بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

(مرکز تهران)

عنوان:

یک الگوریتم سیمپلکس برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی - تکه ای

نام استاد:

جناب آقای دکتر محمدرضا پیغامی

نام دانشجو:

سمیه منتظری‌نژاد

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌کران خدای عزوجل را که مرا در طریق علم رهنمون کرد.

ستایشگر معلمی هستم که اندیشه را به من آموخت نه اندیشه اش را.

با سپاس فراوان از جناب استاد دکتر محمدرضا پیغامی بخاطر کمک‌ها و زحمات بی‌دریغشان در به انجام رسانیدن این پایان‌نامه و تشکر بسیار از راهنمایی‌ها و کمک‌های ارزنده ایشان.

تقدیم به

مادر عزیزم که روشنی بخش راه زندگیم است

چکیده

روش معروف سیمپلکس، ارائه شده توسط دانتزیگ، برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی به رده مسایل برنامه‌ریزی خطی تکه‌ای و برنامه‌ریزی کسری خطی تعمیم داده شده است. در این پایان نامه، بدنبال تعمیم روش سیمپلکس برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای هستیم، که از الگوی تعمیم روش سیمپلکس به مساله‌های برنامه‌ریزی خطی تکه‌ای و برنامه‌ریزی کسری خطی الهام گرفته است. درواقع روش سیمپلکس را برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای، که یک رده کلی تر از مسائل برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی کسری و برنامه‌ریزی کسری تکه‌ای می‌باشد، تعمیم خواهیم داد.

کلمات کلیدی: الگوریتم سیمپلکس، مساله برنامه‌ریزی خطی، مساله برنامه‌ریزی کسری

فهرست مطالب

فصل 1: مفاهیم وکلیات

فصل2: مساله برنامه‌ریزی کسری – خطی

فصل3: مساله برنامه‌ریزی خطی – تکه‌ای

فصل4: مساله برنامه‌ریزی خطی – کسری تکه ای

پیش گفتار

مساله‌های معروف برنامه‌ریزی خطی[1](LP)، برنامه‌ریزی خطی تکه‌ای[2](PLP) و برنامه‌ریزی کسری خطی[3](LFP)، انواع خاصی از مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای[4](PLFP) می‌باشند. این مساله‌ها دارای کاربردهای فراوانی در صنعت و علوم مختلف می‌باشند. به ویژه، برای حل مساله انتقال گاز با کمترین هزینه می‌توان از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای بهره جست. فورر[5] روش سیمپلکس را برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تکه‌ای PLP تعمیم داد. پیشتر سوارپ[6] و مارتوس[7] در سال 1965 روش سیمپلکس را برای حل مساله LFP تعمیم داده بودند. توسیعی از روش سیمپلکس برای رده از این مسایل، یعنی مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای، هدف این پایان نامه می‌باشد.

روش سیمپلکس یکی از روش‌های موثر و کارا برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی است که با وجود ارائه روش‌های نوین نقطه درونی زمان چند جمله‌ای، بدلیل بهره گیری از امکان تحلیل حساسیت، همچنان یکی از الگوریتم‌های موثر در حوزه بهینه سازی خطی است. از آنجایی که داده‌های مسائل واقعی در دوره‌های مختلف تغییر می‌کنند، مساله تحلیل حساسیت در الگوریتم‌هایی که ارائه می‌شوند حائز اهمیت

---

1. Linear Programming

2. Piecewise Linear Programming

3. Linear Fractional Programming

4. Piecewise Linear Fractional Programming

5. Fourer

6. Swarp

7. Maratos

است. از این رو تعمیم روش سیمپلکس برای حل رده مسائل گسترده تر، به منظور بهره گیری از این خاصیت، مطلوب به نظر می‌رسد.

تعمیم روش سیمپلکس برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای، با توجه به کاربردهای فراوان این قبیل از مسائل، و ارائه یک روش حل نوین برای حل این مساله از نوآوریهای این پایان نامه می‌باشند.

یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)}{b_0 + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)} \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & 0 \le x \le u \end{aligned}$$

که در آن $f_j(x_j)$ ها توابع محدب خطی تکه‌ای پیوسته و $g_j(x_j)$ ها توابع مقعر خطی تکه‌ای پیوسته با شرط $b_0 + \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) > 0$ به ازای هر جواب شدنی $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ هستند. ماتریس A یک ماتریس رتبه سطری کامل از مرتبه $m \times n$ می‌باشد، هم چنین $b \ge 0$ یک بردار m تایی و $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ بردار n تایی کران بالای متغیر x می‌باشند.

در فصل اول این پایان نامه به بررسی مساله برنامه‌ریزی خطی و انواع آن می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که هریک از انواع این مساله می‌تواند به فرم استاندارد تبدیل گردد. در این فصل روش سیمپلکس را برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی نیز به اختصار شرح داده و قضیه معروف نمایش را بیان می‌کنیم. در فصل

دوم، مساله برنامه‌ریزی کسری را معرفی کرده و الگوریتم دینکلباچ و روش سیمپلکس را برای حل این مساله بیان می‌کنیم. در فصل سوم این پایان نامه به بیان مساله برنامه‌ریزی خطی – تکه‌ای و بحث روی روش حل آن می‌پردازیم. فصل آخر این پایان نامه به بیان مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تکه ای اختصاص داده شده است. در این فصل الگوریتم سیمپلکس را برای حل این مساله تعمیم می‌دهیم.

فصل1

مفاهيم و كليات

در این فصل مفهوم‌های مقدماتی مورد نیاز در این پایان نامه معرفی و قضیه معروف نمایش و سایر قضایا و نتیجه‌ها بیان می‌شود. در این فصل، روش سیمپلکس را برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی نیز به اختصار شرح می‌دهیم. قابل ذکر اینکه مطالب این فصل از کتاب برنامه‌ریزی خطی بازارا [1] [13] الهام گرفته شده است.

1-1 مفهوم‌های اولیه و تعریف‌های پایه

مجموعه محدب[2]

مجموعه $X \subseteq R^n$ محدب گفته می شود اگر به ازای هر دونقطه مفروض x_1و x_2 در X و هر $q \in [0,1]$داشته باشیم: $qx_1 + (1-q)x_2 \in X$.

نکته: ملاحظه می شود که $qx_1 + (1-q)x_2$، برای هر $q \in [0,1]$، یک نقطه از پاره خطی است که

---

1. Bazaraa

2. Convex set

x_1 و x_2 را به هم وصل می کند.

تعبیر هندسی[1] : برای هر زوج نقطه x_1 و x_2 در X، پاره خط واصل آن‌ها باید در X قرار بگیرد. بطور شهودی، یک مجموعه را محدب گوییم اگر هر نقطه آن از نقاط دیگر قابل رویت باشد. به عنوان مثال نقاط داخل مربع و دایره تشکیل مجموعه محدب می‌دهند و نقاط داخل یک هلال، مجموعه‌ای نامحدب است. برخی از عملگرها، محدب بودن مجموعه را حفظ می‌کنند. آشنایی با این عملگرها در تعیین تحدب یک مجموعه کمک می‌کند. به عنوان مثال، عملگر اشتراک، تحدب را حفظ می‌کند. یعنی اگر دو مجموعه محدب باشند، اشتراک آنها نیز محدب است زیرا پاره‌خط بین هر دو نقطه از اشتراک در هر دو مجموعه باید باشد و بنابراین در اشتراک آنها نیز وجود دارد. این قضیه را براحتی می‌توان برای اشتراک تعداد نامتناهی مجموعه نیز تعمیم داد.

تابع محدب[2]

تابع حقیقی $f : R^n \to R$ محدب گفته می شود هرگاه به ازای هر دوبردار $x_1, x_2 \in R^n$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$f(qx_1 + (1-q)x_2) \le qf(x_1) + (1-q)f(x_2), \quad \forall q \in [0,1]$$

به عبارت دیگر، از نقطه نظر هندسی در فضای دوبعدی، پاره‌خطی که نقاط $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ را به یکدیگر متصل می‌کنند، بالای منحنی f قرار گیرد.

1. Geometric interpretation

2. Convex function

با توجه به تعریف فوق، پیداست که f می‌تواند مشتق ناپذیر ولی در عین حال محدب باشد. در صورتی که f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان با کمک مشتق‌های آن، محدب بودن یا نبودن آنرا بررسی کرد. اگر f دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f محدب است اگر و تنها اگر دامنه f مجموعه‌ای محدب بوده و برای هر x در این دامنه، ماتریس $\nabla^2 f(x)$ نیمه معین مثبت باشد. همچنین، اگرماتریس $\nabla^2 f(x)$ معین مثبت باشد، آنگاه تابع f را محدب اکید گوییم. بطور مشابه اگر دامنه f محدب بوده و ماتریس $\nabla^2 f(x)$ نیمه معین منفی باشد، آنگاه f یک تابع مقعر[1] است. به عنوان مثال، تابع نمایی یک تابع محدب و تابع لگاریتمی یک تابع مقعر روی مجموعه اعداد طبیعی هستند، می‌توان نشان داد که تابع لگاریتم مجموع نمایی‌ها، یعنی $f(x)=\log(e^{x_1}+\ldots+e^{x_m})$ ، روی R^n محدب است. از توابع مشتق ناپذیر محدب نیز می‌توان به تابع $f(x)=\max_i(x_i)$ اشاره کرد.

نکته: یک تابع f مقعر است اگر وفقط اگر $-f$ محدب باشد.

نقاط راسی[2]. یک نقطه x در مجموعه محدب X نقطه راسی گفته می‌شود، اگر x را نتوان به صورت ترکیب خطی محدب اکید دو نقطه متمایز در X نوشت. به عبارت دیگر، اگر $x=qx_1+(1-q)x_2$ و $x_1,x_2\in X$ ، آنگاه $x=x_1=x_2$.

ابرصفحه[3]**ها و نیم فضاها**. یک ابرصفحه در R^n مفهوم خط مستقیم در R^2 و مفهوم صفحه در R^3 می‌باشد. یک ابرصفحه مانند H در R^n یک مجموعه به صورت $H=\{x\in R^n \mid p^T x=a\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در R^n است و a یک اسکالر است. بردار p را معمولا نرمال یا گرادیان ابرصفحه

1. Concave function

2. Extreme points

3. Hyper plane

نیز می‌گویند. یک ابرصفحه، مجموعه R^n را به دو زیرفضا، که نیم فضا گفته می‌شوند، تقسیم می‌کند.

مجموعه چند وجهی. یک مجموعه چندوجهی یا یک چندوجهی اشتراک تعداد متناهی از نیم فضاهاست.

شعاع‌ها و جهت‌ها. یک شعاع مجموعه‌ای از نقاط به شکل $\left\{x_0 + l d,\ \ l \geq 0\right\}$ است، که در آن d یک بردار ناصفر به نام جهت شعاع بوده و بردار x_0 راس شعاع می‌باشد.

جهت‌های راسی[1]. مفهوم جهت‌های راسی مشابه مفهوم نقاط راسی است. جهت راسی یک مجموعه جهتی از مجموعه است که نتوان آن را به صورت ترکیب خطی مثبتی از دوجهت متمایز در X نمایش داد.

قضیه (قضیه نمایش[2]**)**

فرض کنید $X = \left\{x \in R^n : Ax \leq b,\ \ x \geq 0\right\}$ یک مجموعه (چندوجهی) ناتهی باشد. فرض کنید مجموعه نقاط راسی مجموعه X ناتهی و دارای تعداد متناهی نقطه راسی $x_1,\ldots,x_k$ باشد. به علاوه، واضح است که مجموعه جهت‌های راسی تهی است اگر وفقط اگر X کران دار باشد. به عبارت دیگر اگر X بی کران باشد، آنگاه مجموعه جهت‌های راسی ناتهی بوده و دارای تعداد متناهی جهت راسی $d_1,\ldots,d_l$ است. در این صورت، $\overline{x} \in X$ اگر و فقط اگر $\overline{x}$ را بتوان به صورت ترکیب خطی محدبی از نقاط راسی $x_1,\ldots,x_k$ و ترکیب خطی نامنفی از جهت‌های راسی $d_1,\ldots,d_l$ نوشت، یعنی:

1. Extreme direction

2. Representation theorem

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} l_j x_j + \sum_{j=1}^{l} m_j d_j$$
$$\sum_{j=1}^{k} l_j = 1$$
$$l_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,k$$
$$m_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,l$$

2-1 مساله برنامه‌ریزی خطی[1]

یک مساله برنامه‌ریزی خطی (LP) یک مساله بهینه سازی است که در آن تابع هدف مساله یک تابع خطی نامعلوم است و شامل مساوی‌ها و نامساوی‌های خطی می‌باشد. فرم استاندارد مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت ذیل است.

$$\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

1. Linear programming problem

که در آن b_iها، c_iها و a_{ij}ها ثابت‌های حقیقی معین بوده و x_iها اعداد حقیقی نامعلومی‌هستند که باید تعیین گردند.

اگر بخواهیم مساله استاندارد فوق را به صورت برداری نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\min \quad c^T x \\ &s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

که در آن x یک بردار ستونی n- بعدی، c^T یک بردار سطری n- بعدی، A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار ستونی m- بعدی است. نامساوی $x \geq 0$ بدین معنی است که هر مولفه از x نامنفی است.

نکته: با استفاده از متغیرهای کمبود یا مازاد و برخی روابط حاکم بر تبدیل مساله مینیمم سازی به ماکزیمم سازی، به راحتی می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی غیر استاندارد را به یک مساله برنامه‌ریزی خطی استاندارد تبدیل کرد.

جواب‌های پایه‌ای[1]

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$Ax = b \tag{3.1}$$

که در آن x یک بردار n تایی، b یک بردار m تایی و A یک ماتریس $m \times n$ است. فرض کنید A یک ماتریس رتبه سطری کامل باشد. از n ستون ماتریس A، m ستون مستقل خطی آن را انتخاب

1. Basic solution

می‌کنیم. برای راحتی کار، فرض کنید m ستون اول ماتریس A را انتخاب کرده‌ایم و یک ماتریس $m\times m$ به نام B داریم. ماتریس B یک ماتریس نامنفرد است، پس معادله زیر جواب منحصر به فردی به صورت بردار m تایی x_B دارد:

$$Bx_B = b \tag{4.1}$$

قرار دهید $x=\begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}\in R^n$ (یعنی m مولفه اول x را همان x_B و سایر مولفه‌های دیگر آن را مساوی صفر اختیار می‌کنیم.) در این صورت x یک جواب از معادله $Ax=b$ می‌باشد.

تعریف.

دستگاه (3.1) را در نظر بگیرید. فرض کنید B یک زیر ماتریس نامنفرد $m\times m$ از A باشد. حال اگر $n-m$ مولفه از x را که متناظر با B نیست، صفر قرار دهیم، جواب بدست آمده از m معادله خطی را یک جواب پایه‌ای مساله (3.1) متناظر با پایه B می‌نامیم، مولفه‌های x متناظر با پایه B را متغیرهای پایه می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر ماتریس A را به صورت $A=\begin{bmatrix} B, & N \end{bmatrix}$، با ماتریس وارون پذیر B بیان کنیم، آنگاه بردار $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ با:

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b \\ x_N &= 0 \end{aligned}$$

را جواب پایه‌ای دستگاه می‌گویند. اگر $x_B \geq 0$، آن گاه x را جواب پایه‌ای شدنی دستگاه می‌گویند. B را ماتریس پایه (یا بطور ساده پایه) و N را ماتریس غیر پایه می‌نامند. مولفه‌های x_B متغیرهای پایه (یا متغیرهای وابسته) می‌گویند و مولفه‌های x_N متغیرهای غیرپایه (یا متغیرهای مستقل) می‌نامند. اگر

$x_B > 0$، آنگاه x جواب پایه‌ای شدنی ناتباهیده گفته می‌شود، و اگر حداقل یکی از مولفه‌های x_B صفر باشد، آنگاه x جواب پایه‌ای شدنی تباهیده نامیده می‌شود.

فرض رتبه کامل.

در سراسر این پایان نامه، فرض بر این است که ماتریس A با مرتبه $m \times n$، $m < n$ بوده و m سطر ماتریس A مستقل خطی هستند. تحت این فرض، معادله (3.1) حداقل یک جواب پایه‌ای دارد.

3-1 روش سیمپلکس[1]

در این بخش به معرفی مختصر روش سیمپلکس ارائه شده توسط دانتزیک[2] می‌پردازیم که به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی در تابستان 1947 ابداع شد. اولین کاربرد مهم این روش اندکی بعد در پاییز 1947 انجام گرفت. ج. لدرمن برنامه‌ریزی خطی طرح – تغذیه را با نه محدودیت و بیست و هفت متغیر نامنفی در سازمان ملی استانداردها حل کرد، حل این مساله با استفاده از یک ماشین حساب کوچک 120 نفر – روز وقت گرفت و کاغذهای دست نویس آن حجم زیادی را اشغال کرد. امروزه به کارگیری کامپیوترهای نسل جدید تسهیلاتی در اجرای برنامه‌های خطی بزرگ به وجود آورده است و برنامه‌های خطی با بیش از 5000 محدودیت و ده هزار متغیر را به سادگی حل می‌کند. اگر چه تا کنون چند نوع روش سیمپلکس به وجود آمده است و الگوریتم‌های رقیب جدید دیگری نیز پیشنهاد شده است ولی روش سیمپلکس، ابزاری مورد قبول و ماندنی در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی استمرار یافته است. این روش

1. Simplex method

2. Dantzig

نگرش‌های بیش تری در ساختار مجموعه‌های چند وجهی که ناحیه شدنی مورد بحث برنامه‌ریزی خطی هستند، فراهم آورده است.

بحث خود را از روش سیمپلکس شروع می‌کنیم و ابتدا نشان می‌دهیم که اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد آنگاه یک نقطه راسی بهینه نیز وجود دارد. پس نقاط راسی را برحسب جواب‌های پایه شدنی تعیین می‌کنیم. در نهایت فرآیند روش سیمپلکس را با بهبود این جواب‌ها تا حصول بهینگی تا ظهور جواب‌های بهینه نامتناهی توصیف خواهیم کرد.

نقاط راسی و بهینگی

مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $x_1,\dots,x_k$ نقاط راسی و $d_1,\dots,d_l$ جهت‌های راسی فضای شدنی باشد. با توجه به قضیه نمایش به ازای هر نقطه دلخواه x داریم:

$$\begin{aligned} & x = \sum_{j=1}^{k} l_j x_j + \sum_{j=1}^{l} m_j d_j \\ & \sum_{j=}^{k} l_j = 1 \\ & l_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,k \\ & m_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,l \end{aligned}$$