بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

روشهای شکافت دوگانه برای حل دستگاه معادلات خطی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

طاهره هوشنگی شفتی

دانشگاه محقق اردبیلی

پاییز ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

دو واژه‌ی پر معنی و ستودنی در زندگیم

نتایج زحمات، صبر و فداکاریتان را به شما تقدیم می‌کنم و دستان پر مهرتان را می‌بوسم.

ای مایه‌های صفا و وفا

ای بارگاه قدس خدا می‌پرستمتان.

تقدیم به

همسر عزیزم

روشنی بخش زندگیم، سنگ صبورم و آرامش تمام وجودم

تقدیم به

تعصب راستین برادرم و احساس پاک خواهرم

تقدیر و تشکر:

الهی به سپاس و ستایش تو من شکسته زبان را چه امکان زبان گشودن و این آشفته رای را چه یارای سخن گفتن. ولی به زبان شکسته می‌گویم که تمام سپاس و ستایش من به تو این است که در هجوم ظلمات خاک هنوز شعله‌های افلاکی اشتیاق و انتظار در من نمرده است و گاهگاه چون عطری ناگهان در سرسرای وجودم پرتو می افکند و نام تو را فریاد می‌زند. سپاس و ستایش خود را به که تقدیم کنم که هستی‌ام همه وامدار لطف بیکران اوست.

سراسر وجودم اگر به تقدیر از پدر و مادر نازنینم ، همسر عزیزم ، برادر و خواهر گلم، واژه واژه تشکر شوند، تنها برگ سبزی خواهد بود، به تلافی هزاران دشت سبزی و صفا.

از جناب آقای دکتر خجسته سالکویه، استاد راهنمای این پروژه که خالصانه و بی دریغ، مرا در این پایان نامه یاری نمودند، بسیار سپاسگزارم. بی شک راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان باعث پیشبرد این پایان نامه گردیده است.

از جناب آقای دکتر برهانی‌فر و دکتر ضارب نیا اساتید محترمم که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه سپاسگزارم.

طاهره هوشنگی شفتی

مهر ۱۳۹۰

نام خانوادگی: هوشنگی شفتی	**نام:** طاهره

عنوان پایان نامه :

روشهای شکافت دوگانه برای حل دستگاه معادلات خطی

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۷/۲۷ **تعداد صفحه:۸۱**

کلید واژه‌ها :
شکافت دوگانه، همگرایی، روش‌های تکراری، دومرحله‌ای

چکیده:
در این پایان نامه، حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از روش‌های تکراری دوگامی ایستا در حالت کلی و در حالت‌های خاص معرفی می‌شود. همچنین خواص همگرایی این روش‌ها برای ماتریس‌های نامنفی و نیمه معین مثبت (هرمیتی یا غیر هرمیتی) بررسی می‌شوند. در ادامه، روش JDSOR (Jocobi Double SOR) که یک روش تکراری دو مرحله‌ای می‌باشد را معرفی و خواص آن را بررسی می‌کنیم. چندین مثال عددی برای بررسی نتایج نظری بیان شده ارائه می‌گردد. بکارگیری روش‌های تکراری دو مرحله برای حل مسائل نقطه زینی نیز بررسی می‌شود.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

$$Ax = b,$$

را در نظر بگیرید که در آن ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ بزرگ و تُنُک است و $b, x \in \mathbb{C}^n$. برای حل اینگونه دستگاه‌ها معمولا از روشهای تکراری استفاده می‌شود. روش‌های تکراری برای حل اینگونه دستگاه‌ها به طور کلی به دو دسته ایستا[1] و غیر ایستا[2] تقسیم می‌شوند. در این پایان‌نامه بر روی روشهای ایستا تمرکز می‌نماییم. در روش تکراری تک گامی ایستا ماتریس ضرایب دستگاه به $A = M - N$ تجزیه می‌شود که در آن M یک ماتریس نامنفرداست. سپس یک روند تکراری به صورت

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b,$$

ساخته می‌شود. این روند، شکل کلی یک روند تکراری تک گامی ایستا است. به طور مشابه، فرض کنید $A = P - R - S$ یک تجزیه از ماتریس A باشد بطوریکه ماتریس P نامنفرد است. در این صورت شکل کلی یک روند تکراری دوگامی ایستا به صورت

$$x^{(k+1)} = P^{-1}Rx^{(k)} + P^{-1}Sx^{(k-1)} + P^{-1}b,$$

است. مقالات متعددی در خصوص همگرایی یک روند تکراری دوگامی ایستا ارائه شده است. در این پایان نامه بعضی از این خواص که در منابع [۹, ۱۰, ۱۱] بیان شده‌اند را با جزئیات کامل بررسی کرده و با مثالهای مختلف مطالعه می‌نماییم.

---

[1] stationary

[2] nonstationary

این پایان نامه از فصل‌های زیر تشکیل شده است. در فصل اول برخی از قضایا و تعاریف اولیه‌ای که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، را بیان می‌کنیم. بعلاوه روش‌های تک گامی و دوگامی ایستا نیز در این فصل معرفی می‌شوند. در فصل دوم حالت خاصی از روش‌های تکراری دوگامی ایستا و شرایط همگرایی آن ارائه شده است. در فصل سوم حل دستگاههای معادلات خطی به وسیله‌ی یک گروه از روش‌های دوگامی ایستا بررسی شده است که این روش تکراری به وسیله‌ی تجزیه‌ی مضاعف نامنفی ماتریس ضرایب بدست آمده‌است. در نهایت روش JDSOR[1] معرفی می‌شود. فصل چهارم به برخی از نتایج همگرایی روش دوگامی ایستا، وقتی که دستگاه معادلات خطی معین مثبت (هرمیتی یا غیر هرمیتی) باشد، اختصاص یافته و در ادامه همگرایی روش دوگامی ایستا برای مسائل نقطه زینی بررسی می‌شود.

[1] Jacobi double SOR

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل، ابتدا برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند را بیان می‌کنیم و در ادامه روش تکراری تک گامی و دوگامی ایستا معرفی می‌شوند.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱ λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A متناظر با بردار ویژه x است، هرگاه $Ax = \lambda x$ و $x \neq ۰$. در این صورت زوج مرتب $(\lambda\ ,\ x)$ را یک زوج ویژه‌ی A می‌گویند.

تعریف ۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، دراین‌صورت چندجمله‌ای مشخصه‌ی A را به‌صورت

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

تعریف می‌کنند. P یک چندجمله‌ای از درجه n است و ریشه‌های این چند جمله‌ای مقادیرویژه A هستند.

تعریف ۳.۱ بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدر مطلق، شعاع طیفی ماتریس A نامیده می‌شود و با $\rho(A)$ نشان داده می‌شود، به عبارت دیگر

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in\ \sigma(A)} |\lambda|\,,$$

که در آن $\sigma(A)$ مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد و به آن طیف ماتریس A می‌گویند.

تعریف ۴.۱ ترانهاده‌ی ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را با A^T نشان می‌دهیم و (i, j) امین درایه‌ی آن برابر با درایه‌ی (j, i) ام ماتریس A است، یعنی $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. ماتریس A را متقارن گویند، هرگاه $A = A^T$ و متقارن کج گویند، هرگاه $A = -A^T$. اگر $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه ترانهاده‌ی هرمیتی آن را با A^H نشان می‌دهیم و درایه‌ی (i, j) ام آن برابر است با مزدوج درایه‌ی (j, i) ام ماتریس A، یعنی $(A^H)_{ij} = \bar{a_{ji}}$. A را هرمیتی گویند، هرگاه $A = A^H$ و به همین ترتیب A را هرمیتی کج گویند، هرگاه $A = -A^H$.

تعریف **۵.۱** فرض کنید $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ و $\pi : N \to N$ یک نگاشت یک‌به‌یک باشد، یعنی π یک جایگشت باشد. ماتریس $n \times n$، $P = (p_{ij})$ را یک ماتریس جایگشت گویند، هرگاه جایگشتی مثل π موجود باشد بطوریکه

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \pi(i), \\ 0, & j \neq \pi(i). \end{cases}$$

توجه‌کنید که هر سطر و ستون ماتریس P دقیقاً یک درایه‌ی غیرصفر(برابر ۱) دارد. اگر از سمت چپ (راست) ماتریس مربعی A را در ماتریس جایگشت P ضرب کنیم، سطرهای (ستون‌های) A را مطابق جایگشت π جابه‌جا می‌کند.

تعریف **۶.۱** فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{n\times n}$). در این صورت

- ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی گویند، هرگاه برای هر $i \geq j$ ($i \leq j$) داشته باشیم $a_{ij} = 0$. به طریق مشابه ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی اکید گویند، هرگاه برای هر $i > j$ ($i < j$) داشته باشیم $a_{ij} = 0$.
- A را یک ماتریس قطری گویند، هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. ماتریس قطری A را به صورت زیر نشان می‌دهند

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

- ماتریس A را همانی گویند، هرگاه $A = I = (\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ که δ_{ij} را دلتای کرونکر گویند.
- ماتریس A را نامنفرد گویند، هرگاه $\det(A) \neq 0$ و آن را منفرد گویند، هرگاه

$$\det(A) = 0.$$

تعریف **۷.۱** فرض کنید $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ماتریس $A = (a_{ij})$ را نامنفی (مثبت) گوییم و با $A \geq 0$ ($A > 0$) نشان‌می‌دهیم، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$). گوییم

A کوچکتر یا مساوی B (A کوچکتر از B) است و با $A \leq B$ ($A < B$) نشان می‌دهیم، هرگاه $B - A \geq 0$ ($B - A > 0$).

تعریف **۸.۱** ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک M- ماتریس گفته می‌شود، هرگاه عدد حقیقی و مثبتی مثل s و ماتریسی نامنفی مثل B وجود داشته باشد بطوریکه

$$A = sI - B, \quad \rho(B) < s.$$

تعریف **۹.۱** (الف) ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت (نیمه معین مثبت) گوئیم هرگاه به ازای هر $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $x^H Ax > 0$ ($x^H Ax \geq 0$). اگر ماتریس A معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی) باشد، می‌نویسیم $A \succ 0$ ($A \succeq 0$).

(ب) فرض کنید A و B دو ماتریس هرمیتی باشند. در این صورت می‌نویسیم $A \succ B$ ($A \succeq B$) اگر و تنها اگر $A - B \succ 0$ ($A - B \succeq 0$).

(د) فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. ماتریس‌های H و $\mathcal{S}$ که به صورت

$$H = \frac{A + A^H}{2}, \quad \mathcal{S} = \frac{A - A^H}{2},$$

تعریف می‌شوند، به ترتیب قسمت‌های هرمیتی و هرمیتی کج ماتریس A نامیده می‌شوند. می‌توان دید که A معین مثبت (نیمه معین مثبت) است اگر و تنها اگر $H \succ 0$ ($H \succeq 0$).

تعریف **۱۰.۱** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. تجزیه‌ی $A = M - N$ را یک شکافت از A گوئیم هرگاه M نامنفرد باشد.

۲.۱ لم‌ها و قضایا

لم **۱.۱** اگر A هرمیتی باشد، تمام مقادیر ویژه آن حقیقی هستند.

برهان : به [٦]رجوع کنید. □

لم ۲.۱ ماتریس سه‌قطری و $n \times n$

$$T = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند بطوریکه $ac > 0$. مقادیر ویژه‌ی T به صورت

$$\lambda_j = b + 2a\sqrt{\frac{c}{a}}\cos(\frac{j\pi}{n+1}), \qquad j = 1, 2, \ldots n,$$

می‌باشند. بعلاوه این مقادیر متمایز هستند.

برهان : به[٦] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۱ (پرون - فروبنیوس برای ماتریس‌های نامنفی) اگر $A > 0$، آنگاه $\rho(A)$ یک مقدار ویژه A است و بعلاوه بردار مثبتی مثل u وجود دارد بطوریکه $Au = \rho(A)u$.

برهان : به [٦] رجوع کنید. □

همچنین اگر $A \geq 0$. در این صورت $\rho(A)$ یک مقدار ویژه‌ی A و یک بردار نامنفی مثل $u \neq 0$ وجود دارد بطوریکه $Au = \rho(A)u$. توجه کنید که در اینجا $\rho(A)$ می‌تواند برابر با صفر باشد. در صورتی که A نامنفی و تحویل ناپذیر باشد، $\rho(A)$ یک مقدار ویژه A است و بعلاوه بردار مثبتی مثل u وجود دارد بطوریکه $Au = \rho(A)u$. برای اثبات به [٦] مراجعه شود.

قضیه ۲.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) سری $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ همگراست (توجه کنید که $A^0 = I$)؛

(ب) $\rho(A) < 1$؛

(ج) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$؛

در هرکدام از حالت‌های فوق $I - A$ معکوس‌پذیر است و $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

برهان : به [٦] رجوع کنید. □

قضیه **۳.۱** فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد. شرط لازم و کافی برای همگرایی روش تکراری $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ این است که $\rho(M^{-1}N) < 1$.

برهان : به[۸] یا [۶] رجوع کنید. □

قضیه **۴.۱** فرض کنید $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت:

(الف)اگر $A \leq B$ و $B \leq A$، آنگاه $A = B$. **بعلاوه** اگر $A \leq B$ و $B \leq C$، آنگاه $A \leq C$؛

(ب) اگر ماتریس‌های A و B نامنفی (مثبت) باشند، آنگاه AB و $A+B$ نامنفی (مثبت) هستند؛

(ج) اگر A نامنفی (مثبت) باشند، آنگاه A^k نیز نامنفی (مثبت) است؛

(د) اگر $A \leq B$، آنگاه $A^T \leq B^T$؛

(ح) اگر $0 \leq A \leq B$، آنگاه $\|A\|_1 \leq \|B\|_1$ و $\|A\|_\infty \leq \|B\|_\infty$.

برهان : به [۸] رجوع کنید. □

قضیه **۵.۱** فرض کنید A و B نامنفی باشند و $A \leq B$. در این صورت

(الف) برای هر ماتریس نامنفی C داریم $AC \leq BC$ و $CA \leq CB$؛

(ب) برای هر $m \geq 0$، $A^m \leq B^m$.

برهان : به [۸] رجوع کنید. □

قضیه **۶.۱** اگر A و B ماتریس‌های مربعی باشند بطوریکه $0 \leq A \leq B$، آنگاه

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

برهان : به [۶] رجوع کنید. □

قضیه **۷.۱** ماتریس A یک M - ماتریس است اگر و تنها اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

(الف) به ازای $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$؛

(ب) $a_{ii} > 0$؛

(ج) A^{-1} وجود داشته باشد و همچنین $A^{-1} \geq 0$.

برهان: به [٦] رجوع کنید. □

۳.۱ روش‌های تکراری تک گامی و دو گامی ایستا

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ نامنفرد و $b, x \in \mathbb{C}^n$. فرض کنید

$$A = M - N, \tag{۲.۱}$$

یک شکافت از A باشد. در این صورت دستگاه (۱.۱) را می‌توان به صورت

$$Mx = Nx + b,$$

نوشت که این خود معادل است با

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

با استفاده از این رابطه یک روش تکراری تک گامی ایستا در حالت کلی به صورت

$$x^{(l+1)} = M^{-1}Nx^{(l)} + M^{-1}b, \tag{۳.۱}$$

تعریف می‌شود.

حال ماتریس ضرائب A را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$A = P - R - S, \tag{۴.۱}$$

که در آن ماتریس P نامنفرد است. بنابراین این تجزیه، یک شکافت مضاعف برای ماتریس A نامیده می‌شود. با جایگذاری این رابطه در (۱.۱) داریم

$$(P-R-S)x=b,$$

یا

$$Px=Rx+Sx+b.$$

لذا با استفاده از این رابطه شکل کلی یک روش تکراری دوگامی ایستا به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$x^{(k+1)}=P^{-1}Rx^{(k)}+P^{-1}Sx^{(k-1)}+P^{-1}b, \qquad k=1,2,\ldots. \tag{۵.۱}$$

به سادگی می‌توان دید که این روش تکراری با

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ x^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1}R & P^{-1}S \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} P^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix},$$

معادل است. اگر ماتریس W را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$W=\begin{pmatrix} P^{-1}R & P^{-1}S \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

آنگاه با استفاده از قضیه‌ی ۳.۱، دنباله‌ی بدست آمده به وسیله‌ی روش تکراری (۵.۱) به جواب منحصر به فرد دستگاه معادلات خطی (۱.۱)، به ازای حدس‌های اولیه‌ی $x^{(0)}$ و $x^{(1)}$ همگراست اگر و تنها اگر شعاع طیفی W کمتر از یک باشد، یعنی:

$$\rho(W)<1.$$

در فصل بعدی همگرایی حالت خاصی از روش تکراری دوگامی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۲

روش تکراری دو گامی ایستا در حالت خاص

۱.۲ مقدمه

در بخش پایانی فصل قبل شکل کلی یک روند تکراری دوگامی ایستا را معرفی نمودیم. در این فصل شکل خاصی از آن را معرفی و همگرایی آن را بررسی می‌کنیم.

۲.۲ معرفی یک روند تکراری دوگامی ایستای خاص

فرض کنید $\circ \neq \beta_k \in \mathbb{R}$. با ضرب طرفین دستگاه معادلات خطی (۱.۱) در β_k، داریم

$$\beta_k Ax = \beta_k b.$$

ماتریس $\beta_k A$ را به صورت

$$\beta_k A = M - (\alpha_k M - \beta_k A) - (۱ - \alpha_k)M,$$

می‌شکافیم که در آن ماتریس M نامنفرد است و $\alpha_k \in \mathbb{R}$ یک پارامتر دلخواه است. حال با فرض

$$P = M, \quad R = \alpha_k M - \beta_k A, \quad S = (۱ - \alpha_k)M,$$

و با استفاده از (۵.۱) روند تکراری دو گامی

$$x^{(k+۱)} = M^{-۱}(\alpha_k M - \beta_k A)x^{(k)} + M^{-۱}(۱ - \alpha_k)Mx^{(k-۱)} + M^{-۱}b, \qquad (۱.۲)$$

را می‌سازیم. به سادگی می‌توان دید که روند تکراری (۱.۲) با روند تکراری

$$x^{(k+۱)} = \alpha_k x^{(k)} + (۱ - \alpha_k)x^{(k-۱)} - \beta_k s^{(k)}, \quad k = \circ, ۱, \ldots, \qquad (۲.۲)$$

معادل است که در آن

$$Ms^{(k)} = r^{(k)},$$

و $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$. بنابراین روند تکراری (۲.۲) حالت خاصی از یک روند تکراری دوگامی ایستا است.

۳.۲ همگرایی روش

در این بخش همگرایی روند تکراری (۲.۲) را به ازای $\alpha_k = \alpha$ و $\beta_k = \beta$، $k = ۰, ۱, \ldots$، و با فرض

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} - \beta_۰ M^{-۱} r^{(۰)},$$

بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\hat{x} = A^{-۱}b$. حال با فرض $e^{(k)} = \hat{x} - x^{(k)}$، داریم

$$r^{(k)} = Ax^{(k)} - b = Ax^{(k)} - A\hat{x} = -A(\hat{x} - x^{(k)}) = -Ae^{(k)}.$$

در نتیجه با توجه به روند تکراری (۲.۲)، داریم

$$\begin{aligned} e^{(k+۱)} &= \hat{x} - x^{(k+۱)} = \hat{x} - \alpha x^{(k)} - (۱-\alpha)x^{(k-۱)} + \beta M^{-۱} r^{(k)} \\ &= \alpha\hat{x} - \alpha x^{(k)} + (۱-\alpha)\hat{x} - (۱-\alpha)x^{(k-۱)} - \beta M^{-۱}Ae^{(k)} \\ &= \alpha(\hat{x} - x^{(k)}) + (۱-\alpha)(\hat{x} - x^{(k-۱)}) - \beta M^{-۱}Ae^{(k)}. \end{aligned}$$

بنابراین $e^{(k)}$ در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$e^{(k+۱)} = \alpha e^{(k)} + (۱-\alpha)e^{(k-۱)} - \beta M^{-۱}Ae^{(k)}, \quad k = ۰, ۱, \ldots. \qquad (۳.۲)$$

حال α و β را طوری می‌یابیم که سرعت همگرایی روش تکراری (۳.۲) به بردار صفر، بهینه شود.

ابتدا مقادیر ویژه $M^{-۱}A$ را حقیقی و مثبت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $\lambda_۱$ و λ_n به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه‌ی ماتریس $M^{-۱}A$ باشند. همچنین $w^{(k)}$ را به صورت

$$w^{(k)} = \begin{pmatrix} e^{(k+۱)} \\ e^{(k)} \end{pmatrix},$$

تعریف می‌کنیم. لذا از رابطه‌ی (۳.۲)، داریم

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= \begin{pmatrix} e^{(k+۱)} \\ e^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{(k)} - \beta M^{-۱}Ae^{(k)} + (۱-\alpha)e^{(k-۱)} \\ e^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha I - \beta M^{-۱}A & (۱-\alpha)I \\ I & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(k)} \\ e^{(k-۱)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$