تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استادان راهنما،جناب آقایان دکتر ابراهیم وطن دوست و دکتز سجاد محمود رباطی و استاد مشاور، جناب آقای دکتر علی بهتوئی صمیمانه تشکر و قدر دانی کنم که زحمت مطالعه و راهنمایی و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه ، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنماریی قرار دادند. در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر ومهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را ستایش می کنم.

رحیمه عباسپور

اسفند ۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

گراف Γ را صحیح نامیم هرگاه مقادیرویژه‌ی ماتریس مجاورت آن صحیح باشند. مفهوم گراف‌های صحیح ابتدا توسط هراری و اشنوک [۲] در سال ۱۹۷۴ مطرح شد.

مسأله‌ی یافتن گراف‌های صحیح، مسأله‌ی ساده‌ای نیست. معرفی خانواده‌هایی از گراف‌های صحیح مسأله‌ای است که مورد علاقه بسیاری از ریاضی‌دانان است.

فرض کنید G یک گروه متناهی با عضو همانی ۱ باشد و $S \subseteq G$ به طوریکه $S \not\ni ۱$ و $S^{-۱} = \{s^{-۱} \ : \ s \in S\} = S$. در این صورت گراف کیلی $X = Cay(G,S)$ ، یک گراف ساده است که مجموعه رأس‌های آن $V(X) = G$ و مجموعه یال‌های آن به‌صورت

$$E(X) = \{\{a,b\} : ab^{-۱} \in S\}$$

می‌باشد.

ترستین سندر و والترکلوتز [۳] ثابت کردند اگر مجموعه‌ی S به جبر بولی که بوسیله زیرگروه‌هایی از گروه آبلی G به وجود آمده است متعلق باشد، آنگاه $Cay(G,S)$ گراف کیلی صحیح است.

[۲] Schwenk, Harary
[۳] Torsten Sander , Walter Klotz

در سال ۱۹۷۹ بابای [۴] طیف گراف‌های کیلی صحیح را با استفاده از سرشت‌های مربوط به گروه G مشخص کرد.

در سال ۲۰۱۱ عبدالهی و وطن دوست [۵] مفهوم گروه‌های کیلی صحیح ساده را ارائه کردند.

گروه G کیلی صحیح ساده یا به اختصار $CIS-$ گروه است هرگاه هرگراف همبند صحیح روی آن یک گراف چند بخشی کامل باشد.

هدف از این پایان‌نامه رده بندی $CIS-$ گروه‌های غیرساده است. در قضایای زیر، گروه‌های غیرساده که کیلی صحیح ساده هستند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. اگر $G \simeq \mathbb{Z}_p$ یا $G \simeq \mathbb{Z}_{p^۲}$ (p عدد اول است)، آنگاه G یک گروه کیلی صحیح ساده است.

قضیه ۲. اگر $G \simeq \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ باشد، آنگاه G یک گروه کیلی صحیح ساده است.

در این پایان‌نامه خانواده ای از گروه‌های متناهی غیرساده را معرفی می‌کنیم که $CIS-$ گروه نیستند.

[۴] Babai
[۵] Abdollahi , Vatandost

فصل ۱
نظریه نمایش گروه ها

مقدمه

برای درک بهتر مطالب ارائه شده در این پایان نامه لازم است خواننده با مطالب نظریه نمایش گروه‌ها آشنا باشد. در بخش اول تعاریف و قضایایی در رابطه با نظریه نمایش گروه‌ها و در بخش دوم چند قضیه اساسی از رده‌های مزدوجی و در بخش سوم سرشت یک گروه را بیان می‌کنیم.

۱.۱ نظریه نمایش گروه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید F یک میدان باشد، گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر با درایه‌های متعلق به F را با $GL(n,F)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. نمایش G روی F عبارت است از همریختی چون ρ از G به $GL(n,F)$ به ازای عدد صحیحی چون n . n درجه‌ی ρ است.

از این رو اگر ρ تابعی از G به $GL(n,F)$ باشد آنگاه ρ نمایش G است اگر و فقط اگر

$$\forall g,h \in G, (gh)\rho = (g\rho)(h\rho)$$

چون هر نمایش، همریختی است پس به ازای هر نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ داریم

$$1\rho = I_n$$

$$g^{-1}\rho = (gp)^{-1}, \forall g \in G$$

که I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

تعریف ۳.۱.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ با تعریف زیر

$$g\rho = (I_n), \forall g \in G$$

نمایش بدیهی G نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. گیریم V فضای برداری روی F، G گروه باشد. در این صورت V یک FG– مدول است اگر به ازای هر $g \in G$ و هر $v \in V$ ، حاصلضرب vg تعریف شده باشد و به ازای هر $v,u \in V$ و $\lambda \in F$ و $g,h \in G$ در شرایط زیر صدق کند.

۱ - $vg \in V$

۲ - $v(gh) = (vg)h$

۳ - $v1 = v$

۴ - $(\lambda v)g = \lambda(vg)$

۵ - $(u+v)g = ug + vg$

قضیه ۵.۱.۱. *(۱) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ نمایش G روی F باشد، آنگاه با تعریف حاصلضرب vg به صورت زیر، V تبدیل به FG– مدول می‌شود*

$$vg = v(g\rho), (v \in V, g \in G)$$

به علاوه V پایه ای چون β دارد به قسمی که

$$g\rho = [g]_\beta, (\forall g \in G)$$

(۲) فرض کنیم که V یک FG–مدول است و β پایه ی V . در این صورت تابع

$$g \longrightarrow [g]_\beta, (\forall g \in G)$$

نمایش G روی F است.

برهان. به قضیه ۴.۴ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم V یک FG– مدول است. زیرمجموعه ی W از V را FG– زیرمدول V می‌نامند هرگاه W زیرفضا باشد و به ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ۷.۱.۱. FG–مدول V را تحو یل‌ناپذیر می‌نامند هرگاه مخالف صفر باشد و FG– زیرمدولی بجز $\{0\}$ و V نداشته باشد.

تعریف ۸.۱.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامند هرگاه F^n ، یعنی FG– مدول متناظر با آن که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$vg = v(g\rho), (v \in F^n, g \in G)$$

تحویل‌ناپذیر باشد و ρرا تحویل‌پذیر می‌نامند هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

تعریف ۹.۱.۱. (۱) FG– مدولی بدیهی عبارت است از فضای برداری یک بعدی V روی F با خاصیت

$$vg = v, (\forall v \in V, g \in G)$$

(۲) FG–مدول V صادق است اگر عضو همانی G تنها عضو g ای باشد که به ازای آن

$$vg = v, (\forall v \in V)$$

تعریف ۱۰.۱.۱. گویند FG–مدول V کاملاً تحویل‌پذیر است اگر $V = U_1 \bigoplus ... \bigoplus U_r$، که هر کدام از U_i ها FG–زیرمدول تحویل‌ناپذیر V است.

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر G گروهی متناهی و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه هر FG– مدول مخالف صفر کاملاً تحویل‌پذیراست.*

برهان. به قضیه ۷.۸ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

لم ۱۲.۱.۱. *لم شور: فرض کنید V و W دو $\mathbb{C}G$– مدول تحویل‌ناپذیرند.*

(۱) اگر $\vartheta : V \longrightarrow W$ یک $\mathbb{C}G$– همریختی باشد، آنگاه ϑ یک $\mathbb{C}G$ یکریختی است و یا به ازای هر $v \in V$

$v\vartheta = ۰$، .

(۲) *اگر $\vartheta : V \longrightarrow W$ یک $\mathbb{C}G$– یکریختی باشد آنگاه ϑ مضرب اسکالری درونریختی همانی ۱_V است.*

برهان. به لم ۱.۹ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

گزاره ۱۳.۱.۱. *اگر G گروه آبلی متناهی باشد، آنگاه بعد هر $\mathbb{C}G$– مدول تحویل‌ناپذیر یک است.*

برهان. به گزاره ۵.۹ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۱۴.۱.۱. *هر گروه آبلی متناهی با حاصلضرب مستقیم گروه‌های دوری یکریخت است.*

برهان. به قضیه ۶.۹ مرجع[۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم $V_۱, ..., V_k$ تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از $\mathbb{C}G$– مدول‌های تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشند. در این صورت*

$$\sum_{i=۱}^{k} (dimV_i)^۲ = |G|$$

برهان. به قضیه ۱۲.۱۱مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

۲.۱ رده مزدوجی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $x, y \in G$، گوییم x مزدوج y در G است اگر به ازای عضوی چون $g \in G$ داشته باشیم

$$y = g^{-۱}xg$$

مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در Gمزدوج‌اند عبارت است از

$$x^G = \left\{g^{-1}xg : g \in G\right\}$$

این مجموعه را رده‌ی مزدوجی x در Gمی‌نامند.

لم ۲.۲.۱. *اگر $x, y \in G$ ، آنگاه $x^G = y^G$ یا $x^G \bigcap y^G$تهی است.*

برهان. به لم ۲.۱۲ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۳.۲.۱. اگر $G = x_1^G \bigcup ... \bigcup x_l^G$و رده‌های مزدوجی $x_1^G, ..., x_l^G$ متمایز باشند، آنگاه $x_1, ..., x_l$ را نماینده‌های رده‌های مزدوجی G می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. گیریم $x \in G$، مرکزساز x در G ، که آن را با $C_G(x)$ نشان می‌دهند عبارت است از مجموعه‌ی عناصری از G که ضربشان در xتعویض‌پذیر است، یعنی

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}$$

لذا

$$C_G(x) = \left\{g \in Gg^{-1} : xg = x\right\}$$

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنیم $x \in G$. در این صورت اندازه ی رده‌ی مزدوجی x^Gعبارت است از*

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

برهان. به قضیه ۸.۱۲ مرجع[۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۲.۶. *اگر $x \in S^n$، آنگاه x^{S_n}، یعنی رده مزدوجی x در S_n متشکل از همه‌ی جایگشت‌هایی از S_n است که شاکله‌ی دوری آن‌ها با شاکله‌ی دوری x یکی است.*

برهان. به قضیه ۱۵.۱۲مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

مثال ۱.۲.۷. رده‌های مزدوجی S_3عبارت اند از:

شاکله‌ی رده	رده
(۱)	$\{1\}$
(۲)	$\{(12),(13),(23)\}$
(۳)	$\{(123),(132)$

۱.۳ سرشت گروه

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم که V یک $\mathbb{C}G$– مدولی با پایه‌ی β است. در این صورت سرشت V عبارت است از تابع $\chi : G \longrightarrow C$ با ضابطه ی $\chi(g) = tr[g]_\beta, (g \in G)$

تعریف ۱.۳.۲. سرشت نمایش$GL(n,\mathbb{C})$ $\rho : G \longrightarrow$ را سرشت $\mathbb{C}G$– مدولC^n متناظر با آن نمایش تعریف کنیم، یعنی χ ، سرشت نمایش ρ را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi(g) = tr(g\rho), (g \in G)$$

تعریف ۱.۳.۳. گوئیم χ سرشتG است اگر χسرشت یک $\mathbb{C}G$–مدول باشد. به علاوه گوئیمχ سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$– مدولی تحویل‌ناپذیر باشد. همچنین گوئیم χ سرشت تحویل‌پذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$– مدولی تحویل‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم χ سرشت $\mathbb{C}G$–مدول Vباشد، بعد Vرا درجه ی χمی نامند. سرشت درجه ۱ را سرشت خطی می نامند. چنین سرشتی تحویل‌ناپذیر است.

گزاره ۵.۳.۱. *فرض کنیم χ سرشت $\mathbb{C}G$–مدول V است و $g \in G$ ، مرتبه‌ی g برابر m است. در این صورت*

۱ - $\chi(۱) = dimV$

۲ - $\chi(g)$ *مجموع تعدادی از ریشه‌های m ام واحداست.*

۳ - $\chi(g^{-۱}) = \overline{\chi(g)}$

۴ - *اگر $g, g^{-۱}$ مزدوج باشند، $\chi(g)$ عددی حقیقی است.*

برهان. به گزاره ۹.۱۳ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

نتیجه ۶.۳.۱. *فرض کنیم χ سرشتی از G و g عضوی با مرتبه ۲ از G باشد. در این صورت $\chi(g)$ عددی صحیح است و $\chi(g) \equiv \chi(۱)$ به پیمانه ۲*

برهان. به نتیجه ۱۰.۱۳ مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۳.۱. تابع رده ای روی G عبارت است از تابعی چون $\psi : G \longrightarrow C$ به قسمی که به ازای عناصر مزدوج x وy از G، $\psi(x) = \psi(y)$ (یعنی ψ روی رده‌های مزدوجی ثابت است).

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم $\chi_1, ..., \chi_k$ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G و $g_1, ...g_k$ نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. ماتریس K ای را که درایه ی ij ی آن $\chi_i(g_j)$ (به ازای هر i, jکه$1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$) است جدول سرشت G می‌نامند.

قضیه ۹.۳.۱. *تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی G است.*

برهان. به قضیه ۳.۱۵ مرجع [۱۴] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنید $\chi_1, ..., \chi_a$ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر متمایز G و $\psi_1, ..., \psi_b$ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر متمایز H هستند. در این صورت $G \times H$ دقیقاً دارای ab سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز است که عبارت اند از $\psi_i \times \psi_j, (1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b)$*

برهان. به قضیه ۱۸.۱۹ مرجع [۱۴] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۱.۳.۱. *گیریم g عنصری از G با مرتبه ی n است. فرض کنیم که به ازای هر i، که $1 \leq i \leq n$ و $(i, n) = 1$، عناصر g و g^i مزدوج باشند. در این صورت اگر χ سرشت دلخواهی از G باشد، آنگاه $\chi(g)$ عدد صحیح است.*

برهان. به قضیه ۱۵.۲۲ مرجع [۱۴] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۲.۳.۱. *سرشت‌های خطی G دقیقاً ارتقاء سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $\frac{G}{G'}$ به G هستند. به ویژه، تعداد سرشت‌های خطی متمایز G مساوی $|\frac{G}{G'}|$ است و لذا $|G|$ را عاد می‌کند.*

برهان. به قضیه ۱۱.۱۷مرجع [۱۴] رجوع کنید. □

مثال ۱.۳.۱۳. جدول سرشت S_4 عبارت است از:

g_i	۱	(۱۲)	(۱۲۳)	(۱۲)(۳۴)	(۱۲۳۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	−۱	۱	۱	−۱
χ_3	۲	۰	−۱	۲	۰
χ_4	۳	۱	۰	−۱	−۱
χ_5	۳	−۱	۰	−۱	۱
$\chi_3\chi_4$	۶	۰	۰	−۲	۰
$\chi_4\chi_4$	۹	۱	۰	۱	۱

فصل ۲
نظریه گراف

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی در مورد نظریه گراف می پردازیم که در فصل سوم به آن نیازمندیم.

۱.۲ نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۲. گراف Γ شامل مجموعه‌ی V از رأس‌ها، مجموعه‌ی E از یال‌ها و یک نگاشت ψ است که به هر یال $e \in E$ یک جفت نامرتب x و y از رأس‌ها را به صورت $\psi(e) = xy$ متناظر می‌کند. x و y نقاط انتهایی e نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۲. مکمل گراف G رابا $\bar{G}$ نشان می دهیم گرافی است که $V(\bar{G}) = V(G)$ و هر دو رأس که در$\bar{G}$ مجاورند درG مجاور نیستند و بالعکس.

تعریف ۳.۱.۲. رأسی که باهیچ کدام از رئوس گراف، مجاور نباشد رأس تنها نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۲. گرافی را که شامل هیچ یالی نباشد، گراف تهی گویند.

تعریف ۵.۱.۲. یالی با دو انتهای یکسان را طوقه نامند. گرافی که دارای طوقه نباشد و هیچ دوتایی از یال هایش به یک زوج رأس متصل نباشند (که به آنها یال‌های چندگانه گویند)، گراف ساده نامیده می شود.

در این پایان‌نامه، گراف‌های مورد مطالعه ساده می باشند مگر آن که خلاف آن اشاره شود.

تعریف ۶.۱.۲. گراف ساده‌ای را که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز با یالی به هم متصل باشند، گراف کامل نامند. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۲. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به دو زیر مجموعه X و Y طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. گراف دوبخشی کامل، گراف دوبخشی است که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل باشد. در این صورت اگر $m = |X|$ و $n = |Y|$ باشد، این گراف را به‌وسیله‌ی $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

گرافهای چندبخشی نیز مانند گراف‌های دوبخشی تعریف می‌شوند.

تعریف ۸.۱.۲. اگر یکی از مجموعه‌های X یا Y در تعریف اخیر تک عضوی باشد، آن گراف را ستاره‌ای نامند و با $K_{۱,n}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۲. درجه رأس v در Γ که با $d_\Gamma(v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با تعداد یال‌هایی از Γ که v بر آن‌ها واقع است. کمینه و بیشینه درجه رأس‌های Γ را به ترتیب با $\delta(\Gamma)$ و $\Delta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

گراف k– منظم است اگر درجه هر رأس آن برابر با k باشد.

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنید Γ یک گراف با n رأس باشد، ماتریس مربعی $n \times n$، $A = (a_{ij})$ را که در آن

a_{ij} برابر تعداد یال‌هایی است که v_i و v_j را به هم متصل می کند، ماتریس مجاورت Γ می‌نامند. این ماتریس مربعی، متقارن می‌باشد و درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر هستند.

تعریف ۱۱.۱.۲. مسیر در یک گراف به مجموعه یال‌های غیرتکراری و مجاوری گفته می‌شود که هر یال در هر رأس مربوط به خودش تنها با یک یال دیگر مجاور باشد، اگر این مسیر شامل n رأس باشد آن را با P_n نمایش می‌دهند. به مسیر بسته دور گفته می‌شود، دور با n رأس را با C_n نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱.۲. اگر در تعریف دور شرط تکراری بودن رأس‌ها و یال‌ها را برداریم، یک راه به دست می‌آید.

تعریف ۱۳.۱.۲. گراف Γ را همبند می‌نامیم اگر از هر رأس آن به رأس دیگرش مسیری وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۲. گراف همبند و بدون دور را درخت می‌گوئیم و اگر شرط همبندی را از آن حذف می‌کنیم، آن را جنگل می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۲. کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس را فاصله‌ی آن دو رأس گویند. قطر یک گراف Γ اندازه‌ی مسیری با بیشترین فاصله در گراف Γ است.

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ و $H = (V(H), E(H))$ دو گراف باشند. منظور از حاصلضرب دکارتی این دو گراف گرافی است که با نماد $G \times H$ نمایش داده می‌شود. مجموعه رئوس این گراف به صورت $V(G) \times V(H)$ است و دو راس $(v_۱, w_۱)$ و $(v_۲, w_۲)$ در آن مجاورند هرگاه یا $v_۱ = v_۲$و $w_۱$ با $w_۲$ در H مجاور باشند و یا $w_۱ = w_۲$و $v_۱$ با $v_۲$ در G مجاور باشند.

تعریف ۱۷.۱.۲. فرض کنید $A=(a_{ij})$ ماتریسی $m\times n$و $B=(b_{ij})$ ماتریسی $p\times q$باشد در این صورت ضرب تانسوری A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

تعریف ۱۸.۱.۲. گراف H زیرگراف Γ است (می نویسیم $H\subseteq\Gamma$) اگر $V(H)\subseteq V(\Gamma)$ ، $E(H)\subseteq E(\Gamma)$ و ψ_H تحدید ψ_Γ به $E(H)$ باشد. در این صورت Γ را زیرگراف H مینامند و وقتی $H\subseteq\Gamma$ اما $H\neq\Gamma$ می‌نویسیم $H\subset\Gamma$ و H را زیرگراف سره Γ می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۱.۲. زیرگراف القایی گراف Γ زیرگراف به‌دست آمده از حذف یک مجموعه از رئوس آن گراف است. حال اگر $T\subseteq V(\Gamma)$ ، زیرگراف القایی T در Γ را با $\Gamma[T]$ نمایش می‌دهند که شامل رئوس T و همه‌ی یال‌هایی است که دو رأس آن‌ها در مجموعه‌ی T باشد. اگر H زیرگرافی از Γ باشد که $V(H)=V(\Gamma)$ و $E(H)\subseteq E(\Gamma)$ باشد ،H را زیرگراف فراگیر Γ گوییم.

تعریف ۲۰.۱.۲. عدد حقیقی a را صحیح جبری نامند هرگاه ریشه‌ی یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد.

تعریف ۲۱.۱.۲. چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس مجاورت گراف Γ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(\Gamma;\lambda)=det(A-\lambda I)$$

که در آن I ماتریس همانی هم مرتبه با ماتریس A می‌باشد و A ماتریس مجاورت گراف Γ است. منظور از