بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

(گرایش جبر و توپولوژی)

عنوان

(هم) همواری S– سیستم های مرتب جزیی روی توسیع های ایده ال مرتب جزیی

استاد راهنما

دکتر غلامـــرضا مقـــدسی

استاد مشاور

دکتر لیـــلا شریفـــان

نگارش

تقـــی رحمتـــی

مهـــر ۱۳۹۲

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه مادی ومعنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان ودیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که از همه دانش وتوان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر بر ای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان ومکان تا سرحد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه ورسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت واصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی :   تقی رحمتی

تاریخ و امضا:

تاییدیه صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب تقی رحمتی به شماره دانشجویی ۹۰۱۳۱۲۳۰۷۵ رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تایید می نمایم که کلیه نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هر گونه دخل وتصرف بوده و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مولفان و مصنفان، قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...)با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هر گونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم. در ضمن مسئولیت هر گونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری وقضایی) به عهده اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی : تقی رحمتی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهار چوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود بلامانع است:

- بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلا مانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ ....ممنوع است.

استاد راهنما : دکتر غلامرضا مقدسی

تاریخ :

امضاء:

تقــدیم به

روان پــاک پــدرم

و

نگاه پرمحبــت مادرم

و

قلــب پرمهر همســرم

تشکر و قــدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریـغ اسـتاد راهنمـای گـرامیم، جنـاب آقـای دکتـر غلامرضا مقدسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمـایی هـای ارزنـده ایشـان، ایـن مجموعه به انجام نمی رسید.

از سر کار خانم دکتر لیلا شریفان که زحمت مشاوره و مطالعه این مجموعه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این مجموعه، اینجانب را مورد راهنمـایی قـرار دادنـد کمـال تشـکر را دارم. همچنـین از دیگراساتید محترم گروه ریاضی محض سرکار خانم دکتر پور میرزایی و آقایان دکتر استاجی و دکتـر صادقی که در طول این دوره بنده را مرهون لطف خود قرار دادند کمال امتنان را دارم.

وبه رسم ادب به روان پاک پدرم درود می فرستم، بر دستان پرمهر مادرم بوسه می زنم و از همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش تشکر می کنم.

در پایان از دوست گرامیم جناب آقای احمد منصوری که زحمت تایپ مقاله را بـه عهـده گرفتنـد قدردانی می کنم.

تقـی رحمتـی

مهر ۱۳۹۲

فرم چکیده پایان نامه دوره تحصیلات تکمیلی

دفتر تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی: رحمتی	**نام:** تقی	**شماره دانشجویی:** ۹۰۱۳۱۲۳۰۷۵
استاد راهنما: دکتر غلامرضا مقدسی	**استاد مشاور:** دکتر لیلا شریفان	
دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته :** ریاضی محض	**گرایش :** جبر و توپولوژی
مقطع : کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع :۹۲/۷/۱۴**	**تعداد صفحه: ۹۱**

عنوان پایان نامه:

(هم) همواری S- سیستم های مرتب جزیی روی توسیع های ایده ال مرتب جزیی

کلید واژه ها: تکواره مرتب جزیی ، S- سیستم مرتب جزیی ، I^1- سیستم های مرتب جزیی

چکیده :

تکواره های مرتب جزیی S را به صورت $S = G \dot{\cup} I$ در نظر می گیریم که G یک گروه مرتب جزیی و I یک ایده ال مرتب جزیی S است و نشان می دهیم که اگر یک S- سیستم مرتب جزیی به عنوان یک I^1- سیستم مرتب جزیی، هموار ضعیف اصلی، هموار (ضعیف)، هموار مرتب جزیی، هموار مرتب جزیی ضعیف (اصلی) و بی تاب (مرتب جزیی) باشد یا در شرط های (P)، (P_E)، (P_W)، (PWP)، $(PWP)_W$، (WP) یا $(WP)_W$ صدق کند، آنگاه به عنوان یک S- سیستم نیز این خاصیت ها را دارد . همچنین نشان می دهیم یک S- سیستم مرتب که به عنوان یک I^1- سیستم مرتب جزیی، آزاد، تصویری یا هموار قوی باشد، در حالت کلی ممکن نیست به عنوان یک S- سیستم مرتب جزیی این خاصیت- ها را داشته باشد .

امضای استاد راهنما **تاریخ:**

فهرست مطالب

فهرست علائم

مجموعه تمام همریختی ها از A به B .... $hom(A,B)$

ترکیب ریخت های f و g .... fog

مجموعه زمینه ی A .... $\sigma(A)$

مجموعه ی توانی A .... $Su(A)$

مجموعه تمام روابط هم ارزی روی مجموعه ی A .... $\mathcal{E}(A)$

الحاق عضو ۱ به مجموعه I .... I^1

ایده آل چپ اصلی تولید شده توسط a .... S^1a

ایده آل راست اصلی تولید شده توسط a .... aS^1

ایده آل اصلی تولید شده توسط a .... S^1aS^1

مجموعه تمام عناصر خودتوان تکواره S .... $E(S)$

کلاس عنصر x نسبت به رابطه هم ارزی ρ .... $[x]_\rho$

S- سیستم راست A .... A_S

S- سیستم چپ A .... ${}_SA$

کوچکترین رابطه همنهشتی شامل X روی A .... $\rho(X)$

زیرسیستم .... $\subseteq$

حاصلضــرب تانسوری A و M .... $A \otimes M$

اجتماع مجزا... $\bigcup$

ضرب دکارتی A و B.. $A \times B$

تفاضل مجموعه B از A.. $A \setminus B$

یکریخت... $\cong$

وارون عنصر g.. g^{-1}

تحدید f به s... $f|_S$

مقدمــه

ساختار **تکواره**[1] S تقریبا وابسته به خواص S- سیستم هایش[2] اســت. S - سیســتم هـا نـه تنهـا نقش مهمی در مطالعه خواص تکواره ها بازی می کنند بلکه در سایر سطوح ریاضـی از قبیـل نظریـه گراف، نظریه سیستم های جبری و ... نقش دارند.

همواری مفهوم مهمی در مطالعه S- سیستم ها روی تکـواره هـا مـی باشـد. S - سیسـتم هـای هموار در مطالعه خواص آمیختگی[3] تکواره ها اهمیت دارند. بیش از سه دهه است که محققین بسیاری در نظریه نیم گروهها به دنبال طبقه بندی تکـواره های S به کمـک خـواص همـــواری[4] S- سیسـتم های وابسته به آن ها بوده اند.

کارهای اولیه روی خواص همـواری S- **سیستم های مرتب جزئی**[5] توسـط فخرالـدین[6] انجـام شد. وی در سـال هـای ۱۹۸۶ و ۱۹۸۸ دو مقالـه درخصـوص حاصلضـرب تانسـورها[7] و خـواص همواری S- سیستم های مرتب جزئی منتشر کرد. در سـال هـای اخیرنیـز توسـط بـولمن فلمینـگ[8]، والدیس لان[9] (۲۰۰۵) وشای[10] (۲۰۰۵) مطالعات وبررسی ها ادامه یافته است.

---

[1] Monoid
[2] S-act
[3] Amalgamation
[4] Flatness
[5] S-posets
[6] Fakhrudin
[7] Tensor products
[8] Bulman Fleming
[9] valdis laan
[10] Shi

ایده اصلی این مجموعه از مقاله [۵] گرفته شده است.

درفصل اول این پایان نامه مفاهیم وقضایای مقدماتی که شامل مفاهیم رسته، تکواره و S- سیستم های مرتب جزئی و... می باشند را معرفی کرده ودر فصل دوم به بررسی برخی خواص همواری روی S- **سیستم ها** می پردازیم. در فصل های سوم و چهارم به همواری و هم همواری[1] S- **سیستم های مرتب جزئی** روی توسیع های ایده آل مرتب جزئی پرداخته ودر فصل پایانی انواع همواری مرتب جزئی[2] را روی توسیع های ایده آل مرتب جزئی بررسی و نتیجه گیری می نماییم.

[1] Homoflatness
[2] Po-flatness

فصل ۱

مفاهیم وقضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم **رسته**[1]، تکواره و S- سیستم های مرتب جزئی را معرفی می کنیم وبه بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.

۱–۱ مفاهیم رسته ای

یکی از ابزارهای سودمند در بررسی ساختار های جبری رسته است. رسته زبانی مشترک است که زمینه ای عمومی برای مطالعه ساختارهای ریاضی را فراهم می کند. ایده ی شهودی در تعریف رسته این است که ساختمان های ریاضی ، همراه با نگاشت های مناسبی بین اشیاء آنها از خواص مشترکی برخودار هستند .

تعریف ۱–۱–۱. هر رسته رده ای مانند C از **اشیاء**[2] است که معمولاً با $A,B,C,\ldots$ نشان داده می شوند و ویژگی های زیر را دارا می باشد:

۱. یک رده از مجموعه های از هم جدا، که با $\hom(A,B)$ نمایش داده می شود (برای هر جفت از اشیاء در C یک عنصر f از $\hom(A,B)$ را یک ریخت[3] از A به B نامیده و با $f:A\to B$ نمایش می دهیم.)

[1] Category
[2] Objects
[3] Morphism

۲. به ازای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء در C، تابعی مانند

$$\hom(B,C)\times\hom(A,B)\to\hom(A,C)$$

(برای ریخت های $g:B\to C$ و $f:A\to B$، این تابع به صورت $(g,f)\to gof$ نوشته و $gof:A\to C$، ترکیب f و g خوانده می شود) موجود است که در دو اصل موضوع زیر صدق کند :

الف) هر گاه $h:C\to D$ و $f:A\to B$ و $g:B\to C$ ریخت هایی از C باشند آنگاه $ho(gof)=(hog)of$ (**شرکت پذیری**).

ب) به ازای هر شیءB از C ریخت $id_B:B\to B$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g:B\to C$ و $f:A\to B$ ؛

$$id_B = g\ o\ g$$

و

$$f = f.\,id_B o$$

تعریف ۱-۱-۲. رسته ی **ملموس**[۱]، رسته ای مانند C است همراه با تابعی مثل σ که به هر شی A از C مجموعه ی $\sigma(A)$ (به نام **مجموعه زمینه ی**[۲] A) را نسبت می دهد به قسمی که شرایط زیر را دارا می باشد:

۱. هر ریخت $A\to B$ از C تابعی بر مجموعه های زمینه ($\sigma(A)\to\sigma(B)$)است.

۲. ریخت همانی هر شی A از C ، تابع همانی بر مجموعه ی زمینه ی $\sigma(A)$ است.

۳. ترکیب ریخت ها در C با ترکیب توابع بر مجموعه های زمینه یکی است.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنیم F شیئی در رسته ملموس C، X مجموعه ای ناتهی و $i:X\to F$

---

[۱] Concrete
[۲] Underlying set

یک نگاشت باشد. در این صورت F بر مجموعه ی X **آزاد**[1] است اگر، به ازای هر شیء A از $\mathcal{C}$ و نگاشت $f: X \to A$، ریخت منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\bar{f}: F \to A$ موجود باشد به طوری که، $\bar{f}i = f$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

شکل (۱-۱)

تعریف ۱-۱-٤. ریخت $f: C \to D$ از رسته ی $\mathcal{C}$ ، **تکین**[2] (تکریختی) است اگر به ازای هرشیئ B و هر دوریخت $g, h \in \hom(B, C)$ اگر $fh = fg$، آن گاه $h = g$.

تعریف ۱-۱-۵. ریخت $f: C \to D$ از رسته ی $\mathcal{C}$، **برویی**[3] (بروریختی) است اگر به ازای هرشیئ E و هر دو ریخت $k, t \in \hom(D, E)$ اگر $kf = tf$، آن گاه $k = t$.

تعریف ۱-۱-٦. شیء P در رسته $\mathcal{C}$ را **تصویری**[4] می نامیم اگر، بـرای هـر $f \in \hom(P, Y)$ و هر بروریختـی $\pi \in \hom(X, Y)$، ریخت $\bar{f} \in \hom(P, X)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\pi\bar{f} = f.$$

به عبارت دیگر نمودار مقابل جا به جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & Y \end{tikzcd}$$

شکل (۱-۲)

[1] Free
[2] Monomorphism
[3] Epimorphism
[4] Projective

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگـرهمـورد[1] T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ که با

$$\mathrm{T}:\ \mathcal{C}\,\mathcal{D} \rightarrow$$

نمایش داده می شود، تابعی است که به هرشیء C از $\mathcal{C}$، شیئی مانند $\mathrm{T(C)}$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد و به هر ریخت $f:\mathrm{C}\rightarrow \mathrm{C}'$ از $\mathcal{C}$، ریختی مانند $\mathrm{T}(f):\mathrm{T(C)}\rightarrow \mathrm{T(C')}$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد به طوری که

۱. به ازای هر ریخت همانی $\mathrm{id_C}$ از $\mathcal{C}$، $\mathrm{T(id_C)} = \mathrm{id_{T(C)}}$.

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ که ترکیب gof تعریف شده باشد، داشته باشیم:

$$\mathrm{T}(gof) = \mathrm{T}(g)o\mathrm{T}(f).$$

مثال ۱-۱- ۸ . فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس باشد. تابعگر فراموشکار[2] همورد از $\mathcal{C}$ به رسته ی مجموعه ها $\mathcal{S}$ به هر شیئ A مجموعه ی زمینه آن و به هر ریخت $f:\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{A}'$ تابع $\lfloor f \rfloor : \lfloor \mathrm{A} \rfloor \rightarrow \lfloor \mathrm{A}' \rfloor$ را نسبت می دهد.

تعریف ۱-۱- ۹ . فرض کنیم ریخت های $f_۱$ و $f_۲$ به صورت زیر در رسته $\mathcal{C}$ داده شده باشند :

$$\begin{tikzcd} & X_۱ \arrow[d, "f_۱"] \\ X_۲ \arrow[r, "f_۲"'] & Y \end{tikzcd}$$

زوج $(\mathrm{P},(p_۱,p_۲))$ با $p_i:\mathrm{P}\rightarrow X_i\ (i=۱,۲)$ در $\mathcal{C}$، عقب بر[3] زوج $(f_۱,f_۲)$ نامیده می شود اگر:

۱. $f_۱p_۱ = f_۲p_۲$.

۲. برای هر زوج $(\mathrm{P}',(p'_۱,p'_۲))$ به همراه $p'_i:\mathrm{P}'\rightarrow X_i$ که $f_۱p'_۱ = f_۲p'_۲$، ریخت منحصر به فرد

---

[1] Covariant functor
[2] Forgetfull functor
[3] Pullback

$\varphi : P' \to P$ وجود داشته باشد به طوری که $p_i\varphi = p'_i\ (i = ۱,۲)$.

به عبارت دیگر نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "p'_{۱}"] \arrow[ddr, "p'_{۲}"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_{۱}"'] \arrow[d, "p_{۲}"] & X_{۱} \arrow[d, "f_{۱}"] \\
& X_{۲} \arrow[r, "f_{۲}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

شکل (۱-۳)

مثال ۱-۱-۱۰. مجموعه های $X_{۱}$، $X_{۲}$ و Y و نگاشت های $f_{۱}$ و $f_{۲}$ از رسته مجموعه ها **را** در موقعیت عقب بر زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{tikzcd}
& X_{۱} \arrow[d, "f_{۱}"] \\
X_{۲} \arrow[r, "f_{۲}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

اگر $P = \{(x_{۱}, x_{۲}) \in X_{۱} \times X_{۲} \mid f_{۱}(x_{۱}) = f_{۲}(x_{۲})\}$، آن گاه P به همراه $(p_{۱}, p_{۲})$، عقب بر زوج $(f_{۱}, f_{۲})$ می باشد.

۱ – ۲ مجموعه های مرتب جزئی

از آن جایی که عمده کار صورت گرفته در فصل های آتی روی مجموعه های مرتب جزئی است این بخش را به این موضوع اختصاص داده ایم.

تعریف ۱-۲-۱. یک ترتیب جزئی[1] روی مجموعه A، یک رابطه دوتایی $\leq$ روی A است که

[1] Partial order

خواص زیر را دارا است:

۱. **خاصیت انعکاسی**[1] : برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq a$.

۲. **خاصیت پاد تقارنی**[2] : برای هر $a, b \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آن گاه $a = b$.

۳. **خاصیت تعدی**[3] : برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آن گاه $a \leq c$.

مثال ۱-۲-۲. فرض کنیم $Su(A)$ نشان دهنده مجموعه توانی A یعنی مجموعه ی تمام زیر مجموعه های A باشد. در این صورت رابطه شمول $\subseteq$ یک ترتیب جزئی روی $Su(A)$ است.

تعریف ۱-۲-۳ . یک رابطه دوتایی ~ تعریف شده روی مجموعه ی A، رابطـه هـم ارزی[4] نامیـده مـی شود هر گـاه خاصـیت هـای انعکاسـی، تقـارنی (بـرای هـر $a, b \in A$، اگـر $(a \sim b)$ آن گـاه $(b \sim a)$) وتعدی را داشته باشد. مجموعه تمام روابط هـم ارزی روی A را بـا $\mathcal{E}(A)$ نشـان مـی دهیم.

۱-۳ نیم گروه[5]

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. در این صورت

۱. زیر مجموعه غیر تهی I از S را **ایده ال چپ**[6] S می گوییم هر گاه $SI \subseteq I$.

۲. زیر مجموعه غیر تهی I از S را **ایده ال راست**[7] S می گوییم هر گاه $IS \subseteq I$.

۳. زیر مجموعه غیر تهی I از S را **ایده ال** S می گوییم هر گاه $SI \subseteq I$ و $IS \subseteq I$.

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد.کوچکترین ایده آل از S که شامل $a \in S$

[1] Reflexive
[2] Anti symmetry
[3] Transitivity
[4] Equivalence relation
[5] Semigroup
[6] Left ideal
[7] Right ideal

باشد عبارت است از $Sa \cup \{a\} = S^{1}a$ وآن را **ایده آل چپ اصلی**[1] تولید شده توسط a می گوییم.

به طور مشابه $aS \cup \{a\} = aS^{1}$ را **ایده آل راست اصلـی**[2] تولید شده توسط a نامیده و **ایده آل اصلی** تولید شده توسط a را به صورت $SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = S^{1}aS^{1}$ تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۳- ۳. نیم گروه S، تکواره نامیده می شود اگر دارای عضو همانی باشد.

مثال ۱-۳-٤. $(N,\cdot)$ یک تکواره است.

لم ۱-۳-۵. اگر $S = G \dot{\cup} J$، کـه G یک گـروه و J یک زیر نیمگـروه S اسـت، آن گـاه J یـک ایده آل S است.

برهان: فرض کنیم G یک گروه و J زیر نیمگروه S باشد. در این صورت نشان می دهیم $SJ \subseteq J$ و $JS \subseteq J$. به ازای هر $s \in S$ دوحالت زیر را داریم:

۱. اگر $s \in J$ باشد، آن گاه به ازای هر $s' \in J$، $ss' \in J$ و $s's \in J$. لذا $SJ \subseteq J$ و $JS \subseteq J$.

۲. اگر $s \in G$ باشد، آن گاه $s^{-1} \in G$ وجود دارد.

(فرض خلـف) فرض کنیم برای $j \in J$ ی داشته باشیم $js \in G$. چون $s^{-1} \in G$ بنابر این $(js)s^{-1} \in G$ ودرنتیجه $j \in G$ که، با مجزا بودن J و G درتناقض است. لذا برای هر $j \in J$ داریم $js \in J$ و $sj \in J$. یعنی $SJ \subseteq J$ و $JS \subseteq J$.

بنابراین J یک ایده ال S است.

تعریف ۱-۳-٦ . فرض کنیم S یک تکواره باشد. عنصر $e \in S$ را **خودتوان**[3] گوییم اگر، $e^{2} = e$. $e^{2} = e$. مجموعه ی تمام عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۳-۷. تکواره G، که هر عضو آن دارای وارون[4] است، را **گروه**[5] می نامیم.

---

[1] Principally left ideal
[2] Principally right ideal
[3] Idempotent
[4] Inverse
[5] Group