دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده‌ی اقتصاد
گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد **آمار ریاضی**

عنوان

براورد پارامترهای جامعه‌ی گزینش شده تحت تابع‌های زیان نامتقارن

پژوهش‌گر

رویا مقدم دیزج هریک

استاد راهنما

دکتر نادر نعمت الهی

استاد مشاور

دکترعبدالرحیم بادامچی‌زاده

اسفند ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه

برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.

تأیید پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشدتوسط دانشجو

عنوان پایان‌نامه: براورد پارامترهای جامعه‌ی گزینش شده تحت توابع زیان نامتقارن

نام دانشجو: رویا مقدم دیزج هریک
شماره‌ی دانشجویی: ۸۸۱۲۵۱۲۸۲۱۱
استاد راهنما: دکتر نادر نعمت الهی

این‌جانب **رویا مقدم دیزج هریک** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **آمار ریاضی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارایه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص این‌جانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارایه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده شود خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

تاریخ: **امضا دانشجو:**

اهدایی

تقدیم به آن‌هایی که

حق‌شان بر گردنم است

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر نادر نعمت‌الهی، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌ها و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

از استاد مشاورم جناب آقای دکترعبدالرحیم بادامچی‌زاده که تذکراتشان باعث غنای پایان‌نامه شد، تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر فرزاد اسکندری و جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی راد که زحمت داوری این اثر را به عهده داشتند سپاس‌گزارم.

در پایان، از خانواده‌ام، به‌ویژه پدر و مادرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

اسفند ۹۱

فهرست مطالب

فهرست مطالب ب

فهرست شکل‌ها ث

۱ کلیات ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ تاریخچه ۳

۱-۳ اهداف و فصل‌بندی ۵

۲ براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده ۷

۲-۱ براوردیابی و تابع‌های زیان ۸

۲-۱-۱ تابع زیان توان دوم خطا ۹

۲-۱-۲ تابع زیان لاینکس ۹

۲-۱-۳ تابع زیان آنتروپی ۱۰

۲-۱-۴ تابع زیان نرمال بازتابیده ۱۱

۲-۲ ناااریبی ۱۲

۲-۲-۱ روش $U.V.$ رابینز ۱۳

۲-۲-۲ براوردگرهای $UMVU$ برای پارامترهای تصادفی ۱۶

۲-۳ براوردگرهای پایا ۱۸

۲-۳-۱ براوردگر MRE پارامتر مکان ۲۰

۲-۳-۲ براوردگر MRE پارامتر مقیاس ۲۱

۲-۴ براوردگرهای بیزی ۲۲

۲-۴-۱ روش ساکروویتز و کان برای به‌دست آوردن براوردگر بیزی جامعه‌ی گزینش شده ۲۴
۲-۵ براورد مینیماکس ۲۶
۲-۶ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ۲۷
۲-۷ خلاصه و نتیجه‌گیری ۲۸

۳ براورد میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده تحت تابع زیان لاینکس ۲۹
۳-۱ مقدمه ۲۹
۳-۲ معرفی براوردگرها ۳۰
۳-۳ اریبی و مخاطره براوردگرها ۳۶
۳-۴ مقایسه‌ی اریبی‌ها و مخاطره براوردگرها ۵۰
۳-۵ نتایج پذیرفتنی بودن ۵۴
۳-۶ شرط کافی برای ناپذیرفتنی بودن ۶۲
۳-۷ کاربردها ۷۱
۳-۸ خلاصه و نتیجه‌گیری ۷۴

۴ براورد میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده تحت تابع زیان نرمال بازتابیده ۷۵
۴-۱ مقدمه ۷۵
۴-۲ نتایج مینیماکس بودن ۷۶
۴-۳ شرط کافی برای ناپذیرفتنی بودن ۸۲
۴-۴ مینیماکس و ناپذیرفتنی بودن θ_J ۹۲
۴-۵ خلاصه و نتیجه‌گیری ۹۵

۵ براورد پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش شده تحت تابع زیان آنتروپی ۹۷
۵-۱ مقدمه ۹۷
۵-۲ براوردگرهای $UMRU$ تحت تابع زیان آنتروپی ۱۰۰
۵-۳ نتایج پذیرفتنی بودن ۱۰۴
۵-۴ ناپذیرفتنی بودن براوردگر $UMRU$ ۱۱۴
۵-۵ خلاصه و نتیجه‌گیری ۱۱۷

۶ نتیجه‌گیری و پیش‌نهادات **۱۱۹**

۶-۱ نتیجه‌گیری ۱۱۹

۶-۲ پیش‌نهادات ۱۲۱

مرجع‌ها **۱۲۲**

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی **۱۲۹**

پیوست الف توجیه براوردگر $\delta_۴(c)$ در فصل سوم **۱۳۲**

abstract **۱۳۷**

فهرست شکل‌ها

۲-۱ نمودار تابع زیان توان دوم خطا ۹

۲-۲ نمودار تابع زیان لاینکس ۱۰

۲-۳ نمودار تابع زیان آنتروپی ۱۱

۲-۴ نمودار تابع زیان نرمال بازتابیده ۱۲

۳-۱ خط پررنگ، خط‌چین و نقطه‌چین به‌ترتیب نشان دهنده‌ی اریبی‌های (۳-۵-۳)، (۳-۳-۶) و (۳-۳-۹) برای $\sigma = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ هستند. ۵۱

۳-۲ خط پررنگ، خط‌چین و نقطه‌چین به‌ترتیب نشان دهنده‌ی اریبی‌های (۳-۸-۳)، (۳-۳-۷) و (۳-۳-۹) برای $\sigma = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲}$ هستند. ۵۲

۳-۳ خط پررنگ، خط‌چین و نقطه‌چین به‌ترتیب نشان دهنده‌ی مخاطره‌های (۱۷-۳-۳)، (۳-۳-۱۸) و (۳-۳-۱۹) برای $\sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ هستند. ۵۳

۳-۴ نمودارتابع مخاطره $R_{\Gamma^{\infty},۷۱۱۶(\delta_c)}$ به‌ازای $a = \sigma = ۱$، $c = -۰/۵ = c_۰$ و $c = b_۰ = -۰/۹۱۹$ ۶۱

۳-۵ نمودار تابع مخاطره $R_{\Gamma^{\infty},۷۱۱۶(\delta_c)}$ به‌ازای $a = -۱$، $\sigma = ۱$، $c = c_۰ = ۰/۵$ و $c = -۰/۲۳۵۰ = b_۰$ ۶۱

چکیده

براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده به عنوان یک مسئله‌ی مهم براورد در مبحث رتبه‌بندی و گزینش، دارای کاربردهای گسترده عملی در زمینه‌های مختلف از جمله صنعت، کشاورزی، پزشکی و ترافیک است. برای مثال، یک کارشناس کشاورزی، واریته‌ای با بیش‌ترین میزان محصول‌دهی را گزینش کرده و به طور طبیعی علاقه‌مند به براورد متوسط میزان محصول واریته‌ی گزینش شده است.

فرض کنید $\Pi_1,...,\Pi_k$، $k \geq 2$ جامعه مستقل با توزیع‌های یکسان اما پارامترهای متفاوت باشند. نمونه‌های تصادفی $(X_{i1},...,X_{in})$، $i = 1,...,k$ به اندازه n از هر یک از k جامعه استخراج شده است. براساس یک قاعده گزینش ثابت و اطلاعات حاصل از نمونه‌های به‌دست آمده، یکی از k جامعه‌ی مذکور را به عنوان بهترین جامعه گزینش می‌کنیم و مسئله براورد پارامترهای این جامعه‌ی گزینش شده را در نظر می‌گیریم. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که براوردگرهای به‌دست آمده در این حالت چه تفاوتی با براوردگرهای به‌دست آمده در حالت ساده (حالت $k = 1$) دارد؟ آیا براوردگرهای به‌دست آمده دارای خواص مطلوب مانند مینیماکس بودن، پذیرفتنی بودن و ... هستند؟

در این پایان نامه ابتدا براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نخست به مسئله‌ی براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده با واریانس مشترک و معلوم تحت تابع زیان لاینکس می‌پردازیم و با ارایه‌ی هفت براوردگر و مقایسه‌ی اریبی و تابع مخاطره‌ی آن‌ها بهترین براوردگر را به‌دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که بسیاری از این براوردگرها پذیرفتنی نیستند و براوردگرهای غالب را معرفی می‌کنیم. در ادامه براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را تحت تابع زیان نرمال بازتابیده به‌دست می‌آوریم و شرط کافی برای ناپذیرفتنی بودن براوردگر مینیماکس این پارامتر را بیان می‌کنیم. سپس براورد پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش شده را تحت تابع زیان آنتروپی مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم براوردگر هم‌پایا با کم‌ترین مخاطره و مینیماکس پارامتر مورد بررسی، براوردگری ناپذیرفتنی است و توسط براوردگر بهتری مغلوب می‌شود.

واژگان کلیدی. *براوردگرهای بهبودیافته؛ براوردگرهای نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم؛ پذیرفتنی بودن؛ تابع زیان نامتقارن؛ توزیع گاما؛ توزیع نرمال؛ جامعه‌ی گزینش شده؛ مینیماکس بودن.*

فصل ۱
کلیات

۱-۱ مقدمه

هدف از استنباط آماری، استنتاج در مورد یک یا چند جامعه و پارامترهای آن‌ها براساس اطلاعات موجود در نمونه‌های جمع‌آوری شده از این جامعه‌ها است. در مسئله‌ی براوررد پارامترهای یک یا چند جامعه، معمولاً پارامتر مورد براورد قبل از جمع‌آوری نمونه مشخص است و پس از جمع‌آوری نمونه، با استفاده از روش‌های معمول براوردیابی مانند روش‌های گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی، براورد می‌شود همچنین براوردگرهایی مانند براوردگر نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم $(UMVU)$، مینیماکس و پذیرفتنی را برای آن به‌دست می‌آوریم. به این نوع استنباط، استنباط غیرگزینشی گویند. ولی در بعضی از مسایل آماری پارامتر مورد نظر برای براورد از قبل مشخص نیست و براساس نمونه‌هایی که برای استنباط مورد استفاده قرار می‌گیرند، مشخص (گزینش) می‌شود. این نوع استنباط را گزینشی گوییم.

فرض کنید $\Pi_1, ..., \Pi_k$، kجامعه باشند که هر کدام دارای توزیعی با پارامترهای به‌ترتیب $\theta_1, ..., \theta_k$

باشند. از هر کدام از این جامعه‌ها نمونه‌ای به اندازه n انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب جامعه‌ای با بزرگ‌ترین میانگین طبق یک قاعده‌ی طبیعی جامعه‌ای را گزینش می‌کنیم که میانگین نمونه‌ای بزرگ‌تری داشته باشد. این نوع استنباط، استنباط گزینشی است. در این حالت پارامتر مورد نظر تصادفی بوده و به جامعه‌ی گزینش شده بستگی دارد. به‌همین دلیل نمی‌توان از روش‌های عادی برای براورد پارامتر استفاده کرد.

مسئله‌ی براورد پارامتر پس از گزینش جامعه، یکی از مسایل مهم براوردیابی است که به‌دلیل کاربردهای زیاد آن مورد توجه محققین قرار گرفته است. این مسئله در زمینه‌های کشاورزی، پزشکی، صنعتی و اقتصادی کاربرد فراوان دارد. برای مثال، پزشکی از بین k دارو، دارویی را برمی‌گزیند که دارای بیش‌ترین میزان اثربخشی باشد. وی همچنین علاقه‌مند به میزان اثر بخشی داروی گزینش شده بر اساس داده‌های موجود است. در این حالت با مسئله گزینش بهترین جامعه و براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده روبرو هستیم.

فرض کنید X_i را از جامعه‌ی Π_i، $i = ۱,...,k$ مشاهده کرده باشیم و X_i دارای توزیعی است که به پارامتر θ_i بستگی دارد (در حالت کلی نمونه‌ی تصادفی $X_{i۱},...,X_{in}$ را ازجامعه‌ی iام انتخاب می‌کنیم و $X_i = T(X_{i۱},...,X_{in})$ را آماره‌ی بسنده‌ی مینیمال در نظر می‌گیریم). همچنین فرض کنید $X_{(۱)} \leq X_{(۲)} \leq ... \leq X_{(k)}$ آماره‌های ترتیبی $X_۱, X_۲, ..., X_k$ باشند. می‌خواهیم پارامتر جامعه‌ی متناظر با بزرگ‌ترین آماره ترتیبی که آن را با θ_M نمایش می‌دهیم و همچنین پارامتر جامعه‌ی متناظر با کوچک‌ترین آماره ترتیبی که آن را با θ_J نمایش می‌دهیم، براورد کنیم. بنابراین قاعده‌ی گزینش در این حالت انتخاب جامعه‌ی متناظر با بزرگ‌ترین آماره ترتیبی برای θ_M و انتخاب جامعه‌ی متناظر با کوچک‌ترین آماره ترتیبی برای براورد θ_J است. توجه کنید که در بحث جامعه‌های گزینش شده پارامتر مورد نظر (θ_J, θ_M) یک پارامتر تصادفی است. برای مثال، در حالت $k = ۲$ که دو متغیر تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ را داریم، پارامترهای (θ_J, θ_M) به‌ترتیب عبارتند از

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_۱ & X_۱ \geq X_۲ \\ \theta_۲ & X_۱ < X_۲ \end{cases} \qquad (۱-۱-۱)$$

$$\theta_J = \begin{cases} \theta_۱ & X_۱ < X_۲ \\ \theta_۲ & X_۱ \geq X_۲ \end{cases} \qquad (۱-۱-۲)$$

در حالت کلی پارامتر θ_M و θ_J به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\theta_M = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \{\Pi_{j\neq i} I(X_i \geq X_j)\} \qquad (۳-۱-۱)$$

$$\theta_J = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \{\Pi_{j\neq i} (1 - I(X_i \geq X_j))\} \qquad (۴-۱-۱)$$

که در آن

$$I(a \geq b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases} \qquad (۵-۱-۱)$$

در بحث براورد پارامترهای گزینش شده، به‌دلیل تصادفی بودن پارامتر مورد نظر، روش‌های براوردیابی با حالت عادی براورد پارامترها متفاوت است. برای مثال، تعریف ناارییبی براوردگر δ_M برای پارامتر θ_M با تعریف عادی ناارییبی متفاوت است و در این حالت براوردگر δ_M را برای θ_M نااریب گوییم هرگاه

$$E(\delta_M) = E(\theta_M)$$

همچنین برای به‌دست آوردن براوردگر مینیماکس پارامتر θ_M (یاθ_J) نمی‌توان از روش‌های عادی استفاده کرد و نیاز به روش‌های خاص در این زمینه می‌باشد.

در این پایان نامه، به‌براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده و پارامتر مقیاس جامعه‌ی گاما گزینش شده تحت برخی تابع‌های زیان نامتقارن را بررسی می‌کنیم. در این خصوص به‌براوردیابی نااریب، مینیماکس و پذیرفتنی پارامترهای این جامعه‌های گزینش شده خواهیم پرداخت.

۱-۲ تاریخچه

مسئله‌ی براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده، کاربردهای بسیاری دارد و بررسی‌های زیادی توسط محققین در این زمینه صورت گرفته است. این موضوع ابتدا توسط روبینشتین (۱۹۶۵، ۱۹۶۱) بررسی شد و توسط محققین دیگری مانند سارکادی (۱۹۶۷)، پوتر و روبینشتین (۱۹۶۸)، گیبونز و همکاران (۱۹۷۷)، کوهن و ساکروویتز (۱۹۸۲)، جیاراتمان و پانچاپاکسان (۱۹۸۴)، ساکروویتز و ساموئل‌کان (۱۹۸۷، ۱۹۸۴)، هوانگ (۱۹۸۷) و ونتر (۱۹۸۸) مطالعه شد.

در براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده، داهیا (۱۹۷۴) اریبی و میانگین توان دوم خطای پنج مجموعه‌ی مختلف از براوردگرهای میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده با واریانس

معلوم را به‌دست آورد و هسیه (۱۹۸۱) براورد میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را در حالت واریانس مشترک اما نامعلوم بررسی کرد.

در براورد پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش شده، ولای سامی و شارما (۱۹۸۸) در دو جامعه‌ی گاما با پارامتر مقیاس نامعلوم و پارامتر شکل صحیح و معلوم، براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده متناظر با بزرگ‌ترین مشاهده را بررسی کردند و براوردگر $UMVU$ و براوردگرهای پذیرفتنی در زیر کلاس براوردگرهای هم پایا را تحت تابع زیان توان دوم خطا و تابع زیان توان دوم خطای پایای مقیاس به‌دست آوردند. ولای سامی و شارما (۱۹۸۹) براوردگر $UMVU$ پارامتر جامعه‌ی گزینش شده را برای k جامعه‌ی گاما به‌دست آوردند و ناپذیرفتنی بودن براوردگر طبیعی $X_{(k)}$ را نشان دادند. در براورد پارامتر جامعه‌ی گامای گزینش شده از بین k جامعه‌ی گاما، ولای سامی (۱۹۹۲a) براوردگری که بر براوردگر طبیعی غلبه دارد را تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌دست آورد. سپس ولای سامی (۱۹۹۶) نشان داد که براوردگر $UMVU$ پارامتر جامعه‌ی گامای گزینش شده تحت تابع زیان توان دوم خطا ناپذیرفتنی است و کلاسی از براوردگرهای غالب را ارایه داد. پس از آن میسرا و همکاران (۲۰۰۶a,b) نتایج پذیرفتنی بودن براوردگرهای به‌دست آمده توسط ولای سامی و شارما را به حالتی که پارامتر شکل معلوم ولی دلخواه است تعمیم دادند. براورد پارامتر جامعه‌ی گامای گزینش شده تحت تابع زیان توان دوم خطا توسط جیاراتمان و پانچاپاکسان (۱۹۸۶)، ولای سامی (۱۹۹۲b) میسرا (۱۹۹۴) نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

اغلب مطالعه‌های انجام شده در خصوص براورد پارامترهای جامعه‌ی گزینش شده، تحت تابع زیان توان دوم خطا انجام پذیرفته است. تابع زیان توان دوم خطا یک تابع زیان متقارن است و اهمیت یکسانی را به کم براورد و بیش براورد می‌دهد. در برخی از مسایل بیش براورد کردن اهمیت زیادتری نسبت به کم براورد کردن (یا بر عکس) دارد. برای مثال، در براورد سوخت یک هواپیما کم براورد کردن موجب خسارت زیادی می‌شود. در این موارد استفاده از یک تابع زیان نامتقارن مفید می‌باشد. از جمله تابع‌های زیان نامتقارن، تابع‌های زیان لاینکس و آنتروپی می‌باشند. در براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده تحت تابع زیان لاینکس، پارسیان و سنجری فارسی‌پور (۱۹۹۹) هفت براوردگر برای پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده تحت تابع زیان لاینکس ارایه دادند و اریبی و تابع مخاطره‌ی هر کدام را به‌دست آوردند. میسرا و مولن (۲۰۰۳) ناپذیرفتنی

بودن بسیاری از این هفت براوردگر را نشان دادند و براوردگرهای بهتری را ارایه دادند.

در براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده تحت تابع زیان آنتروپی، نعمت‌الهی و معتمدالشریعتی (۲۰۰۹) مسئله‌ی براورد پارامتر جامعه‌ی گامای گزینش شده را تحت تابع زیان آنتروپی بررسی کردند و براوردگر مخاطره ناریب با مخاطره‌ی به‌طور یکنواخت مینیمم ($UMRU$)، کلاس براوردگرهای پذیرفتنی خطی و براوردگر غالب بر براوردگر $UMRU$ را به‌دست آوردند. گوپتا و همکاران (۱۹۷۸) تابعی از پارامتر جامعه‌ی گزینش شده‌ی پواسون تعمیم یافته را تحت تابع زیان آنتروپی براورد کردند. موسوی و شانو بهاگ (۲۰۱۰) نیز براورد میانگین ارزشی و براوردیابی هم‌زمان را مطالعه کردند و نشان دادند براوردگر طبیعی برای میانگین ارزشی اریب است. آن‌ها براوردگر $UMRU$ را با استفاده از روش ($U.V.$) رابینز (۱۹۸۸) به‌دست آوردند و با معرفی کلاسی از براوردگرهای غالب نشان دادند که براوردگر طبیعی پارامتر میانگین ارزشی، ناپذیرفتنی است.

تابع‌های زیان استفاده شده در مبحث براورد پارامترهای جامعه‌ی گزینش شده، همگی کران‌دار نیستند. در برخی از مسایل براوردیابی لازم است که میزان زیان ناشی از براورد کران‌دار باشد. یکی از تابع‌های زیان کران‌دار، تابع زیان نرمال بازتابیده است.

در براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده تحت تابع زیان نرمال بازتابیده، نقی‌زاده و همکاران (۲۰۱۲) براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را تحت تابع زیان متقارن نرمال بازتابیده بررسی کردند و براوردگر مینیماکس و شرط کافی برای ناپذیرفتنی بودن براوردگر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را به‌دست آوردند.

۱-۳ اهداف و فصل‌بندی

همان طوری که قبلاً اشاره شد مسئله‌ی براورد پارامترهای جامعه‌ی گزینش شده یک مسئله‌ی مهم و دارای کاربردهای وسیع است و به همین دلیل در سال‌های اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته است. در این پایان‌نامه هدف براورد پارامتر جامعه‌های گزینش شده نرمال و گاما تحت تابع‌های زیان لاینکس، نرمال بازتابیده و آنتروپی است.

برای این منظور، در فصل حاضر مسئله و تاریخچه براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده بیان شد. درفصل دوم مفاهیم و اصطلاحات مقدماتی و نحوه براوردیابی ناریب و مینیماکس را در

جامعه‌های گزینش شده مطرح می‌کنیم. در فصل سوم مسئله‌ی براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی گزینش شده‌ی نرمال با واریانس معلوم و مشترک تحت تابع زیان لاینکس را بررسی می‌کنیم و با ارایه‌ی هفت براوردگر و مقایسه‌ی اریبی و تابع مخاطره‌ی آن‌ها بهترین براوردگر را به‌دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که بسیاری از این براوردگرها پذیرفتنی نیستند و کلاسی از براوردگرها که بر این هفت براوردگر غلبه می‌یابند را ارایه می‌دهیم. همچنین با استفاده از روش بروستر و زیدك (۱۹۷۴) شرط لازم برای ناپذیرفتنی بودن براوردگر هم‌پایا را به‌دست می‌آوریم.

در فصل چهارم براورد پارامتر میانگین جامعه‌ی نرمال گزینش شده را تحت تابع زیان نرمال بازتابیده مورد بررسی قرار می‌دهیم و براوردگر مینیماکس آن را به‌دست آورده و شرط کافی برای ناپذیرفتنی بودن براوردگر مینیماکس این پارامتر را بیان می‌کنیم. سپس مجدداً با استفاده از روش بروستر و زیدك (۱۹۷۴) نشان خواهیم داد که براوردگر هم پایای پارامتر جامعه به وسیله‌ی براوردگر دیگری مغلوب شده و پذیرفتنی نخواهد بود. در نهایت در فصل پنجم براورد پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش شده را تحت تابع زیان آنتروپی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا براوردگر نااریب با مخاطره‌ی به‌طور یکنواخت مینیمم ($UMRU$) را برای ($k \geq ۲$) به‌دست می‌آوریم و سپس برای حالت خاص $k = ۲$ کلاس براوردگرهای خطی پذیرفتنی را تعیین می‌کنیم. با به‌دست آوردن براوردگر مینیماکس پارامتر مورد بررسی، نشان می‌دهیم که براوردگری ناپذیرفتنی است و توسط براوردگر بهتری مغلوب می‌شود. در آخر نشان می‌دهیم براوردگر $UMRU$ براوردگری ناپذیرفتنی برای پارامتر مقیاس توزیع گاما است.

فصل ۲

براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده

در این فصل مفاهیم اولیه براوردیابی و براوردیابی پارامتر جامعه‌ی گزینش شده را که در سرتاسر این پایان نامه به آن‌ها نیاز داریم، مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، در بخش اول مفاهیم براوردیابی و تابع‌های زیان مورد استفاده در فصل‌های بعد را بررسی و در بخش دوم براوردیابی نااریب پارامتر جامعه‌ی گزینش شده تحت تابع زیان توان دوم خطا را مرور می‌کنیم. در بخش سوم مختصری از پایایی و در بخش‌های بعد براوردیابی بیز و مینیماکس در جامعه‌ی گزینش شده را مورد نظر قرار می‌دهیم. در نهایت براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی را معرفی می‌کنیم. مطالب اصلی این پایان نامه در فصل‌های سوم تا پنجم آورده شده است و در این فصل با استفاده از منابع مختلف تنها به مفاهیم اولیه براورد پارامتر جامعه‌ی گزینش شده پرداخته‌ایم. لذا در بیشتر موارد از برهان قضیه‌ها خودداری کرده و تنها به ارجاع به این منابع اکتفا می‌کنیم.

۲-۱ براوردیابی و تابع‌های زیان

در مبحث براوردیابی (پارامتری) جامعه مورد نظر دارای توزیعی از خانواده توزیع‌های $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ است که این توزیع به پارامتر مجهول θ وابسته است و کلیه مقادیر این پارامتر در فضای پارامتری Θ تغییر می‌کند. برای براورد θ، نمونه تصادفی $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ با مقدار مشاهده شده‌ی $\underline{x} = (x_1,...,x_n)$ از این جامعه انتخاب و تابعی از این نمونه‌ی تصادفی مانند $\delta(\underline{X}) = \delta(X_1,...,X_n)$ را به‌عنوان براوردگر پارامتر θ در نظر می‌گیریم. میزان نزدیکی $\delta(\underline{X})$ به θ را با تابع زیان $L(\theta,\delta(\underline{X}))$ نمایش می‌دهیم. معمولاً $L(\theta,\delta(\underline{X})) \geq 0$ و $L(\theta,\delta(\underline{X})) = 0$ اگر و فقط اگر با احتمال یک $\delta(\underline{X}) = \theta$ باشد. تابع زیان تابعی از نمونه تصادفی و لذا متغیری تصادفی است. امید ریاضی تابع زیان را تابع مخاطره گویند و به‌صورت زیر نمایش می‌دهند

$$R(\theta,\delta) = E[L(\theta,\delta(\underline{X}))]$$

کلاس کلیه‌ی براوردگرها را با D نمایش می‌دهند. در براوردیابی می‌خواهیم براوردگر $\delta(\underline{X}) \in D$ را چنان پیدا کنیم که مخاطره آن در بین تمام براوردگرها متعلق به D مینیمم باشد. اما متاسفانه مینیمم کردن تابع مخاطره برای هر $\theta \in \Theta$ امکان پذیر نیست. برای حل مسئله می‌توان از دو روش محدود کردن و یا برقرار کردن یک رابطه ترتیب در بین براوردگرها بهره جست. از جمله روش‌ها در محدود سازی براوردگرها، نااریبی و پایایی است و از جمله روش‌های برقراری ترتیب روش بیز و مینیماکس است.

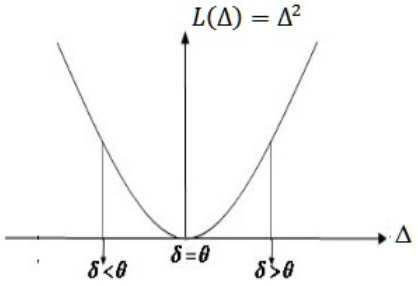
در ادامه این فصل این مفاهیم را با تکیه بر براوردیابی پارامتر جامعه‌ی گزینش شده (که یک پارامتر تصادفی است) به‌طور مختصر بررسی می‌کنیم. قبل از بررسی این مفاهیم ابتدا چند تابع زیان مورد استفاده در این پایان نامه را معرفی می‌کنیم.

۲-۱-۱ تابع زیان توان دوم خطا

تابع زیان توان دوم خطا عبارت است از

$$L(\theta,\delta(\underline{X})) = (\delta(\underline{X}) - \theta)^{۲} \qquad (۲-۱-۱)$$

تابع زیان توان دوم خطا، تابعی متقارن نسبت به $\Delta = \delta - \theta$ است. در این تابع زیان برای بیش براوردی و کم براوردی به یک اندازه زیان متحمل می‌شویم. نمودار این تابع زیان در شکل ۲-۱ رسم شده است.



شکل ۲-۱: نمودار تابع زیان توان دوم خطا

در بسیاری از مسایل کاربردی ما با شرایطی روبرو هستیم که خطای بیش براورد و کم براورد برای ما ارزش یکسانی ندارد. در ادامه دو تابع زیان نامتقارن که در این پایان نامه مورد استفاده می‌گردند را معرفی می‌کنیم.

۲-۱-۲ تابع زیان لاینکس

این تابع زیان، یک تابع زیان نامتقارن است که در یک طرف صفر دارای رشد خطی و در طرف دیگر دارای رشد نمایی است. به همین دلیل خطای کم براورد و بیش براورد آن یکسان نیست. برای مثال، در مسئله براورد مقدار سوخت یك هواپیما بیش براورد کردن مهم‌تر از کم براورد کردن است، چون برای کم براورد کردن باید خسارت گزافی را متحمل شد. شکل این تابع زیان به‌صورت