بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

الگوریتمی برای حل معادلات انتگرودیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی مرتبه بالا توسط مکانیزاسیون

استاد راهنما:

دکتر فرید (محمد) مالک قائینی

استاد مشاور:

دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهش‌گر:

آذر سادات حسینی

مهر ۱۳۹۱

همتم بدرقه‌ی راه کن ای طایر قدس   که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

تقدیم به:

مادرم، دریای بی‌کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود

پدرم، که آرامش روحی و آسایش فکری رامدیونش هستم

خواهرم که وجودش شادی‌بخش و صفایش مایه‌ی آرامش من است

و به تمام کسانی که عشقشان در وجودم دمید.

سپاس گزاری . . .

بر خود لازم می دانم از کلیه کسانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری کردند، تشکر نمایم . در ابتدا از استاد گرامی و شایسته ام جناب آقای دکتر فرید مالک که استاد راهنمای من در تکمیل این پایان نامه بودند سپاسگزارم و زحمات ایشان را ارج می نهم . از جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی به عنوان استاد مشاورم خالصانه قدردانی میکنم . از جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که به عنوان داور خارجی قبول زحمت نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم . از جناب آقاب دکتر سید محمد مهدی حسینی که ایشان نیز مسئولیت داوری پایان نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم .

از جناب آقای محمد حیدری و آقای حسین قانعی که با حسن خلق و فروتنی هیچ کمکی را در این عرصه بر من دریغ ننمودند و در سخت ترین مرحله از انجام این پروژه و در سخت ترین شرایط لطف بی کرانشان شامل حال من شد، با تمام وجودم قدردانی می نمایم .

دوستان عزیزم معصومه فاضل، مریم رضازاده، مریم سفلایی و افسون ژرابون راکه در طول این دوسال برایم همچون خواهرانی مهربان بودند و در تمام لحظات سخت گرمی دستشان را روی شانه هایم حس کردم، طعم آرامش بخش حمایت را به من چشاندند و باعث دلگرمی من برای زندگی بودند، می ستایم و یاد و خاطرشان برای همیشه برایم شادی بخش است .

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه، مطالعه‌ی معادلات انتگرال و انتگرو- دیفرانسیل است که شامل دو نوع مختلف از عملگرهای انتگرالی هستند. این معادلات، معادلات انتگرال و انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم نامیده می‌شوند.

این پایان نامه موضوعات زیر را شامل می‌شود:

۱- قضایای وجود و یگانگی جواب معادلات انتگرال و انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی و غیرخطی را توسط قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ مورد بحث قرار می‌دهد.

۲- برخی روندهای عددی و تحلیلی مؤثر برای حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی و غیرخطی مرتبه بالا از قبیل روش اختلال هموتوپی، روش چندجمله‌ای تیلور، روش تجزیه اصلاح شده، روش هم محلی چبیشف و روش هم‌محلی گسسته را ارائه می‌دهد.

۳- با بیان چند مثال به مقایسه‌ی سرعت همگرایی و دقت روش‌های ذکرشده می‌پردازد. این روند به‌طور عمده به روش بسط تیلور بستگی دارد.

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۱.۱ تاریخچه ۲

۲.۱ معادلات دیفرانسیل ۵

۳.۱ معادلات انتگرال ۶

۴.۱ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ۶

۲ روش‌های حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم ۹

۱.۲ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی و غیر خطی ۱۰

۲.۲ روش اختلال هموتوپی ۱۱

۱.۲.۲ مقدمات روش اختلال هموتوپی ۱۱

۲.۲.۲ بیان روش ۱۲

۳.۲ روش تجزیه اصلاح شده آدومیان ۱۵

۱.۳.۲ مقدمات روش تجزیه آدومیان ۱۵

۲.۳.۲ روش تجزیه آدومیان ۱۷

۳.۳.۲ روش تجزیه اصلاح شده ۱۷

۴.۳.۲ بیان روش ۱۸

۴.۲ روش چندجمله‌ای تیلور ۲۱

۱.۴.۲ مقدمات روش چندجمله‌ای تیلور ۲۲

۲.۴.۲ نمایش ماتریسی قسمت دیفرانسیلی ۲۳
۳.۴.۲ نمایش ماتریسی قسمت انتگرالی ۲۵
۴.۴.۲ نمایش ماتریسی شرایط ۲۹
۵.۴.۲ کاربرد روش ۳۱
۶.۴.۲ آنالیز خطا ۳۲
۵.۲ روش هم‌محلی چبیشف ۳۴
۱.۵.۲ مقدمات روش هم‌محلی چبیشف ۳۵
۲.۵.۲ نمایش ماتریسی قسمت دیفرانسیلی ۳۶
۳.۵.۲ نمایش ماتریسی قسمت‌های انتگرالی فردهلم ۳۷
۴.۵.۲ نمایش ماتریسی قسمت انتگرالی ولترا ۳۹
۵.۵.۲ نمایش ماتریسی شرایط مخلوط ۴۰
۶.۵.۲ روش حل ۴۰
۶.۲ آنالیز خطا ۴۲

۳ ساختار هسته معادلات انتگزو- دیفرانسیل ولترا و فردهلم ۴۷
۱.۳ انواع هسته ۴۸
۲.۳ معادلات منفرد و معادلات به‌طور ضعیف منفرد ۴۹
۳.۳ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم منفرد ۵۰
۴.۳ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترای به‌طور ضعیف منفرد ۵۰
۱.۴.۳ حل توسط تقریب تیلور ۵۱
۵.۳ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترای خطی به‌طور ضعیف منفرد مرتبه‌ی دوم ۵۳
۱.۵.۳ حل توسط روش تجزیه‌ی آدومیان ۵۴
۶.۳ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا - فردهلم با هسته‌ی پیچشی ۵۶
۱.۶.۳ روش هم‌محلی گسسته ۵۶
۲.۶.۳ مقدمات روش هم‌محلی گسسته ۵۷

۳.۶.۳ بیان روش ۵۸

۴ قضایای وجود و یگانگی جواب معادلات انتگرو- دیفرانسیل ۶۳

۱.۴ تعاریف و پیش نیازها ۶۴

۲.۴ قضایای وجود ویگانگی معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا و فردهلم ۶۴

۵ تحلیل و بررسی و نتیجه‌گیری ۷۳

۱.۵ مکانیزاسیون ۷۴

۲.۵ الگوریتمی برای حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم با مکانیزاسیون ۷۵

۳.۵ نتایج عددی ۷۶

۴.۵ نتیجه ۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۸

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال، یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی است که اصولاً اهمیت آن در ارتباط با مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی معادلات با مشتقات جزئی مشخص می‌شود. در زمینه‌های مختلفی از علوم با معادلات انتگرال مواجه می‌شویم. معادلات انتگرال کاربردهای بیشماری در الاستیک (کشسانی) [۱]، انعطاف پذیری [۲]، دینامیک سیال[۳]، تئوری پالایش[۴]، انتقال گرما[۵]، الکترواستاتیک[۶]، الکترودینامیک[۷]، بیومکانیک[۸]، تئوری بازی و سرگرمی [۹]، کنترل[۱۰]، مهندسی الکتریک[۱۱]، اقتصاد [۱۲]، داروسازی[۱۳] و غیره دارد. هم‌چنین جواب‌های دقیق معادلات انتگرال نقش مهمی را در درک صحیح ویژگی‌های کیفی پدیده‌ها و پردازش‌ها در بخش‌های مختلف علوم طبیعی ایفا می‌کنند.

ازنظر تاریخی اولین کسی که از اصطلاح معادلات انتگرال استفاده کرد، دوبوا ریموند[۱۴] در سال ۱۸۸۸ بود. لاپلاس در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی به‌صورت زیر را معرفی نمود:

$$F\left(x\right)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-xt}f\left(t\right)dt$$

که برای حل مسائل مقدار اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل خطی به کار می‌رفت. در جریان پیشرفت و تکامل

---

[۱] $Elasticity$

[۲] $Plasticity$

[۳] $Fluid\ dynamics$

[۴] $Filtration\ theory$

[۵] $Heat\ transfer$

[۶] $Electrostatics$

[۷] $Electrodynamics$

[۸] $Biomechanics$

[۹] $Game\ theory$

[۱۰] $Control$

[۱۱] $Electrical\ engineering$

[۱۲] $Economy$

[۱۳] $Medicine$

[۱۴] $Du\ Bois-Reymond$

ریاضیات، فوریه [۱۵] در سال ۱۸۲۲ و آبل[۱۶] در سال ۱۸۲۶ ضمن مطالعه‌ی مسائل فیزیکی انتقال حرارت به معادلاتی از قبیل

$$f(x) = \int_{۰}^{\infty} (x-y)^{-a} g(y)\, dy$$

و

$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} \sin(xy)\, g(x)\, dy$$

برخوردند که خود معادلاتی از نوع انتگرالی هستند. پوآسن[۱۷] نیز در سال ۱۸۲۶ ضمن مطالعه‌ی موضوعاتی در مغناطیس به معادله‌ی انتگرالی زیر رسید:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_{۰}^{x} k(x-y)\, g(y)\, dy$$

او با بسط $g(x)$ به یک سری توانی برحسب پارامتر λ موفق به حل این معادله شد، سپس همگرایی این سری در سال ۱۸۳۷ توسط لیوویل[۱۸] اثبات شد. هم‌چنین لیوویل معادلات خاصی را مستقلاً حل نمود. یک گام مهم در راه توسعه‌ی معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد و آن در زمینه‌ی چگونگی حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

اصطلاحات نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می‌روند اولین بار توسط هیلبرت[۱۹] پیشنهاد شدند. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل در قالب‌های نوع اول و دوم بیان شده بودند.

پوآنکاره[۲۰] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرالی به‌صورت زیر را معرفی کرد:

$$V(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,y)\, V(y)\, dy = g(x)$$

که متناظر با معادله‌ی دیفرانسیل جزئی $\nabla u + \lambda u = f(x,y)$ است (u و f دومتغیره و V و g یک متغیره هستند) و در آن داریم:

$$\nabla = \frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}$$

[۱۵] $Fourier$

[۱۶] $Abel$

[۱۷] $Poisson$

[۱۸] $Liouville$

[۱۹] $Hilbert$

[۲۰] $Poincare$

فردهلم[21] برای بدست آوردن جواب این معادلات تحقیقاتی انجام داد. و سرانجام ولترا[22] در اواخر قرن نوزدهم نظریه‌ی عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود.

با انتشار مقالات ولترا و فردهلم نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی به اوج خود رسید و کارهای این دو به ابداع نظریه‌ی معادلات انتگرال منجر شد و با پیشرفت‌های بعدی در این زمینه معادلات انتگرو-دیفرانسیل[23] نیز مطرح شدند.

فرمول‌بندی ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، معادلات انتگرال و معادلات انتگرو- دیفرانسیل را شامل می‌شوند. در سال‌های اخیر علاقه‌ی رو به رشدی به معادلات انتگرو- دیفرانسیل معطوف شده است که ترکیبی از معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال ولترا و معادلات انتگرال فردهلم هستند. معادلات انتگرو- دیفرانسیل نقش مهمی را در بسیاری از شاخه‌های آنالیز تابعی خطی و غیرخطی و کاربرد آنها در تئوری مهندسی، مکانیک، فیزیک، شیمی، بیولوژی، اقتصاد و الکترونیک ایفا می‌کنند. ولترا هنگام مطالعه‌ی پدیده‌ی رشد جمعیت با معادلات انتگرو- دیفرانسیل مواجه شد و این نام را برای آنها انتخاب کرد.

حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل معمولا از نظر تحلیلی پیچیده است و به استثنای تعداد محدودی از این مسائل، بیشتر آنها جواب تحلیلی ندارند. بنابراین نیاز داریم تا روش حل تقریبی مناسبی را برای آنها بدست آوریم. چندین روش برای حل تقریبی معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا و فردهلم شناخته شده‌اند. برخی از آنها با استفاده از روش‌های عددی و برخی با استفاده از روش‌های تحلیلی حل می‌شوند که در روش‌های عددی باید همگرایی و پایداری روش بررسی شود. هم‌چنین توابع پایه‌ی مختلف بسیاری برای تقریب جواب معادلات انتگرو- دیفرانسیل از قبیل موجک هار[24]، توابع لاگرانژ[25]، چندجمله‌ای‌های تیلور[26]، چندجمله‌ای‌های چبیشف[27]، موجک‌های سینوس - کسینوس[28]، توابع دورگه‌ی لژاندر [29] و بلاک پالس [30]

---

[21] $Erik\ Ivan\ Fredholm$

[22] $Vito\ Volterra$

[23] $Integro - Differential\ Equations$

[24] $Haar - Wavelet$

[25] $Lagrange\ functions$

[26] $Taylor\ polynomials$

[27] $Chebyshev\ polynomials$

[28] $Sine - cosin\ wavelet$

و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند.

چنین روش‌هایی در مورد توسعه و تحلیل روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال یک بعدی هستند اما در حالت‌های دوبعدی تاکنون کارهای کمی انجام گرفته است.

روش تبدیلات دیفرانسیلی[۳۱] (DTM) یک روش عددی- تحلیلی و روندی تکراری است که به بسط سری تیلور بستگی دارد[۳۷]. تبدیل‌های دیفرانسیلی ابتدا توسط ژاو[۳۲] پیشنهاد شد. با استفاده از این روش امکان حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال دوبعدی و معادلات انتگرو- دیفرانسیل وجود دارد.

در این پایان نامه به مطالعه‌ی معادلات انتگرو- دیفرانسیلی می‌پردازیم که شامل دو عملگر انتگرالی معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا و فردهلم هستند و بر آن هستیم که یک روند تحلیلی و عددی مؤثر را برای حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم غیرخطی با مرتبه‌ی بالا ارائه دهیم. روند ما اساساً به روش بسط تیلور بستگی دارد. این روش معادله‌ی انتگرو- دیفرانسیل و شرایط مشخص شده‌ی آن را به یک معادله‌ی ماتریسی تبدیل می‌کند. بهره‌وری و قابل اطمینان بودن این روش با برخی آزمایش‌های عددی نشان داده می‌شود.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱ رابطه‌ی بین یک تابع مجهول $y=\phi\left(x\right)$ و مشتقات آن و متغیر مستقل x را یک معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم، که صورت کلی آن به شکل زیر است:

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (۱-۲.۱-۱)$$

که در آن F تابعی معلوم، x متغیر مستقل، y متغیر وابسته و $y^{(n)},\cdots,y'',y'$ مشتقات y هستند و $y=\phi\left(x\right)$ تابع مجهول است. منظور از حل معادله دیفرانسیل(۱-۲.۱-۱) تعیین تابع $y=\phi\left(x\right)$ است به‌طوری‌که در معادله‌ی (۱-۲.۱-۱) صدق کند.

[۲۹] $Hybrid\ Legendre\ functions$

[۳۰] $Block-pulse$

[۳۱] $Differential\ transformmethod$

[۳۲] $Zhao$

۳.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱ رابطه‌ی بین تابع مجهول $y=\phi(x)$ و انتگرال آن و متغیر مستقل x را یک معادله‌ی انتگرال می‌نامیم که صورت کلی آن به شکل زیر است:

$$F\left(x,y,\int_{u_۱(x)}^{u_۲(x)} G\left(t,x,y\right)dt\right)=۰ \qquad (۱-۱.۳-۲)$$

که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است و توابع F، G، $u_۱(x)$ و $u_۲(x)$ معلوم و تابع $y=\phi(x)$ مجهول می‌باشد. منظور از حل معادله انتگرال (۱-۱.۳-۲) تعیین تابع $y=\phi(x)$ است به‌طوری‌که در معادله‌ی (۱-۱.۳-۲) صدق کند.

۴.۱ معادلات انتگرو- دیفرانسیل

تعریف ۱.۴.۱ رابطه‌ی بین تابع مجهول $y=\phi(x)$ و مشتقات آن و انتگرال تابع y و مشتقات آن را یک معادله‌ی انتگرو- دیفرانسیل می‌نامیم که صورت کلی آن به شکل زیر است:

$$F\left(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x),\int_{u_۱(x)}^{u_۲(x)} G\left(t,x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)\right)dt\right)=۰ \qquad (۱-۱.۴-۳)$$

که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است و توابع F، G، $u_۱(x)$ و $u_۲(x)$ معلوم و تابع $y=\phi(x)$ مجهول می‌باشد. منظور از حل معادله دیفرانسیل (۱-۱.۴-۳) تعیین تابع $y=\phi(x)$ است به‌طوری‌که در معادله‌ی (۱-۱.۴-۳) صدق کند.

تعریف ۲.۴.۱ هرگاه در یک معادله دیفرانسیل یا معادله‌ی انتگرو- دیفرانسیل مشتق مرتبه‌ی nام $(n\geq ۱)$ تابع مجهول y ظاهر شود و مشتقات مراتب بالاتر y در معادله موجود نباشد، آن را یک معادله‌ی مرتبه‌ی n می‌نامیم.

تعریف ۳.۴.۱ هرگاه در کنار یک معادله دیفرانسیل یا معادله‌ی انتگرو- دیفرانسیل مرتبه‌ی n، مقدار تابع جواب و مشتقات آن تا مرتبه‌ی $(n-۱)$ در یک نقطه مشخص شده باشند، به آن معادله یک مسئله‌ی مقدار اولیه می‌گوییم.

تعریف ۴.۴.۱ هرگاه در کنار یک معادله دیفرانسیل یا معادله‌ی انتگرو- دیفرانسیل مرتبه‌ی n که دارای جواب $y\left(x\right)$ در بازه $[a,b]$ است، داشته باشیم:

$$y^{(j_i)}\left(a\right)=\alpha_{j_i} \qquad i=0,1,\cdots,r \tag{۱-۴.۱-۴}$$

$$y^{(j_i)}\left(b\right)=\alpha_{j_i} \qquad i=r+1,r+2,\cdots,n-1$$

که $\{j_i|1\leq i\leq n\}$ یک جایگشت $\{1,\cdots,n\}$ است، آنگاه آن را یک مسئله‌ی مقدارمرزی می‌گوییم.

تعریف ۵.۴.۱ معادلات انتگرال به دو دسته‌ی مهم معادلات انتگرال ولترا و فردهلم تقسیم می‌شوند. اگر در معادله‌ی (۱-۳.۱-۲) قرار دهیم:

$$u_1\left(x\right)=a \qquad , \qquad u_2\left(x\right)=b \tag{۱-۴.۱-۵}$$

آنگاه معادله را یک معادله‌ی انتگرال فردهلم می‌نامیم و اگر قرار دهیم:

$$u_1\left(x\right)=0 \qquad , \qquad u_2\left(x\right)=x \tag{۱-۴.۱-۶}$$

معادله را یک معادله‌ی انتگرال ولترا می‌نامیم.

به شکل ساده‌تر، معادله‌ی انتگرال را به صورت:

$$A(x)y(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)y(t)dt=f(x) \tag{۱-۴.۱-۷}$$

در نظر می‌گیریم که در آن $k(x,t)$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال نامیده می‌شود و A، f و k توابع معلوم و y تابع مجهول است. اگر عملگر انتگرال برای $a\leq x,t\leq b$ کاملاً پیوسته (فشرده) باشد، هسته‌ی k یک هسته‌ی فردهلم است و لذا معادله‌ی یک معادله انتگرال فردهلم نامیده می‌شود و اگر هسته‌ی k برای $t>x$ و $a\leq x,t\leq b$ مساوی با صفر باشد، آنگاه هسته‌ی معادله انتگرال، یک هسته‌ی ولترا است و لذا معادله انتگرال یک معادله انتگرال ولترا نامیده می‌شود.

دسته بندی دیگری که در حل معادلات انتگرال حائز اهمیت است معادلات انتگرال نوع اول و دوم می‌باشد. اگر تابع مجهول y در معادله‌ی (۱-۳.۱-۲) فقط زیر علامت انتگرال ظاهر شود معادله را یک معادله‌ی انتگرال نوع اول می‌نامیم و در غیر این‌صورت معادله یک معادله‌ی انتگرال نوع دوم نامیده می‌شود.

فصل ۲

روش‌های حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم

۱.۲ معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی و غیر خطی

در این بخش ابتدا معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی و غیرخطی را به شکل زیر :

$$\sum_{j=0}^{m} p_j\,(x)\,y^{(j)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)y(t)dt \quad (۲-۱.۲-۱)$$

در نظر می‌گیریم که یک معادله انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم خطی مرتبه‌ی بالاست و معادله‌ی

$$\sum_{j=0}^{m} p_j\,(x)\,y^{(j)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)[y(t)]^p dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)[y(t)]^q dt$$

(۲-۱.۲-۲)

نیز یک معادله انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم غیرخطی مرتبه‌ی بالا از نوع همرشتاین [1] است. در این دو معادله توابع $f(x)$، $p_j(x)$، $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ ، $(j = 0, 1, \cdots, m)$، توابع تا n مرتبه $(n \geq m)$ مشتق‌پذیر روی ناحیه‌ی $a \leq x, t \leq b$ هستند و a، b، λ_1 و λ_2 اعداد ثابت و p و q اعداد صحیح مثبت هستند.

روند تحلیلی متداول برای حل این نوع معادلات از خطی سازی [2] استفاده می‌کند. لذا چنین روندی مسئله‌ی واقعی را برای این که با ابزارهای متداول قابل کنترل شود، تغییر می‌دهد و این کار باعث می‌شود که بعضی اوقات جواب‌های مسئله به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر کند.

اما اگر از روش‌های عددی که بر گسسته سازی متکی است استفاده کنیم، جواب‌های تقریبی را برای برخی مقادیر می‌توان محاسبه کرد و این سبب می‌شود برخی از اتفاقات مهم نظیر بی‌نظمی‌ها و انشعاب‌ها نادیده گرفته شوند. از طرفی برخی روش‌های عددی که مستلزم انجام محاسبات بسیار زیاد کامپیوتری هستند، فقط اطلاعات محدودی به ما می‌دهند. لذا با توجه به مطالب گفته شده اهمیت این که یافتن یک جواب به روش تحلیلی برای مسئله‌ی غیرخطی چقدر می‌تواند کارساز باشد، روشن خواهد بود.

در اینجا، برای بدست آوردن جواب تقریبی معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم ابتدا روش اختلال هموتوپی [3] و روش تجزیه اصلاح شده آدومیان را که دو روش نیمه تحلیلی هستند بیان کرده و سپس به بیان روش‌های عددی خواهیم پرداخت.

---

[1] *Hammerstein*

[2] *Linearization*

[3] *Homotopy perturbation*

۲.۲ روش اختلال هموتوپی

روش اختلال هموتوپی توسط ریاضیدانان و مهندسان زیادی برای حل معادلات تابعی متنوعی استفاده شده است. روش اختلال هموتوپی روندی تحلیلی است که برای یافتن جواب‌های مسائلی به کار می‌رود که براساس ساختن یک هموتوپی با پارامتر نشانده‌ی p که به‌عنوان پارامتر کوچک در نظر گرفته می‌شود، هستند. این روش مسائلی را که به دلیل غیرخطی بودن پیچیده هستند به معادلاتی ساده و خطی تغییرشکل می‌دهد. در اینجا روش اختلال هموتوپی را برای حل معادلات انتگرو- دیفرانسیل ولترا- فردهلم غیرخطی بررسی می‌کنیم.

۱.۲.۲ مقدمات روش اختلال هموتوپی

تعریف ۱.۲.۲ یک هموتوپی بین دو تابع پیوسته‌ی f و g از یک فضای توپولوژیک X به یک فضای توپولوژیک Y، یک تابع پیوسته‌ی $H : X \times [۰, ۱] \to Y$ است به‌طوری‌که اگر $x \in X$، آنگاه:

$$H(x, ۰) = f(x), \qquad H(x, ۱) = g(x)$$

اگر پارامتر دوم H را به عنوان پارامتر زمان در نظر بگیریم، آنگاه H یک تغییر شکل پیوسته از f به g است: در زمان ۰ تابع f و در زمان ۱ تابع g را داریم.

روش اختلال هموتوپی ترکیبی از روند اختلال کلاسیک و روند هموتوپی است. برای توضیح ایده‌ی پایه‌ای از این روش، معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی زیر:

$$A(u) - f(r) = ۰, \qquad r \in \Omega \qquad (۲-۲.۲-۳)$$

را با شرایط مرزی $B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = ۰, \ \ r \in \Gamma$ در نظر می‌گیریم که A یک عملگر دیفرانسیل کلی، B یک عملگر مرزی، $f(r)$ یک تابع تحلیلی معلوم و Γ مرز دامنه‌ی Ω است. $\frac{\partial}{\partial n}$ نماد مشتق در امتداد به سمت خارج دامنه‌ی Ω می‌باشد. عملگر A می‌تواند به دوقسمت خطی و غیرخطی تفکیک شود. بنابراین داریم:

$$L(u) + N(u) - f(r) = ۰ \qquad (۲-۲.۲-۴)$$