دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

عنوان

تحقیقی بر بعد کرول در مدول ها

از :

فاطمه خلیفه

استاد راهنما :

دکتر حبیب اله انصاری طرقی

(شهریور ماه 1389)

تقدیم به :

خانواده صبور و مهربانم

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و تشکر

اکنون که به یاری خداوند متعال و در ظل توجهات نبی اکرم(ص) و ائمه اطهار و در سایه عنایات حضرت ولی عصر (عج) موفق به انجام این پایان نامه شده ام، وظیفه خود می دانم که از زحمات ، حمایتها و کمکهای بی شائبه خانواده و اساتید محترم خود تشکر و قدر دانی نماییم. از خانواده ام که همواره در تمام مراحل زندگی و انجام این پایان نامه مرا یاری کرده اند سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی، استاد بزرگوارم که در تمام مراحل تحصیل چه در طول کارشناسی و چه در کارشناسی ارشد همواره راهنمای من بوده اند ودر طول نگارش این پایان نامه مرا یاری نموده اند ومشوق من در کارهای پژوهشی بوده و هستند کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی برای راهنمای های مفیدشان در تمام طول تحصیلم بی نهایت سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر منصور هاشمی که در دوره کارشناسی دید جدیدی از ریاضی را به آموختند بسیار سپاسگزارم.

از دکتر اسماعیل انصاری و دکتر ورسه ای به خاطر اینکه همواره حامی من بوده اند و افق جدیدی از زندگی را مقابلم گشوده کمال تشکر را دارم. در پایان بر خود واجب می دانم از خانم فرشادی فر که در نگارش این پایان نامه مرا یاری نموده اند تشکر و سپاسگزاری نماییم.

فهرست مطالب

چکیده

تحقیقی بر بعد کرول در مدول ها

فاطمه خلیفه

در این پایان نامه رابطه بین زیرمدول های اول و ماکزیمال بودن یک زیرمدول از دیدگاه های مختلف و شرایط زنجیر افزایشی و کاهشی روی زیر مدول ها و تعمیم بعد کلاسیک کرول مربوط به آنها را از منابع [4] و [7] مورد مطالعه قرار می دهیم.

کلید واژه: زیرمدول های اول، بعد اول، بعد کلاسیک کرول، واقعاً ماکزیمال، اول واقعاً ماکزیمال، واقعاً نوتری، واقعاً آرتینی و مدول های ضربی.

Abstract

On the krull dimention of modules

Fateme khalife

In this thesis, we study and explain in details the relation between prime submodules and maximal submodules from refrence[4], [7]. Furthermore, the ascending chain(resp.descending) condition of submodules and the generalization of classical krull will be studied.

Keywords: Prime submodules, prime dimension, classical krull dimension, virtually maximal, virtually notherian, virtually artinian, multiplication modules.

مقدمه

بعد کلاسیک کرول برای اولین بار برای حلقه های جابجایی نوتری مطرح شد که با شمردن طول زنجیر از ایده آل های حلقه محاسبه می شد. سپس Krause در [12] حلقه ها با بعد کلاسیک کرول نامتناهی را متمایز کرد. بعد کلاسیک کرول به مفهوم کنونی برای یک مجموعه دلخواه با رابطه ترتیبی $(X,\leq)$ توسط Albu در[2] و در مقالات اخیر توسط Albu ، Krause و Teply در [1] بدین ترتیب تعریف شده است که اگر $a\geq 0$ یک عدد ترتیبی باشد زیر مجموعه X_a از X را به صورت بازگشتی تعریف میکنیم. $X_{-1}=\emptyset$ و اگر X_b برای $b\prec a$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$:X_a:=\{x\in X:\forall y\in X,\quad x\prec y\Rightarrow y\in\bigcup_{b\prec a}X_b\}$$

در تعمیم بعد کرول روی مدول ها مفهوم بعد اول از یک مدول توسط Marcelo و Masque در[2] معرفی شد. بعد اول از یک مدول سوپریمم طول زنجیر زیرمدول های اول یک مدول تعریف می شود.

اخیراً بعد کلاسیک کرول مدول ها توسط Behboodi تعریف شده است که این تعریف جدید همان تعریف Albu با رابطه ترتیبی شمول قوی $(\prec_S)$ روی زیرمدول های اول یک مدول می باشد.

در فصل اول این مقاله مفهوم زیرمدول های واقعاً ماکزیمال را بیان کرده و رابطه بین زیرمدول های اول، واقعاً ماکزیمال، اول واقعاً ماکزیمال و ماکزیمال را بیان می کنیم. در فصل دوم زنجیر افزایشی قوی(کاهشی قوی) را تعریف کرده و به بررسی مدول های واقعاً نوتری (واقعاً آرتینی) می پردازیم. در فصل سوم ابتدا زیرمدول خاصی از یک مدول را تعریف و در ادامه بعد کلاسیک کرول یک حلقه را یادآوری کرده و این مفهوم را به کمک تعاریف و قضایای ارا ئه شده در فصل اول و دوم روی مدولها تعمیم می دهیم و مدول هایی را که بعد کلاسیک آنها صفر است بیان می کنیم. در فصل چهارم مثال های از مدول هایی که بعد کلاسیک کرول آنها 1- است می آوریم. در فصل پنجم قضایای بعد کلاسیک کرول را در حلقه های که ناجابجایی هستند و حلقه هایی خاص ناجابجایی اثبات می کنیم. در فصل ششم بعد کلاسیک کرول مدول های ضربی را به طور مفصل بیان کرده حلقه های جدیدی را بیان می کنیم وبه طور مختصر به بررسی بعضی از خواص آنها می پردازیم و در نهایت در فصل هفتم بعد کلاسیک کرول را برای پوشش انژکتیو یک مدول و بعضی خواص مدول تابی را بررسی می کنیم.

فصل صفر

مقدمه و مطالب پیش نیاز

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه شرکت پذیر با عنصر یکه است و M یک مدول یکانی می باشد.

در این فصل آن دسته از مفاهیم و مطالب و قضایایی که در فصل های بعد به کار گرفته می شود، تحت عنوان تعریف، لم و قضیه بیان می کنیم.

تعریف (۰–1): اگر R حلقه جابجایی باشد، ایده آل P از حلقه R را *اول* گوئیم اگر:

1) $P \neq R$ و 2) برای هر دو ایده آل I, J از R اگر $IJ \subseteq P$، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

تعریف (۰ –2): اگر R حلقه ناجابجایی باشد، ایده آل P از R را *اول* می نامیم هرگاه

1) $P \neq R$ و 2) برای هر دو ایده آل راست(چپ) I, J از R اگر $IJ \subseteq P$، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.(ر.ک.9).

قضیه(۰ –3): هرگاه P یک ایده آل در حلقه R باشد به طوریکه $P \neq R$ و به ازای هر $a, b \in R$ ، اگر $ab \in P$، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$ باشد، آنگاه P اول است. عکس این مطلب در حلقه های جابجای برقرار است.

برهان: (ر.ک. [صفحه197 از10]).

لم (۰ –4): اگر P ایده آل سره حلقه ناجابجایی R باشد، آنگاه P ایده آل اول از R است اگر برای هر $x, y \in R$ به طوری که $xRy \subseteq P$ داشته باشیم $x \in P$ یا $y \in P$.

برهان: (ر.ک. [صفحه23 از9]).

تعریف(0-5): گوییم حلقه R یک حلقه *اول* است اگر ایده آل صفر یک ایده آل اول باشد.(ر.ک.10).

تعریف(۰ –6): ایده آل سره I از حلقه R را یک ایده آل *نیمه اول* می نامیم هرگاه اشتراکی از ایده آل های اول R باشد.

تعریف(۰ –7): حلقه R را یک حلقه *نیمه اول* می نامیم هرگاه (0) یک ایده آل نیمه اول باشد.

قضیه(۰ –8): اگر R یک حلقه جابجایی باشد ، آنگاه ایده آل سره I در R یک ایده آل نیمه اول است اگر و تنها اگر برای هر $x \in R$ اگر $x^2 \in I$، آنگاه $x \in I$.

برهان: (ر.ک. [صفحه27 از9]).

نکته: ایده آل I از حلقه R نیمه اول است اگر وتنها اگر حلقه $\frac{R}{I}$ نیمه اول باشد.

برهان: (ر.ک. [صفحه26 از9]).

قضیه(0-9): ایده آل I از حلقه R یک ایده آل نیمه اول است اگر و تنها اگر برای هر $x\in R$ به طوری که $xRx\in I$، آنگاه $x\in I$.

برهان: (ر.ک.[9]).

تعریف(0–10): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. فرض کنیم N یک $R-$زیرمدول M باشد. در این صورت $\{r\in R : rM\subseteq N\}$ یک ایده آل R است که با نماد $(N:_R M)$ یا $Ann(\frac{M}{N})$ نشان می دهیم بعلاوه $(0:M)$ را پوچساز M می نامیم و با نماد $Ann(M)$ بیان می کنیم. (ر.ک.[20]).

تذکر: برای سهولت معمولاً $(N:_R M)$ را با $(N:M)$ نمایش می دهیم.

تعریف(۰ –11): اگر M یک R-مدول چپ باشد، M را یک مدول *اول* می نامیم اگر برای هر زیرمدول غیرصفر N از M داشته باشیم $Ann(M)=Ann(N)$.

لم(۰ –12): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. R -مدول چپ M یک مدول اول است اگر و تنها اگر برای هر $r\in R, m\in M$ اگر $rm=0$، آنگاه $m=0$ یا $r\in Ann(M)$.

برهان:

$\Leftarrow$) فرض کنیم M یک مدول اول باشد و $rm=0$. اگر فرض کنیم $m=0$، حکم برقرار است. فرض می کنیم $m\neq 0$. چون $rm=0$ و $m\neq 0$ بنابراین $r\in Ann(m)=Ann(Rm)$. از طرفی چون Rm زیر مدول مخالف صفر از مدول اول M می باشد نتیجه می گیریم $Ann(M)=Ann(Rm)$. پس $r\in Ann(M)$.

$\Longrightarrow$) فرض می کنیم N زیرمدول مخالف صفر از M باشد. از آن جایی که $N\neq 0$، $0\neq x\in N$ای موجود است. چون $N\subseteq M$ پس $Ann(M)\subseteq Ann(N)$. حال نشان می دهیم $Ann(N)\subseteq Ann(M)$ به عبارت دیگر فرض می کنیم

$r\in Ann(N)$ و نشان می دهیم $r\in Ann(M)$. اگر $r\in Ann(N)$، آنگاه $rx=0$ برای هر $x\in N\subseteq M$. بنا بر فرض خواهیم داشت $x=0$ که در تناقض با فرض است یا $r\in Ann(M)$ و این یعنی حکم برقرار است.

تعریف(0-13): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. زیر مدول سره N از M را زیرمدول *اول* M می نامیم هرگاه $\frac{M}{N}$ یک مدول اول باشد. یا به طور معادل اگر K یک زیرمدول از M و I ایده آلی از R باشد به طوری که $IK\subseteq N$، آنگاه $K\subseteq N$ یا $IM\subseteq N$.

لم(0-14): زیرمدول سره N از M یک زیر مدول اول است اگر و تنها اگر برای هر $r\in R,m\in M$ اگر $rm\in N$، آنگاه $m\in N$ یا $r\in(N:M)$.

برهان:⇐) فرض کنیم N زیرمدول اول از M باشد. بنابراین $\frac{M}{N}$ یک مدول اول می باشد و بنا به لم(0-12) برای هر $r\in R,\overline{m}\in\frac{M}{N}$ اگر $r\overline{m}=0$ داریم:

$$r\in Ann(\frac{M}{N}) \quad \text{یا} \quad \overline{m}=0$$

از طرفی برای هر $\overline{m}\in\frac{M}{N}$، $m\in M$ای موجود است که $\overline{m}=m+N$ پس خواهیم داشت

$$r(m+N)=0 \Rightarrow \quad m+N=0 \text{ یا } r\in Ann(\frac{M}{N})$$

واین یعنی

$$rm\in N\Rightarrow m\in N \quad \text{یا} \quad r\in Ann(\frac{M}{N})=(N:M).$$

⇒) نشان می دهیم $\frac{M}{N}$ یک مدول اول است. یعنی برای هر $r\in R,\overline{m}\in\frac{M}{N}$ اگر $r\overline{m}=0$، آنگاه $\overline{m}=0$ یا $r\in Ann(\frac{M}{N})$. می دانیم برای هر $\overline{m}\in\frac{M}{N}$، $m\in M$ای موجود است که $\overline{m}=m+N$. بنابراین داریم

$$r\overline{m}=0\Rightarrow r(m+N)=0\Rightarrow rm\in N$$

بنا بر فرض نتیجه می گیریم

$$m\in N \text{ یا } r\in Ann(\frac{M}{N})$$

و این یعنی $\bar{m}=0$ یا $r\in Ann(\frac{M}{N})$.

تعریف(۰ – 15): حلقه R را *ساده* می نامیم اگر $R\neq 0$ و تنها ایده آل های آن R و (0) باشند.

تعریف(0-16): R -مدول چپ M را ساده می نامیم اگر $M\neq 0$ و تنها زیر مدول های M، 0 و خود M باشند.

قضیه(0-17): اگر M یک مدول ساده باشد، آنگاه M یک مدول اول است.

برهان: نشان می دهیم برای هر $r\in R, m\in M$ اگر $rm=0$، آنگاه $m=0$ یا $r\in Ann(M)$. اگر $m=0$ حکم برقرار است. پس فرض می کنیم $m\neq 0$ لذا (m) یک زیر مدول از مدول ساده M می شود به عبارت دیگر $(0)=(m)$ یا $(m)=(M)$. اگر $(0)=(m)$، آنگاه $m=0$ که یک تناقض می باشد پس $(m)=(M)$ بنابراین طبق مفروضات $r\in Ann(m)=Ann(M)$.

تعریف(0-18): زیر مدول سره K از R -مدول M را یک *زیر مدول ماکزیمال* می نامیم اگر به ازای هر زیر مدول L از M که $K\subseteq L\subseteq M$، آنگاه $L=K$ یا $L=M$.

قضیه(۰ –19): فرض کنید M یک مدول روی حلقه تعویض پذیر R باشد. در این صورت M ساده است اگر و تنها اگر با R -مدولی به صورت $\frac{R}{m}$ یکریخت باشد که m یک ایده آل ماکسیمال از R است.

برهان: (ر.ک.[20]).

تعریف (۰–20): فرض کنید $(M_a)_{a\in A}$ یک مجموعه اندیس گذار از زیر مدول های ساده $R-$مدول M باشد. اگر M جمع مستقیم عناصر این مجموعه باشد در این صورت $M=\bigoplus_{a\in A} M_a$ یک تجزیه نیمه ساده از Mاست $R-$مدول M را *نیمه ساده* گوئیم اگر یک تجزیه نیمه ساده داشته باشد. همچنین اگر در این تجزیه تمام جمعوندها با هم ایزوموروف باشند M را *نیمه ساده همگن* می گوئیم.

تعریف (۰ – 21): R -مدول M را هم *نیمه ساده* می نامیم اگر هر زیر مدول آن اشتراکی از زیر مدول های ماکسیمال M باشد. (ر.ک. [صفحه121 از8]).

قضیه (۰ –22): هر زیر مدول و هر مدول خارج قسمتی از یک مدول هم نیمه ساده، هم نیمه ساده است.

برهان: (ر.ک. [18-23، 8]).

لم(۰–23): همواره نمودار زیر را داریم :

M یک مدول هم نیمه ساده است $\Rightarrow$ M یک مدول نیمه ساده است $\Rightarrow$ M یک مدول ساده است

$$\Uparrow$$

M یک مدول نیمه ساده همگن است

برهان: (ر.ک. [صفحه122 از8]).

تذکر: نمودار بالا الزاماً برگشت پذیر نیست. برای مثال حلقه R را حلقه بولی (حلقه ای مانند R که به ازای هر $a\in R$، $a^2=a$)، در نظر بگیرید. در این صورت ${}_RR$ یک مدول هم نیمه ساده است در حالی که نیمه ساده و ساده نمی باشد. (ر.ک. [صفحه122 از8]).

قضیه (۰ –24): فرض کنید M یک Rمدول باشد. آنگاه M یک مدول اول است اگر وتنها اگر برای هر $0\neq m\in M$، $Ann(m)=Ann(M)$.

برهان: (ر.ک.[6،1-2]).

تعریف (۰–25): برای R -مدول چپ M، *سوکَل* $Soc_R(M)$ عبارت است از مجموع زیرمدول های ساده از M. $Soc_R(M)=0$ اگر و تنها اگر M زیر مدول ساده نداشته باشد. و M یک مدول ساده است اگر وتنها اگر $Soc_R(M)=M$.

قضیه (۰ –26): یک R -مدول M نیمه ساده همگن است اگر و تنها اگر $Soc_R(M)\neq 0$ و M یک مدول اول باشد.

برهان: (ر.ک.[1،6-3]).

قضیه (۰ –27) : اگر M یک مدول روی حلقه جابجایی R باشد. M یک مدول نیمه ساده همگن است اگر و تنها اگر هـر زیر مدول M اول هم نیمه ساده باشد.

برهان: (ر.ک.[1,6-10]).

تعریف(۰ –28): R -مدول M را *باوفا* می نامیم اگر $(0:M)=0$.

تعریف(۰ –29): فرض کنیم R یک دامنه صحیح و M یک R -مدول چپ باشد. مجموعه

$$\{\, m\in M\,,\ rm=0 \ \text{که به قسمی دارد وجود}\ 0\neq r\in R\}$$

یک زیرمدول M است که آن را زیرمدول *تابدار* M می نامیم و با $T(M)$ نشـان مـی دهـیم. اگـر $T(M)=M$، M را مدول *تابی* و اگر $T(M)=0$، M را *بی تاب* می نامیم.

تعریف (۰–30): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. R -مدول M را *مدول ضربی* می نامیم اگـر بـرای هـر زیرمـدول N از M یک ایده آل I از R چنان موجود باشد که $N=IM$.

برای مثال هر مدول دوری، ضربی است.(ر.ک.[3]).

قضیه(۰–31): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. اگر M یک R -مدول ضربی باوفا باشد، آنگـاه M متناهیـاً تولیـد شده است اگر و تنها اگر $T(M)$ متناهیاً تولید شده باشد.

برهان: (ر.ک.[3,3-3]).

تعریف(۰–32): فرض کنید M یک مدول راست و $X\subseteq M$ باشد. مجموعـه$\{r\in R:\ xr=0\,,\ x\in X$ بـرای هـر$\}$ را پوچساز *راست* می نامیم و با نماد $r.Ann(X)$ نمایش می دهیم که یک ایده آل راست از R می باشد. پوچسـاز چـپ را بـا نماد $l.Ann(X)$ نشان می دهیم وعبارت است از $\{r\in R:\ rx=0\,,\ x\in X$ برای هر$\}$ که یک ایده آل چپ از R مـی باشد.

تذکر: اگر X زیر مدولی از M باشد. آنگاه $Ann(X)$ یک ایده آل دو طرفه از می باشد.. (ر.ک. [صفحه31 از9]).

قضیه(0-33): فرض کنید M یک مدول ضربی باوفا باشد. $\frac{M}{PM}$ یک $\frac{R}{P}$ مدول متناهیاً تولید شده بی تاب است برای هر ایده آل اول P از R.

برهان: (ر.ک.[5-3،3]).

قضیه(0-34): اگر M یک R-مدول باشد و N یک زیرمدول اول، آنگاه $(N:M)$ یک ایده آل اول است.

تذکر: عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال اگر M، $\mathbb{Z}$-مدول آزاد $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و $N=(a,0)\mathbb{Z}$ برای عدد صحیح $a>1$ باشند،آنگاه $(N:M)=(0)$ در حالی که زیر N مدول اول نیست. (ر.ک. [14]).

قضیه(0-35): زیرمدول N از M اول است اگر و تنها اگر $P=(N:M)$ یک ایده آل اول از R و $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{P}$-مدول بی تاب باشد.

برهان: (ر.ک.[1-1،17]).

تعریف (۰ –36): یک عنصر را در حلقه R *منظم* می نامیم هرگاه مقسوم علیه صفر نباشد. به طور مثال $R-$مدول صفر هر عنصرش منظم است. (ر.ک. [صفحه87 از9]).

تعریف (۰ –37): R-مدول M را بخش پذیر می نامیم هرگاه برای هر عنصر منظم $r\in R$ داشته باشیم $rM=M$.

نکته: اگر R حوزه صحیح باشد R-مدول M را بخش پذیر می نامیم هرگاه برای هر $0\neq r\in R$ داشته باشیم $rM=M$.

قضیه(0-38): اگر R حوزه صحیح جابجایی باشد، آنگاه هر R-مدول انژکتیو است اگر وتنها اگر بخش پذیر است.

برهان:(ر.ک.[10]).

تعریف (۰–39): اگر N_1, N_2 زیر مدول های M باشند، می گوئیم N_1 *قویاً به طور سره مشمول* در N_2 است و با نماد $N_1\subset_S N_2$ نشان می دهیم اگر $N_1\subset N_2$ و $(N_1:M)\subset(N_2:M)$. می گوئیم $N_1\subseteq_S N_2$ اگر و تنها اگر $N_1=N_2$ یا $N_1\subset_S N_2$.

تعریف (0–40): زیرمدول N از M را *اول ماکزیمال* می نامیم اگر N یک زیرمدول اول از M باشد و زیرمدول اول دیگری مانند K از M موجود نباشد به طوری که $N \subset K$.

تعریف (0-41): زیرمدول N از یک R -مدول M را *اول واقعاً ماکزیمال* می گوئیم اگر زیر مدول N اول باشد و زیرمدول اول دیگری مانند K از M موجود نباشد ، به طوری که $N \subset_S K$.

تعریف (0–42): زیرمدول N از M را *واقعاً ماکزیمال* می نامیم اگر $\dfrac{M}{N}$ یک مدول نیمه ساده همگن باشد.

تعریف(0-43): اگر E, M ، R -مدول باشند می گوییم E یک *توسیع اساسی* از M می باشد اگر به ازای هر زیرمدول ناصفر E چون L داشته باشیم $L \cap M \neq 0$. این معادل است با اینکه M زیر مدول اساسی از E است که با $M \leq_e E$ نمایش می دهیم. به طور مثال $\mathbb{Q}$ یک توسیع اساسی $\mathbb{Z}$ است.

تعریف(0-44): *پوشش انژکتیو* برای M یعنی مدول انژکتیوی که یک توسیع اساسی از M است و با $E(M)$ نمایش داده می شود. به طور مثال توسیع انژکتیو $\frac{\mathbb{Z}}{(P)}$ ، $\mathbb{Z}_{P^\infty}$ می باشد، بعبارت دیگر $E(\frac{\mathbb{Z}}{(P)}) = \mathbb{Z}_{P^\infty}$.

تعریف(0-45): فرض کنید P یک ایده آل اول از حلقه R باشد. P را *ایده آل اول مینیمال* می نامیم هر گاه به طور سره شامل هیچ ایده آل غیر صفر دیگری از R نباشد.

لم(0-46): اگر P یک ایده آل اول از حلقه R باشد، آنگاه P شامل یک ایده آل اول مینیمال از R می باشد.

برهان:(ر.ک. [17]).

تعریف (0–47): حلقه اول R را *کراندار* چپ می نامیم اگر برای هر عنصر منظم $c \in R$ ایده آلی مانند I از R و عنصر منظمی مانند d چنان موجود باشند به طوری که $Rd \subseteq I \subseteq Rc$. به طور مثال همه حلقه های جابجایی کراندار می باشند.

برهان:(ر.ک.[9]).

لم(0-47): حلقه اول R کراندار چپ است اگر و تنها اگر هر ایده آل چپ اساسی R محتوی یک ایده آل چپ غیرصفر باشد.

برهان: (ر.ک. [صفحه133 از9]).

تعریف(0 – 49): خانواده $\{I_j \,:\, j\in J\}$ از ایده آل های چپ R را *مستقل* گوییم مشروط بر اینکـه بـه ازای هـر $k\in J$، $I_k \cap \hat{I}_k = 0$، که در آن $\hat{I}_k$ ایده آل چپ تولید شـده بـه وسـیله $\{I_j \,:\, j\neq k\}$ اسـت. بـه عبـارت دیگـر، $\{I_j \,:\, j\in J\}$ مستقل است اگر و تنها اگر ایده آل چپ I تولید شده به وسیله $\{I_j \,:\, j\in J\}$ مجموع مستقیم داخلـی $I=\sum_{j\in J} I_j$ باشـد.

(ر.ک. [صفحه702 از10]).

تعریف(0–50): حلقه R را حلقه *گولدی* چپ می نامیم اگر

(1) R در شرط زنجیر افزایشی روی پوچسازهای چپ صدق کند.

(2) هر مجموعه مستقل از ایده آل های چپ R، متناهی باشند.

مثال: هر حلقه نوتری چپ یک حلقه گولدی چپ می باشد. (ر.ک. [صفحه504 از10]).

قضیه(0-51): فرض کنید M یک مدول ضربی باوفا باشد. آنگاه M متناهیاً تولید شده اسـت اگـر و تنهـا اگـر $M\neq PM$ برای هر Pایده آل اول مینیمال از R.

برهان:(ر.ک. [4-3،1]).

قضیه (0–52): فرض کنید P یک ایده آل اول در یک حلقه گولدی راست نیمه اول باشد. آنگاه جملات زیر معادلند:

1) P اول مینیمال است.

2) P یک پوچساز راست است.

3) P یک پوچساز چپ است.

4) P شامل هیچ عنصر منظمی نیست.

برهان: (ر.ک.[3-6،9]).

تعریف(0-53): گوییم مدول M در *شرط زنجیر افزایشی*(شـرط زنجیـر کاهشـی) روی زیـر مـدول هـای خـود صـدق مـی کند(نوتری یا acc)(آرتینی یا dcc) اگر به ازای هر زنجیر $N_1\subset N_2\subset N_3\subset\ldots$ ($N_1\supset N_2\supset N_3\supset\ldots$) از زیر مدول های M،

$n\in\mathbb{N}$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر $i\geq n$، $N_i=N_n$.

تعریف(0-54): حلقه R آرتینی چپ (راست) است اگر در شرط زنجیر کاهشی بر ایده آل های چپ(راست) صدق کند.

تذکر: حلقه R آرتینی است اگر آرتینی راست و آرتینی چپ باشد.(ر.ک.[10]).

لم(0-55): حلقه R آرتینی راست (چپ) است اگر وتنها اگر مدول راست R_R (مدول چپ $_R R$) آرتینی باشد.

برهان: (ر.ک. [صفحه53 از9]).

قضیه(0 – 56): فرض کنید R یک حلقه گولدی چپ اول باشد و فرض کنید M یک R -مدول متناهیاً تولید شده باوفا باشد. اگر R کراندار چپ باشد، آنگاه $_R R$ در جمع مستقیم متناهی از کپی های M نشانده می شود.

برهان:(ر.ک.[7-8،9]).

قضیه(0-57): در هر حلقه دلخواه R جملات زیر معادلند:

1) اشتراک همه ایده آل های راست ماکزیمال از R.

2) اشتراک همه ایده آل های چپ ماکزیمال از R.

برهان: (ر.ک.[16-2،9]).

تعریف(0-58): ایده آل تعریف شده به وسیله اشتراک های قضیه فوق را جیکبسن *رادیکال* R می نامیم وبا $J(R)$ نمایش می دهیم. (ر.ک.[ص37،9]).

قضیه (0–59): (Wedder burn Artian) برای حلقه R شرایط زیر معادلند:

1) R آریتنی راست است و $J(R)=0$.

2) R آریتنی چپ است و $J(R)=0$.

3) R نیمه ساده است.

برهان:(ر.ک.[13-3،9]).

تعریف (0 – 60): R -مدول M ، *یکنواخت* است اگر M مخالف صفر باشد و اشتراک هر دو زیر مدول غیرصفر از آن مخالف صفر باشد. یا به طور معادل هر زیر مدول غیر صفر M یک مدول اساسی باشد.

به طور مثال میدان خارج قسمتی از حوزه صحیح جابجایی R یک $R-$مدول یکنواخت است. (ر.ک. [صفحه71 از9 [ ]).

تعریف (0 – 61): Rمدول M را تجزیه پذیر می نامیم اگر زیر مدول های سره L, K، $L, K \neq 0$از M چنان موجود باشند که $M = L \oplus K$.

تذکر: یک مدول را تجزیه ناپذیر می نامیم اگر $M = L \oplus K$، آنگاه $L = 0$ یا $K = 0$. برای مثال $\mathbb{Z}-$مدول $\mathbb{Z}$ تجزیه ناپذیر است.

قضیه (0 –62): یک مدول غیر صفر M، یکنواخت است اگر و تنها اگر $E(M)$ تجزیه ناپذیر باشد.

برهان:(ر.ک. [9،4-10]).

قضیه (0–63): اگر M یک مدول یکنواخت روی حلقه نیمه اول گولدی باشد، آنگاه M تابی است یا بی تاب است.

برهان: (ر.ک.[9،6-3]).

قضیه (0–64): هر مدول ضربی آریتنی ، دوری و نوتری است و طول متناهی دارد.

برهان: (ر.ک.[3، 2-9]).

قضیه (0–65): فرض کنید M_i، $1 \leq i \leq n$ مجموعه ای متناهی از $\mathrm{R}-$مدول های دوری باشد و $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$، آنگاه M مدول ضربی اگر و تنها اگر M دوری باشد.

برهان: (ر.ک. [3،2-4]).

قضیه (0 – 66): فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R -مدول ضربی با تعداد متناهی زیر مدول ماکزیمال باشد. آنگاه M دوری است.

برهان: (ر.ک. [3،2-8]).

قضیه(0-67): فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R-مدول ضربی به طوری که M فقط شامل تعداد متناهی زیرمدول اول مینیمال باشد. آنگاه M متناهیاً تولید شده است.

برهان: (ر.ک. [3،3-7]).

قضیه(0-68): فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R-مدول ضربی مخالف صفر باشد آنگاه:

1) زیرمدول ماکزیمال دارد و هر زیر مدول سره از M مشمول در یک زیرمدول ماکزیمال از M می باشد.

2) K زیرمدول ماکزیمال از M است اگر و تنها اگر ایده آل ماکزیمال P از R چنان موجود باشد که $K = PM \neq M$.

برهان: (ر.ک. [3،2-5]).

تعریف(0-69): زیر مدول سره N از M را *قویاً اول* می نامیم اگر:

(1) $P=\left(N:M\right)$ یک ایده آل اول باشد و $\frac{R}{P}$ یک حلقه گولدی چپ باشد.

(2) $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{P}$-مدول چپ بی تاب باشد.

قضیه(0-70): فرض کنید R یک حلقه و P ایده آل اول به طوری که حلقه $\frac{R}{P}$ کراندار چپ و گولدی چپ بوده و فرض کنید M یک $R-$مدول چپ باشد. آنگاه جملات زیر برای زیرمدول N از M معادلند:

1) N زیر مدول اول از M است به طوری که $P=\left(N:M\right)$.

2) N زیر مدول قویاً اول از M است به طوری که $P=\left(N:M\right)$.

برهان: (ر.ک. [17،12-6]).

قضیه(0-71): فرض کنید M یک $R-$مدول ضربی باشد. زیرمدول N از M اول است اگر و تنها اگر $\left(N:M\right)$ ایده آل اول باشد.

برهان: (ر.ک. [3،2-11]).