بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

بررسی تعمیم‌های روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل تاخیری

استاد راهنما:

دکتر سید محمد مهدی حسینی

استاد مشاور:

دکتر فرید(محمد) مالک قایینی

پژوهش و نگارش:

محمد ابوالحسنی ابرقویی

مهر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

تمام ستارگان آسمان زندگی‌ام
به‌ویژه آن دو خورشید درخشان

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

باید خواست که رسید، خواستنی به قدرت عشق، عشقی به وسعت ایمان، ایمانی به عمق هستی که هستی همه عشق است و عشق همه او و او همه چیز و چیزی نیست غیر او و چیزی نیست غیر از خواستن برای رسیدن به او، به نام او، به نام او که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به فضل الهی توانسته‌ام در منزلی دیگر از منازل تحصیل، خوشه‌چین میوه‌هایی جان‌بخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی استادان گرانقدر، از آنان قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی استاد راهنمای بزرگوارم که انجام و تدوین این پایان‌نامه را از آغاز تا پایان مرهون راهنمایی‌ها و الطاف بی‌دریغ این استاد گرانقدر می‌دانم، کمال تشکر و قدردانی را دارم. هم‌چنین از استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر فرید(محمد) مالک قایینی به‌خاطر زحمات فراوان و راهنمایی‌های روشن‌گرانه صمیمانه سپاسگزارم.

سزاوار است از استادان بزرگوار جناب آقایان دکتر قاسم برید لقمانی و دکتر محمدرضا هوشمند اصل به خاطر پیشنهادات دلسوزانه و قبول داوری این پایان‌نامه تشکر و قدردانی‌کنم. از دوستان عزیز و هم‌کلاسی‌های گرانقدرم که همواره در کنارم بوده و گذران زندگی تحصیلی‌ام را با خاطرات خوش از ایشان به یادگار دارم، قدردانی می‌نمایم. هم‌چنین تشکر ویژه خود را به سرکار خانم عابدینی و سرکار خانم عباسی زاده تقدیم می‌کنم.

در پایان از لطف همیشگی خانواده عزیزم که بدون حمایت‌ها و دلگرمی‌های آنان رسیدن به این مرحله از زندگی برایم ناممکن بود، خالصانه سپاسگزارم و از خداوند خواستارم توفیق جبران قطره‌ای هر چند اندک از مهربانی‌هایشان را به من عطا فرماید.

محمد ابوالحسنی ابرقویی

مهرماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا برخی تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مربوط به روش اختلال هموتوپی را بیان و معادلات دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم، پس از آن روش اختلال هموتوپی و اصلاحات آن را برای معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار می‌بریم. در ادامه یک روش اختلال هموتوپی اصلاح‌شده را برای معادلات ساین - گوردون بیان کرده و پس از آن معادلات دیفرانسیل تاخیری و چگونگی استفاده از روش اختلال هموتوپی استاندارد و اصلاح‌شده را برای حل این نوع معادلات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در مطالعه این پایان‌نامه مورد نیاز هستند، اشاره می‌کنیم. ابتدا با تعریف فضای توپولوژیک به بیان مفهوم هموتوپی در توپولوژی پرداخته و در ادامه با معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزیی و معادلات دیفرانسیل تاخیری آشنا می‌شویم.

۲.۱ توپولوژی و هموتوپی

در این بخش با مفهوم توپولوژیکی هموتوپی آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد، تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow R$ را یک نرم گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر x در X، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر x در X و هر اسکالر α، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر x و y در X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار گوییم. همچنین اگر این فضا با متر تعریف شده به وسیله‌ی $d(x, y) = \|x - y\|$ تام باشد، آن را فضای باناخ[1] گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. یک توپولوژی روی یک مجموعه ناتهی X، گردایه‌ای ناتهی چون τ از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف : X و ϕ عضو τ هستند،

ب : اجتماع هر زیر گردایه دلخواه از اعضای τ عضو τ است،

ج : اشتراک هر زیر گردایه‌ی متناهی از اعضای τ به τ تعلق دارد.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ، یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود به‌علاوه فضای X با توپولوژی τ را با (X, τ) نمایش می‌دهیم. عناصر τ را زیر مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت پیوسته گویند هرگاه به ازای هر زیر مجموعه‌ی باز Y مانند p، مجموعه‌ی $f^{-1}(p)$ در X باز باشد.

[1] Banach space

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $I = [\circ, ۱]$ بازه‌ی واحد حقیقی، X و Y فضاهای توپولوژیک و $f_۱$ و $f_۲$ دو نگاشت پیوسته از X بتوی Y باشند. اگر نگاشت پیوسته‌ای چون $F : I \times X \longrightarrow Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر عضو X داشته باشیم :

$$F(\circ, x) = f_۱(x), \qquad F(۱, x) = f_۲(x)$$

آنگاه نگاشت‌های $f_۱$ و $f_۲$ را هموتوپ و نگاشت F را یک هوموتوپی بین $f_۱$ و $f_۲$ می‌گوییم و در ضمن هموتوپ بودن $f_۱$ و $f_۲$ را با $f_۱ \sim f_۲$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر هر هموتوپی، یک خانواده تک پارامتری از توابع پیوسته تعریف شده از فضای X به‌توی Y است. اگر t پارامتر معرف زمان باشد، هنگامی که زمان از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، هوموتوپی F نمایشگر دگر شکلی (تغییر شکل) پیوسته‌ی $f_۱$ به $f_۲$ است.

لم ۱.۲.۱. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه هم ارزی است.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم سه خصوصیت رابطه هم ارزی برقرار است.
الف : به ازای هر تابع مفروض مانند f قرار می‌دهیم $F(t,x) = f(x), \circ \leq t \leq ۱$. بنابراین $f \sim f$.
ب : فرض کنید $f_۱ \sim f_۲$ و F هموتوپی بین $f_۱$ و $f_۲$ باشد. حال قرار می‌دهیم

$$G(t, x) = F(۱ - t, x), \qquad \circ \leq t \leq ۱,$$

در این صورت G یک هوموتوپی بین $f_۱$ و $f_۲$ است، یعنی $f_۲ \sim f_۱$.
ج : فرض کنیم $f_۱ \sim f_۲$ با هموتوپی $F_۱$ و $f_۲ \sim f_۳$ با هموتوپی $F_۲$، نشان می‌دهیم که $f_۱ \sim f_۳$.
برای این کار کافی است نگاشت $G : I \times X \longrightarrow Y$ را به‌صورت

$$G(t, x) = \begin{cases} F_۱(۲t, x), & \circ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ F_۲(۲t - ۱, x), & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف کنیم، واضح است که $f_۱ \sim f_۳$ با هموتوپی G. □

برای آشنایی بیشتر با هموتوپی‌ها، اکنون یک حالت خاص را که در آن f یک راه در X است، در نظر می‌گیریم.

تعریف ۶.۲.۱. اگر $f : [\circ, ۱] \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که

$$f(\circ) = x_\circ, \quad f(۱) = x_۱, \tag{۱.۲.۱}$$

گوییم f در X، یک راه از $x_\circ$ به $x_۱$ است. همچنین $x_\circ$ را نقطه‌ی آغازی و $x_۱$ را نقطه‌ی انجامی راه f می‌نامیم.

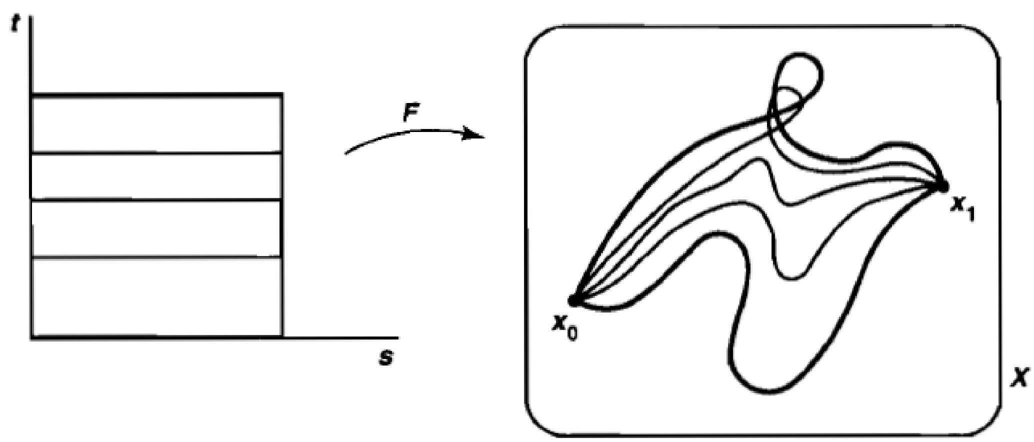
می‌توان بین راه‌ها در X، هموتوپی خاصی موسوم به هموتوپی راهی تعریف کرد.

تعریف ۷.۲.۱. راه‌های f_1 و f_2 را در X که بازه‌ی $I = [0, 1]$ را بتوی X می‌نگارند هموتوپ راهی می‌نامیم، هرگاه هر دو دارای نقطه‌ی آغازی x_0 و نقطه‌ی انجامی x_1 باشند و نگاشت پیوسته‌ای مانند $F : I \times I \to X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر s و t از I روابط

$$F(s, 0) = f_1(s), \quad F(s, 1) = f_2(s) \tag{۲.۲.۱}$$

$$F(0, t) = x_0, \quad F(1, t) = x_1 \tag{۳.۲.۱}$$

برقرار باشند. F را هموتوپی راهی[1] بین f_1 و f_2 می‌نامیم. اگر f_1 و f_2 هموتوپ راهی باشند، می‌نویسیم $f_1 \simeq_p f_2$ (شکل (۱.۲.۱)).



شکل ۱.۲.۱ : نمایش هموتوپی راهی بین f_1 و f_2 [۲۰].

در تعریف (۷.۲.۱) شرط (۲.۲.۱) در واقع هوموتوپ بودن f_1 و f_2 را بیان می‌کند و شرط (۳.۲.۱) بیانگر این است که به ازای هر t، نگاشت $s \longmapsto F(s,t)$ یک راه از x_0 به x_1 است. به عبارت دیگر شرط اول حاکی از این است که F نمایشگر یک دگردیسی پیوسته است که راه f_1 را به f_2 می‌نگارد و شرط دوم بیانگر ثابت ماندن نقاط انتهایی راه‌ها در این دگردیسی است.

لم ۲.۲.۱. رابطه‌ی $\simeq_p$ یک رابطه‌ی هم ارزی است.

برهان. مشابه لم (۱.۲.۱). $\square$

[1] Path homotopy

برای آشنایی بیشتر با هموتوپی‌ها، یک نوع هموتوپی ساده ولی در عین حال پر کاربرد را در مثال زیر معرفی می‌کنیم.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنیم $f_۱$ و $f_۲$ دو نگاشت از X به‌توی Y باشند. قرار می‌دهیم:

$$F(t,x) = tf_۱(x) + (۱-t)f_۲(x)$$

واضح است که F یک هموتوپی بین $f_۱$ و $f_۲$ است. هموتوپی F، هموتوپی مستقیم الخط و در برخی مواقع هموتوپی محدب نامیده می‌شود.

۳.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۳.۱. اگر y تابعی مجهول از متغیر مستقل x و $y^{(n)}$ نمایش مشتق مرتبه‌ی nام آن باشد، آنگاه معادله‌ی

$$f(x,y,y',...,y^{(n)}) = ۰ \qquad (۴.۳.۱)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی[۱] (ODE) نامیده می‌شود.

منظور از مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در آن معادله است، بنابراین معادله‌ی (۴.۳.۱) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n است.

تعریف ۲.۳.۱. اگر در رابطه‌ی (۴.۳.۱) بتوانیم تابع f را به صورت یک ترکیب خطی از مشتقات y، یعنی به شکل

$$y^n(x) = \sum_{i=۰}^{n-۱} a_i(x)y^{(i)}(x) + r(x) \qquad (۵.۳.۱)$$

بنویسیم، که در آن $r(x)$ و $a_i(x)$ها توابعی معلوم از x هستند، معادله‌ی دیفرانسیل (۴.۳.۱) راخطی و در غیر این صورت غیرخطی می‌نامیم. اگر $r(x) = ۰$ این معادله همگن و اگر $r(x) \neq ۰$ این معادله غیر همگن نامیده می‌شود. معمولا معادله‌های دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان به کمک روش‌های تحلیلی حل کرد، اما بیشتر معادله‌های دیفرانسیل معمولی مطرح در کاربردها غیرخطی هستند و نمی‌توان جواب دقیق آنها را محاسبه کرد. برای حل این دسته از مسائل روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. متداول‌ترین معادله‌های دیفرانسیل معمولی، از مرتبه اول و دوم هستند. به عنوان مثال، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی ناهمگن به صورت

$$y'' = h(x)y'(x) + g(x)y(x) + f(x) \qquad (۶.۳.۱)$$

---

[۱] Ordinary Differential Equation

است که به شرط پیوستگی توابع $f(x)$، $g(x)$ و$h(x)$ به ازای هر شرط اولیه $y(a)=\alpha$ و$y'(a)=\beta$ جواب یکتا دارد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر به معادله‌ی(۶.۳.۱) شرایط اولیه $y(a)=\alpha$ و $y'(a)=\beta$ را اضافه کنیم (a ، α وβ اعداد حقیقی داده‌شده هستند)، مساله‌ی حاصل یک مساله‌ی مقدار اولیه[۱](IVP) نامیده می‌شود.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل جزئی

تعریف ۱.۴.۱. چنانچه در معادله دیفرانسیل تابع چند متغیره همراه با مشتقات آن ظاهر شده باشد آن را معادله‌ی دیفرانسیل جزئی[۲](PDE) می‌نامیم.

این نوع معادلات در فرمول‌بندی مسائل شامل توابع چند متغیره مانند مسائل انتشار صوت یا حرارت، الکترو استاتیک و الکترودینامیک به وجود می‌آیند . به عنوان مثال معادله‌های زیر

$$\frac{\partial^۲ u(x,t)}{\partial t^۲}+\frac{\partial^۲ u(x,t)}{\partial x\partial t} = ۴x^۲t \qquad (۷.۴.۱)$$

$$\frac{\partial^۲ u(x,t)}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u(x,t)}{\partial t^۲} = ۰ \qquad (۸.۴.۱)$$

نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل جزئی هستند.

۵.۱ معادلات دیفرانسیل تاخیری

معادلات دیفرانسیل از نوع

$$u^m(t)=\sum_{j=۰}^{J}\sum_{k=۰}^{m-۱}\mu_{jk}(t)u^{(k)}(\alpha_{jk}t+\beta_{jk})+g(u)+f(t) \qquad (۹.۵.۱)$$

با شرایط اولیه‌ی

$$\sum_{k=۰}^{m-۱}c_{ik}u^{(k)}(۰)=\lambda_i \qquad i=۰,۱,\cdots,m-۱$$

که

$$g(u)=bu+\sum_{i=۱}^{l}d_iu^{\gamma_i},\quad d_i\in R,\quad \gamma_i\in N,\quad \gamma_i>۱,\quad l\in N,\quad ۰\le\alpha_{jk}\le۱,\quad \beta_{jk}\in R,$$

---

[۱] Intial Value Problem

[۲] Partial Differential Equation

و $u^{(m)}$ مشتق mام تابع u می‌باشد را معادلات دیفرانسیل تاخیری [۳] (DDE) نامند. به عنوان مثال معادله‌ی زیر یک معادله‌ی تاخیری است:

$$u^{'}(t) = -u(t) + \frac{۱}{۲}u(\frac{t}{۲}) + \frac{۱}{۲}u^{'}(\frac{t}{۲}).$$

[۳] Delay Differential Equation

فصل ۲

بررسی اصلاحات روش اختلال هموتوپی و به‌کارگیری آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی روش اختلال هموتوپی پرداخته و پس از آن اصلاحات روش اختلال هموتوپی را برای معادلات دیفرانسل معمولی، دستگاه معادلات دیفرانسل معمولی و معادلات دیفرانسیل نوسانی غیرخطی بیان می‌کنیم.

۲.۲ روش تحلیلی اختلال هموتوپی

در دو دهه‌ی اخیر همراه با گسترش سریع علوم غیرخطی، استقبال گسترده‌ای در میان دانشمندان و مهندسان نسبت به روش‌های تحلیلی حل معادلات غیرخطی به وجود آمده است. یکی از روش‌هایی که به طور گسترده، برای حل این گونه مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش اختلال[۱] است، اما مانند سایر روش‌های تحلیلی، این روش هم دارای برخی محدودیت‌ها می‌باشد. اولین محدودیت این روش‌ها این است که اغلب روش‌های اختلالی بر اساس وجود یک پارامتر کوچک، موسوم به پارامتر اختلال، در مساله تعریف می‌شوند[۲۱]. همان طور که می‌دانیم بیشتر مسائل غیرخطی فاقد پارامتر اختلال هستند و همین امر کاربرد روش‌های اختلال را محدود می‌کند. به علاوه تعیین این پارامتر فن خاصی است که نیاز به تکنیک‌های ویژه‌ایی دارد. انتخاب مناسب پارامتر اختلال منجر به محاسبه‌ی جواب‌های مطلوب می‌شود، در حالی که انتخاب نامناسب این پارامتر اثرات بدی روی جواب می‌گذارد. از دیگر مشکلات این روش‌ها این است که حتی اگر یک مساله دارای پارامتر اختلال باشد، جواب اختلالی تنها برای مقادیر کوچک پارامتر اختلال معتبر است. در سال ۱۹۹۷ یک ریاضیدان چینی به نام جی‌هان‌هی[۲]با ترکیب روش‌های اختلالی با هموتوپی در توپولوژی، روش اختلال هموتوپی (HPM) را معرفی کرد. این روش بدون اتکا به وجود پارامتر اختلال با تبدیل مساله‌ی غیرخطی به یک فرم ساده‌ی خطی، جواب این گونه مسائل را در قالب یک سری همگرا محاسبه می‌کند.

روش اختلال هموتوپی با وجود این که برای حل مسائل غیرخطی معرفی شد قابلیت کاربرد در سایر زیر شاخه‌های معادلات دیفرانسیل را نیز دارد.

[۱] Perturbation Method

[۲] J-Hun-He

۱.۲.۲ ایده‌ی اصلی روش اختلال هموتوپی (HPM)

برای آشنایی با ایده‌ی اساسی روش اختلال هموتوپی معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی

$$A(u) - f(r) = \circ\ , \qquad r \in \Omega \tag{۱.۲.۲}$$

را با شرایط مرزی

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial r}) = \circ\ , \qquad r \in \Gamma \tag{۲.۲.۲}$$

در نظر بگیرید که در آن A عملگر دیفرانسیل، B عملگر مرزی، $f(r)$ یک تابع پیوسته معلوم و Γ مرز ناحیهΩ است.

به طور کلی می‌توان عملگر A را به دو قسمت L و N تقسیم کرد که به ترتیب قسمت‌های خطی و غیرخطی A هستند. با این تقسیم‌بندی معادله‌ی (۱.۲.۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$L(u) + N(u) - f(r) = \circ, \tag{۳.۲.۲}$$

با استفاده از روش هموتوپی پیشنهاد شده توسط لیائو[۱] [۱۵] و لی‌یو[۲] [۱۶]، هموتوپی

$$H(v,p) : \Omega \times [\circ, ۱] \to R,$$

را طوری می‌سازیم که در یکی از رابطه‌های

$$H(\nu,p) = (۱-p)[L(\nu) - L(u_\circ)] + p[A(\nu) - f(r)] = \circ, \tag{۴.۲.۲}$$

یا

$$H(\nu,p) = L(\nu) - L(u_\circ) + pL(u_\circ) + p[N(\nu) - f(r)] = \circ, \tag{۵.۲.۲}$$

صدق کند. $p \in [\circ, ۱]$ پارامتر جانشانی و $u_\circ$ تقریب اولیه‌ی جواب معادله‌ی (۱.۲.۲) است که در شرایط مرزی صدق می‌کند.

به ترتیب از معادله‌های (۴.۲.۲) و (۵.۲.۲) داریم:

$$H(\nu,\circ) = L(\nu) - L(u_\circ) = \circ, \tag{۶.۲.۲}$$

و

$$H(\nu,۱) = A(\nu) - f(r) = \circ. \tag{۷.۲.۲}$$

---
[۱] Liao
[۲] Liu

طبق روابط اخیر معادله‌های (۴.۲.۲) و (۵.۲.۲) در $p=\circ$ و $p=۱$ به ترتیب خطی و غیرخطی هستند. بنابراین وقتی پارامتر جانشانی p از صفر تا یک تغییر می‌کند، معادله‌ی بدیهی $L(\nu)-L(u_\circ)=\circ$ به طور پیوسته به معادله‌ی $A(\nu)-f(r)=\circ$ تغییر شکل می‌دهد در توپولوژی به این فرایند دگرشکلی [۱] و به $L(\nu)-L(u_\circ)$ و $A(\nu)-f(r)$ هموتوپیک می‌گویند.

در روش اختلال هموتوپی مانند روش‌های اختلالی دیگر، فرض می‌کنیم که جواب معادله‌ی (۴.۲.۲) یا (۵.۲.۲) را می‌توان به شکل یک سری توانی از پارامتر جانشانی p به صورت زیر نمایش داد:

$$\nu=\nu_\circ+p\nu_۱+p^۲\nu_۲+\cdots. \qquad (۸.۲.۲)$$

بنابراین جواب تقریبی معادله‌ی (۱.۲.۲) با قرار دادن $p=۱$ در رابطه‌ی (۸.۲.۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u=\lim_{p\to ۱}\nu=\nu_\circ+\nu_۱+\nu_۲+\cdots, \qquad (۹.۲.۲)$$

که این سری در بیشتر مواقع همگراست. هی برای تضمین همگرایی نکات زیر را برای تعیین عملگر غیرخطی مطرح کرد :

۱) مشتق مرتبه دوم $N(v)$ نسبت به v باید مقدار کوچکی باشد زیرا ممکن است پارامتر جانشانی نسبتا بزرگ شود.

۲) نرم $L^{-۱}\dfrac{\partial N}{\partial v}$ باید کمتر از یک باشد تا سری همگرا شود.

اما برای اثبات همگرایی از قضیه زیر استفاده می‌کنیم :

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ (فضای نرم‌دار کامل) و $N:X\to X$ یک تابع انقباضی باشد. یعنی :

$$\forall v,v^*\epsilon X;\quad \| N(v)-N(v^*)\|\leq \delta \| v-v^*\|,\qquad \circ<\delta<۱. \qquad (۱۰.۲.۲)$$

طبق قضیه نقطه ثابت انقباض باناخ یک نقطه مانند u وجود دارد که $N(u)=u$.

اکنون دنباله تولید شده به‌وسیله روش اختلال هموتوپی را به صورت زیر در نظر گرفته :

$$V_n=N(V_{n-۱}),\quad V_{n-۱}=\sum_{i=\circ}^{n-۱}u_i,\quad n=۱,۲,۳,\cdots \qquad (۱۱.۲.۲)$$

و فرض می‌کنیم :

$$B_r(u)=\{u^*\epsilon X\mid \ \| u^*-u\|<r\},\quad V_\circ=v_\circ=u_\circ\in B_r(u), \qquad (۱۲.۲.۲)$$

در نتیجه روابط زیر برقرارند :

۱) $\| V_n-u\|\leq \delta^n \| v_\circ-u\|,$

[۱] Deformation

$$V_n \epsilon B_r(u),$$ (۲

$$\lim_{n\to\infty} V_n = u,$$ (۳

اثبات ۱) بااستقراء روی n و برای $n = ۱$ داریم :

$$\| V_۱ - u \| = \| N(V_\circ) - N(u) \| \leq \delta \| v_\circ - u \|,$$

$$\vdots$$

$$\| V_{n-۱} - u \| = \delta^{n-۱} \| v_\circ - u \| \leq \delta \| V_{n-۱} - u \| \leq \delta\delta^{n-۱} \| v_\circ - u \| = \delta^n \| v_\circ - u \| .$$

۲) با استفاده از قسمت اول داریم :

$$\| V_{n-۱} - u \| \leq \delta^n \| v_\circ - u \| \leq \delta^n \delta < \delta \Longrightarrow V_n \epsilon B_r(u).$$

۳) چون

$$\| V_n - u \| \leq \delta^n \| v_\circ - u \|, \quad \lim_{n\to\infty} \delta^n = \circ,$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \| V_n - u \| = \circ \longrightarrow \lim_{n\to\infty} V_n = u.$$ □

روش اختلال هموتوپی محدودیت‌های روش‌های اختلالی رایج را ندارد و از طرف دیگر، به طور کامل از روش‌های اختلالی بهره می‌گیرد.
برای روشن شدن این مطلب به بیان مثالی در این زمینه می‌پردازیم.

مثال ۱.۲.۲. معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی،

$$Y' + Y^۲ = \circ, \quad Y(\circ) = ۱, \quad x \geq \circ, \tag{۱۳.۲.۲}$$

را با جواب دقیق $Y(x) = \frac{۱}{۱+x}$، در نظر بگیرید[۱۱]. مطابق روابط (۴.۲.۲) و (۵.۲.۲) هموتوپی $H : \Omega \times [\circ, ۱] \longrightarrow R$، را طوری می‌سازیم، که در رابطه‌ی

$$(۱ - p)\left[Y' - y'_\circ\right] + p\left[Y' + Y^۲\right] = \circ, \tag{۱۴.۲.۲}$$

یا

$$Y' - y'_\circ + p y'_\circ + pY^۲ = \circ, \tag{۱۵.۲.۲}$$

با در نظر گرفتن تقریب اولیه‌ی $y_0 = 1$، رابطه‌ی (۱۵.۲.۲)، به صورت زیر درمی‌آید.

$$Y' + pY^2 = 0. \tag{۱۶.۲.۲}$$

فرض می‌کنیم جواب معادله‌ی (۱۶.۲.۲) به صورت زیر باشد.

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \cdots \tag{۱۷.۲.۲}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۷.۲.۲) در رابطه‌ی (۱۶.۲.۲) داریم:

$$\left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + \cdots\right)' + p\left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 \cdots\right)^2 = 0. \tag{۱۸.۲.۲}$$

شرط اولیه‌ی معادله‌ی (۱۸.۲.۲)، به صورت زیر می‌باشد.

$$\left[Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + \cdots\right](0) = 1. \tag{۱۹.۲.۲}$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان p، در طرفین روابط (۱۸.۲.۲) و (۱۹.۲.۲)، داریم:

$$p^0 : \begin{cases} Y_0' = 0 \\ Y_0(0) = 1 \end{cases}$$

$$p^1 : \begin{cases} Y_1' + Y_0^2 = 0 \\ Y_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^2 : \begin{cases} Y_2' + 2Y_0Y_1 = 0 \\ Y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^3 : \begin{cases} Y_3' + {Y_1}^2 + 2Y_0Y_2 = 0 \\ Y_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

با حل معادلات بدست آمده نتایج زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1, \\ Y_1 &= -x, \\ Y_2 &= x^2, \\ Y_3 &= -x^3, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{۲۰.۲.۲}$$