلث (سه نقطه در یک صفحه) داده شده پیدا کنید نقطه ای در صفحه، به طوری که مجموع فاصله های هر یک از نقاط از این نقطه کمترین شود .

در اوایل قرن ۲۰ وبِر[۱۶] مساله مشابه ای معرفی کرد. در این مساله هر یک از ۳ نقطه دارای وزنی هستند که به عنوان تقاضای مشتری تلقی می شوند. مساله وبِر، میانه ها (نقاط خدمات دهنده) را در یک مکانیابی پیوسته و در یک صفحه اقلیدسی مکان یابی می کند .

بعداً مساله وبِر، به بیشتر از ۳ نقطه تقاضا و مکان یابی بیشتر از یک خدمات دهنده تعمیم داده شد. مساله هایی با خدمات دهندهای چندگانه به مساله های **وبر چندگانه** [۱۷] معروف شدند.

وقتی حکیمی در سال ۱۹۶۴ مساله پیدا کردن **میانه مطلق** [۱۸] گراف را مطرح کرد، مفهوم راس میانه گراف و همچنین روش هایی برای پیدا کردن جواب مساله وبر چندگانه شناخته شده بودند. میانه مطلق تعمیم میانه بود که در آن خدمات دهنده ها در هر نقطه روی طول یال ها می توانند انتخاب شوند. (این تعمیم فقط برای شبکه امکان پذیر است) وی به **راس مرکز** [۱۹] نیز اشاره کرد که راس مرکز راسی است که بیشترین فاصله به هر گره دیگر کمترین شود. همچنین تعریف کرد مرکز مطلق [۲۰] که در هر جا روی شبکه می تواند تعیین محل شود. حکیمی در مقاله خود تحت عنوان: ''مکان یابی مرکز سوئیچینگ تلفن در یک شبکه

[۱۴] Louis Hakimi

[۱۵] Charles Revelle

[۱۶] Alfred Weber

[۱۷] Multi-Weber

[۱۸] Absolute median

[۱۹] Center vertex

[۲۰] Absolute center

ارتباطات "[۲۱] و با هدف کمینه سازی طول کل کابل ها اظهار داشت که برای این مساله مفهوم راس میانه نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد، زیرا سوئچ S می تواند در هر جا روی شبکه شامل رئوس یا یال ها انتخاب شود. بنابراین فاصله $d(x,y)$ روی یک شبکه یا گراف، که طول کوتاهترین مسیر بین x و y است را تعریف کرد. نقطه $y_۰$ روی گراف G **میانه مطلق** گراف G است اگر برای هر نقطه y روی گراف نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, y_۰) \leq \sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, y) \qquad (۱.۲)$$

که این نقطه همان مکان بهینه سوئیچ در شبکه ارتباطات می باشد.

قضیه ۱.۲.۲ (حکیمی ۱۹۶۴). *میانه مطلق گراف همیشه در یکی از راس های گراف واقع می شود.*

یعنی اگر y یک نقطه دلخواه از گراف باشد همیشه یک راس v_m از گراف G وجود دارد به طوری که:

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, v_m) \leq \sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, y)$$

مساله میانه مطلق جوابگوی مکان یابی بهینه یک خدمات دهنده می باشد. هنگامی که بیشتر از یک خدمات دهنده مکان یابی می شوند (گوییم p خدمات دهنده) مساله به عنوان مساله p -میانه شناخته می شود. p -میانه، اصطلاحی است که اولین بار توسط حکیمی در سال ۱۹۶۵ به کار برده شد. هنگامی که دو یا بیش از دو خدمات دهنده باید روی یک صفحه یا شبکه مکان یابی شوند تخصیص نقاط تقاضا به خدمات دهنده ها مساله را کمی سخت تر می کند. بنابراین حکیمی تعاریف بیشتری مطرح کرد:

اگر $X_p = \{x_۱, x_۲, ...x_p\}$ ، فاصله گره v_i از X_p برابر است با:

$$d(v_i, X_p) = \min[d(v_i, x_۱), d(v_i, x_۲), , d(v_i, x_p)]$$

یعنی فاصله بین گره v_i و نزدیکترین نقطه x_k در X_p . بنابراین X_p^* برای گراف G ، p -میانه می باشد اگر برای هر X_p در گراف G داشته باشیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, X_p^*) \leq \sum_{i=۱}^{n} w_i d(v_i, X_p) \qquad (۲.۲)$$

به عبارت دیگر X_p^* مجموعه ای از p نقطه روی گراف G می باشد به طوری که اگر این نقاط به عنوان خدمات دهنده باشند، کل وزن(فاصله) بین نقاط تقاضا ونزدیکترین خدمات دهنده به حد اقل برسد (کمترین شود).

قضیه ۲.۲.۲ (حکیمی ۱۹۶۵). *یک زیر مجموعه V_p^*از مجموعه راس ها شامل p راس وجود دارد به طوری که برای مجموعه*

[۲۱] locating a telephone switching center in a communication network