دانشگاه رازی

دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

آنتروپی آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد جاری

توسط

فرشته کهراری

استاد راهنما

دکتر رضا هاشمی

استاد مشاور

دکتربهاء الدین خالدی

بهمن ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

عزیزترین سرمایه‌های زندگیم

پدرم که با دعای خیرش و مادرم که با محبت و مهرش پشتوانه زندگیم بوده‌اند.

قدردانی

مراتب سپاس و قدردانی‌ام را به پیشگاه استاد گرانقدر و فرزانه‌ام آقای دکتر رضا هاشمی تقدیم می‌دارم.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر بهاء الدین خالدی به‌خاطر نقطه‌نظرات دانشمندانه‌ای که در انجام این پایان‌نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید محترم آقای دکتر مجید صادقی فر و آقای دکتر داوود قزوینی نژاد سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان‌نامه بیان داشتند.

همچنین از دوست عزیزم خانم سمیه عبداللهی و تمام دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکر می‌کنم.

فرشته کهراری

کرمانشاه، بهمن ۱۳۸۸

آنتروپی آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد جاری

چکیده

نظریه‌ی اطلاع شاخه‌ای از نظریه‌ی ریاضی آمار و احتمال است که شامل کمی کردن اطلاع است. یکی از مهمترین اندازه‌هایی که برای کمی کردن اطلاع به کار می‌رود، آنتروپی است. آنتروپی، اندازه‌ای احتمالاتی از عدم حتمیت یا عدم آگاهی درباره برآمد یک آزمایش تصادفی است. از دیدگاه شانون، آنتروپی، عدم یکنواختی (تمرکز احتمال‌ها) را تحت چگالی f اندازه می‌گیرد.

در این پایان نامه در مورد آنتروپی، آنتروپی شانون و به ویژه آنتروپی شانون آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد جاری پرداخته‌ایم.

همچنین روابطی بازگشتی برای آنتروپی شانون بردارهای تصادفی از آماره‌های ترتیبی متوالی و غیرمتوالی به دست آمده است که مشابه روابط بازگشتی است که پارک (۱۹۹۶) برای محاسبه اطلاع فیشر برداری تصادفی از آماره‌های ترتیبی ارائه داده است. قضیه‌ای برای محاسبه آنتروپی شانون مجموعه‌ای دلخواه از آماره‌های ترتیبی ارائه نموده‌ایم که قبلاً پارک (۲۰۰۵) مشابه این قضیه را برای محاسبه اطلاع فیشر مجموعه‌ای دلخواه از آماره‌های ترتیبی ارائه کرده بودند.

در این پایان نامه با توجه به ایده‌ی آنتروپی باقیمانده که ابراهیمی (۱۹۹۶) مطرح کرد، قضیه‌ای در ارتباط با محاسبه آنتروپی باقیمانده آماره‌های ترتیبی ارائه شده است.

و در نهایت به بررسی آنتروپی مقادیر رکورد جاری پرداخته‌ایم.

واژه‌های کلیدی : آماره‌های ترتیبی، آنتروپی شانون، خاصیت جمعپذیری، روابط بازگشتی، طول عمر باقیمانده، مقادیر رکورد جاری

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه‌ی اطلاع شاخه‌ای از نظریه‌ی ریاضی آمار و احتمال است که شامل کمی کردن اطلاعات است. این نظریه در بسیاری از زمینه‌ها همچون آمار و احتمال نقش مهمی را ایفا می‌کند. کاربرد این موضوع در بسیاری از زمینه‌های مختلف همچون استنباط آماری، رمزشناسی، شبکه‌ها، تابع کدهای ملکولی، انتخاب مدل، فیزیک حرارتی، محاسبه کوانتوم و دیگر شکل‌های تحلیل داده‌هاگسترش یافته است.

- تولر(۱۹۵۰)خاطر نشان کرد که نظریه‌ی آماری مکاتبه را اغلب نظریه‌ی اطلاع می‌نامند.
- رزتاین(۱۹۵۱)نظریه‌ی اطلاع را در ارتباط با ریاضیات مربوط به مجموعه‌های اندازه‌پذیر معرفی کرد.
- پیرز(۱۹۵۶)نظریه‌ی مکاتبه و نظریه‌ی اطلاع را مترادف یکدیگر می‌دانست.

طبیعت آماری و ریاضی نظریه‌ی اطلاع توسط فیشر(۱۹۵۶)، شانون(۱۹۵۶) و واینر(۱۹۵۶) مورد تأکید قرار گرفت.

به‌طورکلی اطلاع در جریان مقاله‌ای که توسط کلود شانون(۱۹۴۸) تحت عنوان «نظریه‌ی ریاضی مکاتبه» منتشر شد، مورد توجه قرار گرفت. نتایج اساسی این نظریه نشان داد به‌طور میانگین تعداد بیت‌های مورد نیاز برای نشان دادن نتیجه‌ی پیشامدی تصادفی(غیرحتمی) همان آنتروپی پیشامد است. استفاده از اطلاع در اینجا به مفهوم تکنیکی آن است و نباید با مفهوم معنایی آن اشتباه گرفته شود. لذا خواص اندازه‌های اطلاع معرفی شده با توجه به همین مفهوم در نظر گرفته شده اشت.

یکی از مهمترین اندازه‌هایی که برای کمی کردن اطلاع به کار می‌رود، آنتروپی است: اطلاع در یک متغیر تصادفی و اطلاع متقابل. بسیاری از محققین به مطالعه‌ی رابطه‌ی بین فرم ریاضی و مفهومی، اطلاع و آنتروپی پرداخته‌اند و مقالات زیر را منتشر کرده‌اند:

بارتلت(۱۹۵۵)، چری(۱۹۵۷)، فیشر(۱۹۳۵)، جوشی(۱۹۵۷)، خینچن(۱۹۵۳)، کلموگرف(۱۹۵۶) و مندلبرات(۱۹۵۳).

تعبیر تجربی آنتروپی مانند احتمال، بر خواص دنباله‌های طولانی (احتمال با تعبیر فراوانی نسبی) که از تکرار آزمایش‌های تصادفی تولید می‌شود، متکی است. در سال ۱۹۴۸، شانون ارتباط بین آنتروپی و انواع دنباله‌ها را اثبات کرد که این روابط منجر به حل تعدادی از مسأل پایه‌ای، در کدگذاری و انتقال داده‌ها شد. همچنین او در سال ۱۹۶۳ آنتروپی را به عنوان اندازه‌ای از عدم حتمیت در نظریه‌ی اطلاع مربوط به سیستم‌های از راه دور تعریف کرد.

جینز در سال ۱۹۵۷، روش ماکسیمم آنتروپی را برای حل برخی مسأل فیزیک و کمی بعد از آن برای حل مسأل پیچیده و مهم در سایر علوم به کار برد. در سال ۱۹۹۵ساریدیس با استفاده از تعبیر آنتروپی شانون، نظریه‌ای در مورد کنترل خودکار ارائه داد که بر اساس عدم اطمینان آزمایشگر برای به دست آوردن نتیجه‌ی بهینه است.

بروکس و وایلی در سال ۱۹۸۸ آنتروپی را به عنوان نظریه‌ی شکل‌سازی سیر تکاملی زیستی معرفی کردند. تعدادی از کاربردهای آنتروپی عبارتند از: برنامه‌ریزی شهری، حمل و نقل، تجارت، اقتصاد، استنباط آماری، تحقیق در عملیات، نظریه‌ی صف بندی، تحلیل طیفی غیر خطی، تشخیص الگو و تحلیل تصاویر، دینامیک سیالات، تحلیل مخاطره، مدل‌های رشد جمعیت و بسیاری از زمینه‌های دیگر.

ترتیب مطالب این پایان نامه بدین شرح است: در فصل اول به معرفی مفهوم آنتروپی، تعاریف و قضایای مربوط به آن، آنتروپی توأم و ویژگی‌های آن، آنتروپی شرطی، اطلاع متقابل، خواص اطلاع کولبک‌لیبلر و اندازه‌های اطلاع پویا می‌پردازیم. همچنین کاربردهایی از آماره‌های ترتیبی را بیان کرده و تابع چگالی آن‌ها را براساس یک رابطه‌ی توزیعی ارائه می‌دهیم. و در آخر قضیه‌ای در ارتباط با خاصیت مارکوف آماره‌های ترتیبی آمده است.

در فصل دوم با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری آنتروپی، به محاسبه‌ی آنتروپی یک بردار تصادفی دلخواه از آماره‌های ترتیبی می‌پردازیم. در ادامه روابط بازگشتی بین آنتروپی بردارهای تصادفی دلخواه از آماره‌های ترتیبی را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم به مطالعه‌ی آنتروپی آماره‌های ترتیبی از نقطه نظر شانون خواهیم پرداخت. کران‌هایی را برای آنتروپی آماره‌های ترتیبی بیان می‌کنیم و به بررسی خواص آنتروپی آماره‌های ترتیبی می‌پردازیم. همچنین قضیه‌ای در ارتباط با آنتروپی باقیمانده‌ی آماره‌های

ترتیبی ارائه می‌شود.

در فصل آخر آنتروپی شانون مقادیر رکورد جاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان داده خواهد شد که اطلاع متقابل و اطلاع تشخیص کولبک‌لیب‌لر بین مقادیر رکورد جاری بالا و پایین آزاد توزیع‌اند، همچنین رابطه بین ترتیب‌های تصادفی و آنتروپی مقادیر رکورد جاری بررسی می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

در این فصل به معرفی مفهوم آنتروپی، تعاریف و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. علاوه بر این آنتروپی توأم و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم و در پایان معیارهای دیگری از اطلاع را متذکر می‌شویم و همچنین به معرفی توابع چگالی توأم برداری تصادفی از آماره‌های ترتیبی متوالی می‌پردازیم.

۱—۲ آنتروپی

فرض کنید پیشامد E با احتمال p اتفاق بیافتد، حال برای تعریف آنتروپی روی این اصل توافق می‌کنیم که میزان تعجب حاصل از وقوع پیشامد E، از طریق تابعی مانند $h_a(p)$، فقط بستگی به احتمال وقوع آن یعنی p داشته باشد. تابع $h_a(p) = -\log_a p$، میزان شگفتی ما از رخداد یک پیشامد با احتمال رخداد p است.

در این رساله پایه‌ی لگاریتم، $a = e$(عدد نپر) در نظر گرفته شده است و $h_e(p)$ را با $h(p)$ نمایش می‌دهیم. تابع شگفتی $h(p)$ از چهار اصل زیر پیروی می‌کند:

۱) $h(۱) = ۰$.

۲) اگر $p < q$ آن‌گاه $h(p) > h(q)$.

۳) $h(p)$ تابعی پیوسته از p است.

۴) $h(pq) = h(p) + h(q)$.

اولین اصل بدین معناست که میزان شگفتی از رخداد یک پیشامد حتمی (پیشامدی با احتمال رخداد ۱) صفر است.

دومین اصل بدین معناست که میزان شگفتی از رخداد یک پیشامد با احتمال رخداد کمتر، بیشتر از میزان شگفتی حاصل از یک پیشامد با احتمال رخداد بیشتر است.

اصل سوم حساسیت زیاد تابع شگفتی $h(p)$ را نسبت به تغییرات p بیان می‌کند.

اصل چهارم میزان شگفتی حاصل از رخداد همزمان دو پیشامد مستقل از هم را نشان می‌دهد.

دو پیشامد E و F را با احتمال‌های $P(E) = p$ و $P(F) = q$ در نظر بگیرید. به دلیل استقلال دو پیشامد داریم: $P(EF) = pq$. شگفتی حاصل از رخداد همزمان دو پیشامد E و F را با $h(pq)$، شگفتی حاصل از رخداد پیشامد E را با $h(p)$ و افزایش شگفتی حاصل از رخداد پیشامد F اگر E رخ داده باشد را با $h(pq) - h(p)$ نشان داده که این مقدار، همان شگفتی حاصل از رخداد پیشامد F می‌باشد.

آنتروپی به عنوان مقدار مورد انتظار شگفتی از رخداد یک پیشامد در نظر گرفته می‌شود.

اگر فرض کنیم $h(p) = -\log_e p = -\ln p$، میزان شگفتی ما از رخداد یک پیشامد با احتمال رخداد p باشد، آن گاه آنتروپی متغیر تصادفی X در حالت گسسته برابر است با:

$$\begin{aligned} H(X) &= E[h(P(X))] \\ &= \sum_i h(p_i(x_i))p_i(x_i) \\ &= -\sum_i p_i(x_i)\ln(p_i(x_i)) \end{aligned} \qquad (۱.۲.۱)$$

کمیت $H(X)$ در نظریه‌ی اطلاعات به عنوان آنتروپی متغیر تصادفی X شناخته می‌شود (در حالتی که یکی از مقادیر $p_i = ۰$ باشد، آن گاه $۰ \ln ۰$ را برابر صفر در نظر می‌گیریم).

از آن جایی که $H(X)$ نشان دهنده متوسط میزان تعجبی است که در مورد اطلاع از مقدار X حاصل می‌شود، می توان آن را به عنوان میزانی از عدم حتمیت مقدار X تفسیر نمود (در نظر گرفت).

در واقع در نظریه‌ی اطلاعات، $H(X)$ را متوسط اطلاعات به دست آمده برای مقدار مشاهده شده X می‌نامند. در مجموع متوسط میزان تعجب حاصل شده از X، عدم حتمیت X یا متوسط میزان اطلاعات حاصل از مقدار مشاهده شده X، همگی مفاهیم یکسانی هستند که از دیدگاههای متفاوت بیان می‌شوند(شلدون راس [۱] (۱۹۹۴)، صفحه‌ی ۴۵۶).

حال برای روشن شدن مطالب فوق به ارائه مثال زیر می‌پردازیم.

مثال ۱.۱ فرض کنید سکه سالمی را ٦ مرتبه پرتاب کنیم، اگر در این آزمایش متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای ظاهر شده در ٦ پرتاب تعریف کنیم، با توجه به جدول زیر می‌بینیم که

[۱] Sheldon Ross

$X=x_i$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$p_i(X=x_i)$	$(۱/۲)^۶$	$۶(۱/۲)^۶$	$۱۵(۱/۲)^۶$	$۲۰(۱/۲)^۶$	$۱۵(۱/۲)^۶$	$۶(۱/۲)^۶$	$(۱/۲)^۶$
$h(p_i(x_i))$	۵/۵۴	۳/۷۵	۲/۸۴	۲/۵۵	۲/۸۴	۳/۷۵	۵/۵۴

پیشامد $\{X=۳\}$ در مقایسه با پیشامدهای دیگر دارای بالاترین احتمال رخداد و در نتیجه کمترین میزان تعجب و بیشترین میزان عدم حتمیت است (اصل ۲). از طرفی چون اطلاع را معمولاً بر حسب کاهش عدم حتمیت اندازه گیری می کنند، با اطلاع یافتن از مقدار $\{X=۳\}$، به دلیل اینکه مشخص نیست کدامیک از حالات $\binom{۶}{۳}$ اتفاق افتاده است، در مقایسه با پیشامدهای $\{X=۰\}$ و $\{X=۶\}$ (هر کدام فقط یک حالت دارند)، دارای کمترین میزان اطلاع و بیشترین میزان عدم حتمیت است. و آنتروپی متغیر تصادفی X در این حالت برابر است با:

$$H(X)=\sum_i h(p_i(x_i))p_i(x_i)=۲/۷۸$$

۱—۱.۲ آنتروپی افرازها

آنتروپی معمولاً به عنوان یک اندازه عدم حتمیت درباره رخداد پیشامدهای A_i، از افراز $\mathcal{A}$، تعبیر می‌شود.

تعریف ۱.۱ . مدل احتمالی با فضای نمونه‌ای Ω و افراز $\mathcal{A}=[A_۱,\cdots,A_M]$، روی فضای نمونه‌ای مفروض که متشکل از M پیشامد A_i با احتمال $p_i=P(A_i)$، می‌باشد، را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$H(\mathcal{A})=-\sum_{i=۱}^{M}p_i\ln p_i,$$

را آنتروپی افراز $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

در یک آزمایش تصادفی، هر پیشامد A و متمم آن $\bar{A}$، افراز $\mathcal{A}=[\mathrm{A},\bar{A}]$ را تشکیل می‌دهند که شامل دو پیشامد $A_۱=A$ و $A_۲=\bar{A}$ است و آنتروپی این افراز برابر است با:

$$H(\mathcal{A})=-(p\ln p+q\ln q),\quad p=P(A),\ \ q=P(\bar{A}),$$

ذکر این نکته لازم است که اگر $\mathcal{A} = [\Omega, \varphi]$، آنتروپی $\mathcal{A}$ را صفر تعریف می‌کنیم.

نظریه‌ی اطلاع شاخه‌ای از نظریه‌ی ریاضی آمار و احتمال است. این نظریه در بسیاری از زمینه‌ها همچون آمار و احتمال نقش مهمی را ایفا می‌کند. به طور کلی این نظریه شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که شامل کمی کردن اطلاعات است.

۱—۲.۲ نامساوی اطلاع

یک نامساوی مهم با کاربردهای فراوان، نامساوی اطلاع است که در لم زیر بیان و اثبات می‌شود.

در قضیه ی (۱.۱) ویژگی مربوط به افرازهایی با پیشامدهای هم شانس نتیجه می‌شود.

لم ۱.۱ . اگر $q_۱, \cdots, q_M$، مجموعه‌ای از M عدد باشند، به طوریکه $q_i \geq ۰$ و $\sum_{i=۱}^{M} q_i = ۱$،

آن‌گاه:

$$-\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln p_i \leq -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln q_i$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر برای تمامی i ها داشته باشیم: $p_i = q_i$.

برهان. با توجه به نامساوی $\ln x \leq x - ۱$، برای هر $x > ۰$، داریم:

$$\ln \frac{q_i}{p_i} \leq \frac{q_i}{p_i} - ۱ \qquad (۲.۲.۱)$$

حال اگر طرفین نامساوی را در p_i ضرب کرده و روی i جمع ببندیم، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{M} p_i \ln \frac{q_i}{p_i} &\leq \sum_{i=۱}^{M} (q_i - p_i) \\ &= ۱ - ۱ \\ &= ۰ \end{aligned} \qquad (۳.۲.۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln q_i - \sum_{i=۱}^{M} p_i \ln p_i \leq ۰$$

که در این صورت نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

قضیه ۱.۱ . آنتروپی یک افراز متشکل از M پیشامد، ماکسیمم است، اگر همه‌ی پیشامدها دارای احتمال یکسان باشند. به عبارت دیگر هر گاه $\mathcal{A} = [A_۱, \cdots, A_M]$، افراز دلخواهی از فضای نمونه باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}) &= -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln p_i \\ &\leq -\sum_{i=۱}^{M} \frac{۱}{M} \ln \frac{۱}{M} \\ &= \ln(M) \end{aligned} \tag{۴.۲.۱}$$

برهان. ابتدا باید نشان داد ماکسیمم آنتروپی برابر $\ln(M)$ است و سپس نشان دهیم که این مقدار با انتخاب $p_i = \frac{۱}{M}$، $i = ۱, \cdots, M$، به دست می آید.

طبق نامساوی اطلاع داریم:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln p_i &\leq -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln q_i \\ &= -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln \frac{۱}{M} \\ &= \ln M \end{aligned}$$

اگر $p_i = \frac{۱}{M}$ را در نامساوی اطلاع جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln p_i &\leq -\sum_{i=۱}^{M} p_i \ln q_i \\ &= -\sum_{i=۱}^{M} \frac{۱}{M} \ln \frac{۱}{M} \\ &= \ln M \end{aligned}$$

که $-\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} \ln \frac{1}{M} = \ln(M)$، آنتروپی افرازی با پیشامدهای هم‌شانس است.
در نتیجه خواهیم داشت:

$$0 \leq H(\mathcal{A}) \leq \ln M$$

□

در زیر بخش بعدی به معرفی آنتروپی شانون می‌پردازیم.

۱−۲.۳ آنتروپی شانون متغیرهای تصادفی

کلود شانون [۲] در سال ۱۹۴۸ اندازه‌ای از عدم حتمیت را بر پایه‌ی توزیع احتمال متغیر تصادفی X ارائه داد که آنتروپی شانون یا اندازه اطلاع شانون نامیده شد. برای بررسی بیشتر خواص این اندازه می توان به شانون(۱۹۴۸) مراجعه کرد. در اینجا آنتروپی شانون متغیر تصادفی گسسته X را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ . متغیر تصادفی X را با تابع احتمال $p_i = P\{X = x_i\}$ در نظر می گیریم که پیشامدهای $\{X = x_i\}$ متقابلاً ناسازگار هستند.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{X}} = [A_1, \cdots, A_M], \;\; A_i = \{X = x_i\}, \; i = 1, \cdots, M,$$

آنتروپی متغیر تصادفی X یعنی $H(X)$ برابر با آنتروپی یک افراز از مجموعه مقادیر X است که به صورت:

$$\begin{aligned} H(X) &= H(\mathcal{A}_{\mathcal{X}}) \\ &= -\sum_{i=1}^{M} p_i \ln p_i \end{aligned} \qquad (۱.۲.۵)$$

[۲] Clude Shannon

آنتروپی به عنوان مقدار مورد انتظار

اگر $f_X(x)$ را به عنوان چگالی نقطه‌ای متغیر تصادفی گسسته X در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$f_X(x_i) = P\{X = x_i\} = p_i$$

حال اگر متغیر تصادفی $\ln f_X(X)$ را که تابعی از متغیر تصادفی X است، در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$H(X) \quad = \quad E[-\ln(f_X(X)] \qquad (۶.۲.۱)$$

حال آنتروپی شانون متغیرهای تصادفی پیوسته را تعریف می‌کنیم. آنتروپی یک متغیر تصادفی پیوسته را نمی‌توان به عنوان آنتروپی یک افراز معرفی کرد، چون پیشامدهای $\{X = x_i\}$، ناشمارا هستند و برای تمام x_i ها، $P\{X = x_i\} = ۰$. بنابراین در حالت پیوسته $H(X)$ تنها به عنوان مقدار مورد انتظار تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱ . با فرض اینکه $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد، آنتروپی آن به صورت:

$$\begin{aligned} H(f) &\equiv H(X) \\ &= E\{-\ln f_X(X)\} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ln f_X(x)dx \\ &= -\int_{۰}^{۱} \ln f_X\left(F_X^{-۱}(u)\right)du \end{aligned}$$

که رابطه آخر بااستفاده از تبدیل $U = F_X(X)$ نتیجه می‌شود.

آنتروپی شانون یکنواختی توزیع را اندازه گیری می‌کند. هر چه $H(f)$ افزایش یابد، توزیع به توزیع یکنواخت نزدیک‌تر می‌شود. نتیجتاً تمرکز احتمالات کاهش یافته(روی تکیه گاه متغیر تصادفی) و پیش بینی برآمد حاصل از توزیع $f_X(x)$ در هنگام آزمایش سخت تر می‌شود

(زلنر[۳] (۱۹۷۱)) به عبارت دیگر توزیع‌هایی با نمودارهای نوک تیز و جمع و جورتر دارای آنتروپی کمتری‌اند و در مقابل توزیع‌های پهن تر دارای آنتروپی شانون بالاترین‌د. بنابراین $H(X)$ اندازه‌ای از عدم حتمیت در ارتباط با $f_X(x)$ است.

آنتروپی تحت تبدیلات ناتکین (مشتق پذیر و معکوس پذیر) X ناوردا نیست. در واقع اگر $Y = \phi(X)$، یک تبدیل یک به یک باشد، می‌توان نشان داد:

$$H(Y) = H(X) - E\left[\ln \left| \frac{\partial}{\partial Y}\phi^{-۱}(Y) \right|\right] \qquad (۸.۲.۱)$$

تجزیه‌ی آنتروپی تحت افراز $\zeta = \varepsilon_۱, \cdots, \varepsilon_n$ از تکیه گاه S به صورت زیر است:

$$H(f) = H(p_f;\zeta) + \sum_{i=۱}^{n} p_f(\varepsilon_i) H(f;\varepsilon_i) \qquad (۹.۲.۱)$$

که $H(p_f;\zeta)$ آنتروپی توزیع چندجمله‌ای ایجاد شده روی افراز ζ توسط F است و $H(f;\varepsilon_i)$، آنتروپی چگالی شرطی f روی ε_i است.

نامساوی اطلاع در حالت پیوسته به صورت زیر خواهد بود(مکلود[۴] (۲۰۰۵)):

قضیه ۲.۱ . توابع انتگرال پذیر نامنفی $c(x)$ و مثبت $f(x)$ را با دامنه‌ی تعریف S در نظر بگیرید.

هرگاه:

$$\int_s (f(x) - c(x))\, dx \geq ۰$$

آن‌گاه:

$$\int_s f(x) \ln f(x) dx \quad \geq \quad \int_s f(x) \ln c(x) dx \qquad (۱۰.۲.۱)$$

(توجه داشته باشید که اگر $f(x)$ و $c(x)$ توزیع‌های احتمال باشند، نامساوی بالا همیشه صادق است).

برهان. با قرار دادن $X = \frac{c(x)}{f(x)}$ در نامساوی $\ln x \leq x - ۱$ وهمچنین با استفاده از روش اثبات نامساوی اطلاع لم (۱.۱) نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. □

به عنوان کاربردی از قضیه (۲.۱)، به ارائه مثال‌های زیر می‌پردازیم.

[۳] Zellner

[۴] Mcleod

مثال ۲.۱ . فرض کنید متغیر تصادفی U به طور یکنواخت روی فاصله‌ی متناهی $S = (\alpha, \beta)$، توزیع شده باشد و همچنین فرض کنید که $c(u)$ تابع چگالی احتمال U باشد. آنتروپی شانون توزیع U عبارت است از:

$$\begin{aligned} H(U) &= -\int_\alpha^\beta c(u) \ln c(u) du \\ &= -\int_\alpha^\beta \frac{۱}{\beta - \alpha} \ln \frac{۱}{\beta - \alpha} du \\ &= \ln \beta - \alpha \end{aligned}$$

طبق قضیه‌ی (۲.۱)، آن گاه برای هر توزیع دیگری مانند $f(u)$ که روی ناحیه‌ی $S = (\alpha, \beta)$، تعریف شده، داریم:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(u) \ln f(u) du &\geq \int_\alpha^\beta f(u) \ln(\frac{۱}{\beta - \alpha}) du \\ &= -\ln(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد توزیع پیوسته یکنواخت نسبت به همه‌ی توزیع‌های تعریف شده روی فاصله‌ی (α, β)، ماکسیمم آنتروپی را دارد.

مثال ۳.۱ . فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\mu = \frac{۱}{\lambda}$، باشد. آنتروپی شانون توزیع X با تابع چگالی احتمال $c(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\int_۰^\infty c(x) \ln c(x) dx \\ &= -\int_۰^\infty c(x) \left(\ln \lambda - \lambda x\right) dx \\ &= ۱ + \ln \mu \end{aligned}$$