بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم، گروه فیزیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش: فیزیک نجوم

عنوان:
کیهانشناسی گاوس بنت در نظریه‌های جهان‌شامه‌ای

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا سپنجی

استاد مشاور:

دکتر شهرام جلال‌زاده

پژوهشگر:

مریم حیدری

زمستان ۱۳۹۰

Islamic Azad University
Central Tehran Branch
Faculty of Science-Department of Physics
M.Sc

Subject:
Brane world cosmology with Gauss-Bonnet interaction

Advisor:
Dr.Hamid Reza Sepanji

Consulting Advisor:
Dr.Shahram Jalalzadeh

By:
Maryam Heidari
Winter 2012

تشکر و قدردانی

از اساتید راهنما و مشاور ارجمندم،آقای دکتر حمیدرضا سپنجی و آقای دکتر شهرام جلال زاده که با زحمتهای بی دریغشان مرا یاری نمودند کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

همچنین از پدر و مادر بزرگوارم و همسر مهربانم که در طی این مسیر مشوق،همراه و همگام من بوده اند تشکر مینمایم.

تقدیم به:

پدر مهربان ومادر دلسوزم

فهرست مطالب

مقدمه ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

فصل اول ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

جهان شامه‌ای..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۱ـ۱ چرایی ابعاد اضافی ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۱ـ۲ نظریه کالوزا ـ کلاین ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۱ـ۳ مدل ارکانی ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۱ـ٤ مدل راندال ـ ساندروم ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۱ـ٤ـ۱ مدل راندال- ساندروم اول (RSI) ..... ***Error! Bookmark not defined.***

۱ـ٤ـ۲ مدل راندال – ساندروم دوم (RSII) ..... ***Error! Bookmark not defined.***

فصل دوم ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

کیهان‌شناسی شامه‌ای ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۲ـ۱ معادلات اینشتین روی شامه ـ۳ ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

فصل سوم..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

کیهان شناسی شامه ای با جمله گاؤس بنت ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

۳ـ۱ مقدمه ای بر جمله گاؤس بنت ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۳ـ۲ پایه گذاری مدل و بدست آوردن معادلات حرکت ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۳ـ۳ حل‌های کیهان شناسی ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

۳ـ٤ میدان اسکالر در شامه ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

فصل چهارم ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

حل‌های مجانبی (آنتی)دوسیتر بدون ثابت کیهان شناسی در گرانش گاؤس بنت ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

٤ـ١ معادلات میدان بدون ثابت کیهانشناسی در گرانش گاؤس بنت ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**
٤ـ٢ حل‌های ایستا ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**
٤ـ٢ـ الف) حل های مجانبی دوسیتر ..... ***Error! Bookmark not defined.***
٤ـ٢ـ ب) حل های مجانبی آنتی دوسیتر ..... ***Error! Bookmark not defined.***
٤ـ٢ـ پ) حل‌های مجانبی تخت ..... ***Error! Bookmark not defined.***
٤ـ٣ حل‌های چرخان ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**
٤ـ٣ـ الف) حل‌های چرخان باردار ..... ***Error! Bookmark not defined.***
٤ـ٣ـ ب) حل‌های مغناطیسی چرخان ..... ***Error! Bookmark not defined.***
٤ـ٤ نکات پایانی ..... **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**
پیوست الف ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
محاسبه معادله انیشتین تصویر شده روی شامه ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست ب ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
وردش کنش گاؤس-بنت نسبت به متریک ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست پ: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
بدست آوردن رابطه (۳-۸) ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست ت: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
وردش اکشن نسبت به میدان الکترومغناطیس $\mathbf{F_{\mu\nu}}$ ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست ث: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
بدست آوردن تانسور الکترومغناطیسی $\mathbf{T_{\mu\nu}}$ ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست ج: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
روش بدست آوردن معادله (۴-۱۰) ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
پیوست چ: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

مؤلفه $T11$ تانسور الكترومغناطيسى ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

چکیده

در این پایان‌نامه گرانش را در ابعاد اضافی با جمله گاؤس بنت بررسی می‌کنیم. جمله گاؤس بنت یکی از جملات مرتبه بالاتر R است که هیچ اثری در چهار بعد ندارد، ولی در پنج بعد صفر نیست و باعث می‌شود که جملات اضافه وارد معادلات میدان شوند. ما به یک مدل جهان شامه‌ای می‌پردازیم که در آن کنش در فضای توده شامل جمله گاؤس بنت نیز می‌باشد. معادلات میدان ناشی از چنین کنشی بر روی شامه را به دست می‌آوریم و سپس با حل کردن آنها جوابها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این جوابها شامل معادله حالتی هستند که در آن فشار منفی است و می‌تواند توصیفی از جهان شتابدار باشد. برای شروع به نظریه‌های ابعاد اضافی می‌پردازیم. جهان شامه‌ای را معرفی می‌کنیم و مدل‌های اولیه جهان شامه‌ای مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس معادلات انیشتین روی شامه را با کمک معادلات گوس-کودازی بدست می‌آوریم. در ادامه جمله تصحیحی گاؤس بنت را به لاگرانژین سیستم اضافه می‌کنیم و اثرات کیهانشناسی مربوط به این جمله را بررسی می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که نظریه گرانش با عبارت گاؤس بنت به معادلات فریدمن معمولی می‌انجامد. یعنی معادلات شبیه به معادلات فضا زمان چهاربعدی هستند. در آخرحل‌های مجانبی دوسیتر، آنتی دوسیتر و تخت را در فضا زمان پنج بعدی بدون استفاده از ثابت کیهانشناسی و با استفاده از ترم گاؤس بنت به دست خواهیم آورد.

مقدمه

با كشف نظريه نسبيت عام، توسط انيشتين در سال‌های 1916-1915 اين امكان فراهم شد كه به بررسی ساختارهای بزرگ مقياس كيهاني در قالب يك نظريه فيزيكی پرداخته شود. بي‌شک نسبيت عام و نظريه مكانيك كوانتومی تاكنون باشكوه‌ترين دست آورد فكری بشر در راه شناخت طبيعت هستند زيرا هردو نظريه‌ها چه از ديدگاه ساختار نظری و چه از نظر پيش بينی آزمايش‌ها موفق بوده اند. با معرفی نسبيت عام، افرادی چون شوارتز شيلد[1]، فريدمن[2]، دوسيته[3] و لومتر[4] شروع به پيدا كردن حل‌هايی براي معادلات ميدان انيشتين برای كيهان و با توزيع‌های متفاوت جرمی كردند. اگرچه از همان ابتدا مشكلاتی چون تكينگی‌ها و يا حلقه‌های بسته زمان گونه مطرح شد ولی به زودی معلوم گشت كه نظريه نسبيت عام، بهترين تقريب از نظريه كلاسيك گرانش است و براي توجيه پديده‌های گرانشی در ميدان‌های قوی نياز به نظريه كامل تر گرانش كوانتومی است.

نسبيت عام انيشتين، تعميم نظريه نسبيت خاص، برای دستگاههای نالخت است. در نسبيت عام به طور موضعی، هر دستگاه شتابدار را می‌توان با يك ميدان گرانشی هم ارز گرفت. فضا- زمان انيشتينی خمينه شبه ريمانی است كه توسط ميدان متريك توصيف می‌شود. امروز در ابتدای قرن 21 ميلادی، تصوير انسان از عالم به شدت از آنچه در سده‌ها و حتی دهه‌های قبلي می‌انگاشت، فاصله دارد.

در قرن 20 ميلادي با دو نظريه نسبيت عام و مكانيك كوانتومي، بزرگترين جهش انسان در شناخت طبيعت اتفاق افتاده است، كه اين شناخت با ساختن ابزارهای آزمايشي، كه موفق‌ترين نمونه‌های آن تلسكوپهای فضايی و شتاب دهنده بزرگ هادورنی[5] است وارد مرحله جديدی شده است. امروز می‌دانيم كه زمين سياره‌ای به دور يك ستاره معمولي از $10^{11}\sim$ ستاره ي كهكشان راه شيری است، كه در فاصله تقريبي 8Kpc كه معادل 25000Lyr از مركز كهكشان است با سرعت $220\ {Km}/{S}$ در حال چرخش است. راه شيری نيز يكي از ميلياردها كهكشان موجود در كيهان است. امروز 90 سال از بحثهای جدل انگيز شاپلي[6] و كرتيس[7] درباره مقياس كيهان و آيا اين كه كل كيهان در كهكشان راه شيری خلاصه می‌شود يا نه گذشته است.

امروزه به كمك رصد امواج الكترومغناطيس در طول موج‌های مختلف، تصويری متفاوت از آن چه نيوتن آن را فضای ايستا می‌دانست، داريم. بارصداجرام كيهانی فراتر از كهكشان راه شيری،

---

[1] - Shwartzshild
[2] - Friedmann
[3] - Desitter
[4] - Lumetr
[5] - Larg Hardon Collider
[6] - Shapley
[7] - Curtis

دریافته ایم که کیهان در حال انبساط تند شونده است. کهکشان‌ها به عنوان بلوك‌های سازنده کیهان از هم دور می‌شوند و علاوه بر آن با تقریب خوبی می‌دانیم که این انبساط 13/7 میلیارد سال قبل، از يك انفجار بزرگ (مهبانگ) آغاز شده است.

فضا و زمان انیشتینی، ظرف مطلق و ثابتی نیست که رویدادهاي فیزیکی در آن رخ دهند بلکه خود دارای دینامیك است و به یکی از بازیگران اصلی تبدیل شده است. نسبیت عام هندسه فضا و زمان را به انرژی و تکانه مواد تشکیل دهنده کیهان ربط داده است. اما داستان بدین جا ختم نمی شود زیرا امروز بر اساس شواهد رصدی فقط فیزیك 4% از کل انرژی و ماده کیهان را که شامل انسان، زمین، ستاره‌ها و کهکشان هااست را می‌توانیم با مدل‌های استاندارد ذرات و فیزیك قرن گذشته توضیح دهیم، و مابقی 96% کیهان از مؤلفه‌های ناشناخته تشکیل شده است که امروزه آن را ماده و انرژي تاریك می‌نامیم. اگرچه امروز کیهان شناسی با سؤالات اساسی روبرو است که همان سؤالات فیلسوفان یونان قدیم در مورد منشأ کیهان و مواد تشکیل دهنده آن است و اطلاعات ما از کیهان همانند دوران طلایی آتن ناچیز است، اما از طرفی به دلیل تمام ابزارهاي رصدی موجود در حال و آینده نزدیك، کیهان شناسی به یک علم دقیق و تجربی بیش از پیش نزدیك می‌شود و به بیان دیگر حجم وسیع اطلاعاتی که امروز از کیهان داریم ما را در عصر طلایی کیهان شناسی قرار داده است. مشاهداتی مانند تابش پس زمینه کیهانی، هسته زایی، فراوانی عناصر اولیه در کیهان، تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، دوره‌های متفاوت کیهانی و دینامیك تحول کیهان در چارچوب مدل استاندارد کیهان شناسی توصیف می‌شوند. از طرف دیگر سؤالاتی مانند مؤلفه‌های تاریك تشکیل دهنده‌ی کیهان و یا مشکل تکینگی گرانشی و . . . از سؤالاتی است که در برابر مدل استاندارد کیهان شناسی قرار دارد.

یکي از سؤالات باز در کیهان شناسی، مشاهده انبساط تند شونده‌ی کیهان و عامل این انبساط می‌باشد. اندازه‌گیری فواصل کیهانی مانند مشاهده‌ی ابرنواخترهای نوع يك به عنوان شمع استاندارد و یا اندازه‌گیری خط کشهای استاندارد کیهانی مانند قله‌های طیف توان تابش پس زمینه‌ی کیهانی و یا نوسانات اکوستیکی باریون‌ها نشان می‌دهند که کیهان در فاز تند شونده قرار دارد. از طرف دیگر مشاهدات مربوط به ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، تطابق خوبی با مدل هاي تئوری انبساط تند شونده کیهان دارد.

پس از مشاهدات ابرنواخترهای نوع يك در سال 1998، مدل‌های نظری بسیاری برای توجیه این پدیده مطرح شده است. ثابت کیهان شناسی، ساده‌ترین جواب مسئله است که می‌تواند این مشکل را حل کند. اما مسائلی مانند تنظیم ظریف، تطابق کیهانی و تفاوت انرژی خلاء از نظریه‌های میدان‌های کوانتومی با مقدار حاصل از مشاهدات باعث شده است که مدل‌های جایگزین برای ثابت کیهان شناسی مطرح شود. مدل‌های جایگزین ثابت کیهان شناسی، در دو دسته‌ی کلی زیر دسته بندی می‌شوند:

الف) مدل‌های انرژی تاریك:در این دسته از مدل‌ها کیهان از سیال کاملی با فشار منفي تشکیل شده است که در مقیاس‌های کیهانی همگن است. معادله حالت خاص این سیال کیهانی، دینامیك تند شونده کیهان را ایجاد می‌کند. یکی از مهمترین تمایزهای این مدل با ثابت کیهان شناسی این است که معادله حالت خاص این سیال می‌تواند تابعی از زمان باشد، به طوری که مشکل تطابق کیهانی را بتواند به این طریق حل کند. البته مسئله‌ی منشأ این میدان اسکالر چالش اصلی همین مدل هااست. رصدهای آینده کیهان شناسی، مانند ابر نواخترهای نوع يك، نوسانات اکوستیکي باریون ها، همگرايي ضعیف کیهانی و شمارش کهکشان‌ها می‌توانند قیدهای بسیار دقیقی بر روی دینامیك معادله‌ی حالت انرژی تاریك بگذارند.

ب) مدل هاي گرانش تعمیم یافته:یکی دیگر از مدل‌های جایگزین ثابت کیهان شناسی، مدل‌های گرانش تعمیم یافته است. مدل هایی که فرض می‌کنند که گرانش در مقیاس‌های کیهانی و چگالی‌های کم، رفتار متفاوتی از گرانش انیشتینی دارد، نمونه اي از مدل‌های f(R) و یا مدل‌های کیهان شناخت شامه‌ای می‌باشد. از آن جا که مدل‌های گرانش تعمیم یافته می‌توانند دینامیك انبساط تندشونده کیهان را تولید کنند، از این رو مشاهدات کیهانشناسی که بتوانند انحراف از کنش انیشتین- هیلبرت را نشان دهند، از اهمیت برخوردار است.

در این میان نظریه ابعاد اضافی یکي از نظریاتی است که می‌تواند به حل مسئله سلسله مراتب کمك کند و برای وحدت برقرار کردن بین نظریه گرانشی و الکترودینامیك مورد استفاده قرار گیرد. در واقع این نظریه به کوانتومی کردن گرانش کمك می‌کند.

نظریه ابعاد اضافی ابتدا توسط کالوزا-کلاین در اوایل قرن بیستم مطرح شد. این نظریه به منظور متحد ساختن گرانش و الکترومغناطیس عنوان شد. بعد از ایشان نظریه ابعاد اضافی به فراموشی سپرده شد تا اینکه نظریه ریسمان که سعی در کوانتومي کردن گرانش داشت دوباره آن را احیا کرد. هاروا و ویتن در سال 1996 نظریه M را ارائه دادند. [1]

این نظریه يك نظریه مدعی براي کوانتومی کردن گرانش می‌باشد و حدهای مختلف آن منجر به تئوری‌های ریسمان متفاوت می‌شود. این مدل به يك توده یازده بعدی مربوط می‌شود که بعد یازدهم با تقارن Z_2 فشرده شده است.

دو نقطه ثابت مدارگونه دو فضا زمان ده بعدی را نشان می‌دهند. ماده و برهم کنش‌های پیمانه‌ای روی این شامه‌ها جایگزیده است، در حالی که میدان‌های گرانشی در تمام فضا-زمان منتشر می‌شوند.

شش بعد از این یازده بعد به طود خودسازگاری به روش کالوزا- کلاین فشرده می‌شود. در آن حد فضا-زمان پنج بعدی با شامه‌های چهاربعدی به نظر می‌رسد. این مدل يك چارچوب پایه براي بسیاری از مدل‌های کیهان شناسی ارئه می‌دهد. نظریه دیگري که در ارتباط با ابعاد اضافي مطرح شد نظریه ارکانی و همکارانش می‌باشد که روشی را برای حل مسئله سلسله مراتب ارائه نمودند. آن‌ها بعد اضافی را تخت در نظر گرفتند. اما پیشرفت قابل ملاحظه توسط راندال و

ساندروم که هندسه غیر تخت برای توده در نظر گرفتند حاصل شد. آن‌ها در نظریه RSI سلسله مراتب را حل کرده و در نظریه RSII گرانش نیوتنی را در حد انرژي پایین به دست آوردند.

در این پایان نامه ابتدا نظریات کالوزا-کلاین را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در ادامه مدل ارکانی و مدل راندال ساندروم را که ساختار اصلی سناریوی جهان شامه‌ای به وسیله این دو مدل معرفی می‌شود ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم معادلات انیشتین روی شامه را به دست می‌آوریم. که برای به دست آوردن این معادلات از معادلات گوس-کودازی استفاده می‌شود.

در فصل سوم عمومی‌ترین لاگرانژی فضا-زمان پنج بعدی که همان لاگرانژی انیشتین-گوس-بنت است را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن کنش این لاگرانژی براي توده و با استفاده از معادلات گوس-کودازی معادلات گرانشی مؤثر روی شامه را به دست می‌آوریم که با حضور جمله گوس-بنت معادلات به دست آمده پیچیده می‌شوند اما در اینجا نیز اثر توده در معادلات روی شامه تنها به وسیله انحنای وایل ظاهر می‌شود. هرگاه ترم گوس- بنت حذف شود دوباره به همان معادلات مؤثر روی شامه در فصل دوم می‌رسیم.

در فصل چهارم حل های مجانبی دوسیتر و آنتی دوسیتر و تخت را با استفاده از ترم گوس ـ بنت و بدون حضور ثابت کیهانشناسی به دست می‌آوریم.

فصل اول

جهان شامه‌ای

۱-۱ چرایی ابعاد اضافی

برای اولین بار در اوایل قرن بیستم کالوزا و کلاین وجود ابعاد اضافی[1] را عنوان کردند. آن‌ها با در نظر گرفتن تنها یك بعد اضافی یعنی پنج بعدی بودن جهان و القای گرانش خالص پنج بعدی به چهار بعد نظریه ماکسول و انیشتین چهار بعدی را استخراج کردند و نشان دادند که این دو نظریه داراي منشأ یکسان هستند. همچنین در مدل هایی با ابعاد اضافی نظریه انیشتین با میدان‌های پیمانه‌ای غیر آبلی (مثلاً میدان توصیف کننده برهم کنش قوی و ضعیف) متحد می‌شود. پس اولین دلیل مطالعه ابعاد اضافي اتحاد گرانش با برهم کنش‌های پیمانه‌ای ذرات بنیادی است. دلیل دیگر مطالعه ابعاد اضافی کوانتومی کردن برهم کنش‌های گرانشی بود.

نظریه ریسمان (نظریه M)که به طور خودسازگار می‌تواند در فضایی با شش یا هفت بعد اضافی فرمول بندی شود سعی در کوانتومی کردن گرانش دارد.

نظریه ریسمان بیان می‌کند که ماده و برهم کنش‌های پیمانه‌ای که توسط ریسمان‌های باز توضیح داده می‌شوند روی یك شامه[2] جایگزیده شده اند. این شامه در یك فضا زمان با ابعاد بالاتر قرار دارد که به آن فضا-زمان توده گفته می‌شود. قابل ذکر است که میدان هایی که با ریسمان‌های بسته توضیح داده می‌شوند مانند گرانش در همه ابعاد فضا-زمان بزرگتر انتشار خواهند یافت.

ابعاد اضافی ذکر شده در نظریه‌های فوق بسیار کوچك هستند در اندازه طول پلانك و در نتیجه غیر قابل آشکار شدن هستند.

می‌دانیم در طبیعت مقیاس جرم الکتروضعیف $M_{ew} = 10^3 Gev$ و مقیاس پلانك $M_{pl} \sim 10^{19} Gev$ است. فاصله بسیار زیاد این دو مقیاس بنیادی نیاز به تنظیم ظریف شانزده رقمی دارد. زیرا $\frac{M_{ew}}{M_{pl}} \sim 10^{-16}$ ، که این کار می‌تواند با استفاده از نظریه ابعاد اضافی انجام شود. بنابراین یکی دیگر از دلایل بررسی ابعاد اضافی حل مسئله سلسله مراتب بود.

نوع دیگری از مسئله سلسله مراتب ثابت کیهانشناسی است که این مسئله از دو جهت قابل بررسی است.

1)چرا مقدار مشاهده شده چگالی انرژی خلا نسبت به مقدار تئوری آن کوچك است.

2)چرا مقدار مشاهده شده چگالی انرژی خلا نه تنها کوچك است بلکه با توجه به مشاهدات ابرنواختر نوع I_a از مرتبه چگالی جرمی کنونی است.

[1] - Extra dimensions
[2] - Brane

۲.۱ نظریه کالوزا-کلاین

بر خلاف تفاوت‌های صوری که بین نظریه گرانش و الکترومغناطیس وجود دارد اما می‌توان بین آن‌ها وحدت برقرار کرد یعنی می‌توان برای الکترودینامیك هم خصلت هندسی قائل شد. اولین گام برای وحدت دو نظریه در سال 1921 توسط کالوزا برداشته شد. [2]

کالوزا بیان کرد که در يك خمینه پنج بعدی می‌توان به نظریه نسبیت عام انیشتین و نظریه الکترومغناطیس ماکسول وحدت بخشید.

هر نظریه‌ای که خواستار وحدت گرانش و الکترودینامیک باشد، باید تفاوت‌های زیاد بین این دو نوع برهم کنش را از میان بردارد. اول اینکه معادلات نسبیت عام انیشتین یک توصیف فضا – زمانی غیر کوانتومی است، که در آن دینامیک حرکت یک ذره آزمایشی گرانشی از اصل هم ارزی ضعیف پیروی می‌کند و لذا از کلیه مشخصات داخلي ذره به خصوص جرم سکون آن مستقل است. حال آنکه در الکترودینامیک ماکسول، شتاب ذرات باردار، به نسبت بار به جرم آن‌ها بستگي دارد و این مشخص‌ترین تمایز گرانش و الکترودینامیک است. تفاوت دیگر خطی بودن معادلات نسبیت عام در مقابل غیرخطی بودن معادلات ماکسول است.

مدل اصلي کالوزا منحصراً بر روی نسبیت عام انیشتین با در نظر گرفتن بعد پنجم ارائه شده بود.

بدین ترتیب که یک تانسور متریک پنج بعدی شامل پتانسیل‌های الکترومغناطیسی و پتانسیل گرانشی ارائه داد. در سال 1926 کلاین این نظریه را با فرض اینکه بعد اضافی بسیار کوچك و فشرده، در حدود طول پلانك است، با نظریه کوانتومی مرتبط کرد. [3]

در روش کالوزا- کلاین بعد اضافی باید شبه فضایی باشد، زیرا اگر تعداد ابعاد شبه زمانی از يك بیشتر باشد امکان ایجاد بیضي‌های شبه زمانی به وجود می‌آید و این باعث تخلف از اصل علیت است.

در هر حال بعد اضافی یعنی بعد پنجم به سه بعد فضایی معمولي شباهتی ندارد بلکه بسیار کوچك و فشرده است و به همین دلیل غیر قابل مشاهده است. بعداضافي شکل يك فضای فشرده با مقیاس فشردگي مشخص L می‌باشد. مثلاً بعد اضافی می‌تواند يك دایره به شعاع L باشد و براي بیشتر از یک بعد اضافی این فضا می‌تواند يك کره فرا ابعادی باشد.

در روش کالوزا- کلاین فضا – زمان D بعدی دارای یک هندسه است که از ضرب مستقیم $M^4 \times X^{D-4}$ به دست می‌آید M^4 فضا زمان مینکوفسکی و X^{D-4} يك خمینه فشرده از ابعاد اضافی را نشان می‌دهد.

تئوری K. K در واقع نسبیت عام در پنج بعد است. اما به وسیله دو شرط مقید می‌شود. این دو شرط توضیح می‌دهند که چرا ما چهار بعد را درك می‌کنیم، ولی بعد پنجم را نمی بینیم. (در مقیاس هاي بسیار بزرگتر از مقیاس L بعد اضافي قابل توجیه نمي باشد). [4]

دو شرط به شرح زير است:

1) شرط استوانه‌اي: اين شرط به وسيله كالوزا وارد شد و سازگار بااين است كه تمام مشتقات جزيی نسبت به بعد پنجم صفر است. اين شرط باعث راحت تر شدن محاسبات پيچيده می‌شود.

2) شرط فشرده‌سازي: اين شرط توسط كلاين قرار داده شد و سازگار با اين است كه بعد اضافي نه تنها كوچك است، بلكه داراي توپولوژي بسته(دايره)است. اين شرط دوره‌ای بودن بعد اضافی را فراهم می‌كند و همچنين باعث می‌شود كه بتوان بعد اضافی را تجزيه فوريه كرد. [5]

حال ثابت می‌كنيم كه چگونه گرانش چهار بعدی انيشتين می‌تواند با الكترومغناطيس در يك نظريه پنج بعدي متحد شود.

كنش پنج بعدی به صورت زير است:

$$S = \frac{M_*^3}{2}\int d^4xdy\sqrt{g_5}R_5 \qquad (1\text{-}1)$$

فضا – زمان به صورت $M^4 \times S^1$ می‌باشد.

ميدان‌ها را برحسب هارمونيك‌های روی دايره به شعاع L بسط می‌دهيم.

$$g_{AB}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{AB}^{(n)}(X)e^{\frac{iny}{L}} \qquad (۲\text{-}۱)$$

در ادامه روي مدهاي صفر متمركز می‌شويم و از مدهاي جرم دار صرفنظر می‌كنيم و نماد زير را معرفي می‌كنيم.

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = e^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}\left(g_{\mu\nu}(x) + e^{-\sqrt{3}\varphi}A_\mu A_\nu\right) \qquad (۳\text{-}۱)$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{5\mu}^{(0)} = e^{-\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}A_\mu \qquad (۴\text{-}۱)$$

$$g_{55}^{(0)} = e^{-\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}} \qquad (۵\text{-}۱)$$

با استفاده از این عبارات، کنش چهاربعدی برای میدان‌های مد صفر به صورت زیر است:

$$S_{zm} = M_*^3 \pi L \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(R_4 - \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}\varphi} F_{\mu\nu}^2\right) \qquad (۶\text{-}۱)$$

مي دانيم كه كنش چهاربعدي معمول براي گرانش به صورت زير است:

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x dy \sqrt{-g_4} R_4 \qquad (۷\text{-}۱)$$

بنابراین به دست می‌آوریم که:

$$M_{pl}^2 = M_*^3 2\pi L$$

و به عنوان يك نتيجه ثابت نيوتني $G_N = \left(8\pi M_{pl}^2\right)^{-1}$ می‌تواند به مقیاس ابعاد اضافي و شعاع فشردگي مربوط شود.

$$G_N = \frac{1}{16\pi^2 M_*^3 L} \qquad (۸\text{-}۱)$$

از طرفی گفتیم که کالوزا، یك تانسور متریك پنج بعدی شامل پتانسیل‌های الکترومغناطیسی و پتانسیل گرانشی ارائه داد. این تانسور متریك به صورت زیر است.

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta} - K^2 \varphi^2 A_\alpha A_\beta) & -K\varphi^2 A_\alpha \\ -K\varphi^2 A_\beta & -\varphi^2 \end{pmatrix} \qquad (۹\text{-}۱)$$

K ثابت جفت شدگي و $g_{44} = const$ است.

با توجه به تانسور متریك پنج بعدی ذکر شده، معادلات میدان در چهار بعد به صورت زیر است:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{K^2\varphi^2}{2} T_{\alpha\beta} - \frac{1}{\varphi}(\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi - g_{\alpha\beta}\Box\varphi) \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

که

$$\Box = g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3(\nabla^\alpha \varphi/\varphi) F_{\alpha\beta} \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

$$\Box\, \varphi = -K^2 \frac{\varphi^3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

$G_{\alpha\beta}$ و $F_{\alpha\beta}$ تانسورهای فارادی و انیشتین چهار بعدی معمول هستند. $T_{\alpha\beta}$ تانسور انرژی تکانه برای یک میدان الکترومغناطیس است که به صورت زیر است:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\left(g_{\alpha\beta}\frac{F^\gamma_\delta F^\delta_\gamma}{4} - F^\gamma_\alpha F_{\beta_\gamma}\right)}{2} \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

معادله (1-10)، معادله انیشتین چهار بعدی است که در سمت راست آن بعضی جملات انرژی-تکانه از بعد پنجم استخراج شده اند. معادله (1-11) چهار معادله الکترومغناطیس است که به وسیله یك تابع تغییر پیدا کرده است. این تابع همان اسکالر است که در معادله (1-12) داده شده است.

اگر

$$g_{44} = -\varphi^2 = -1 \qquad K = (16\pi G/C^4)^{1/2} \qquad (۱۴\text{-}۱)$$

⇨

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0 \qquad (۱۵\text{-}۱)$$

یعنی معادلات ماکسول و انیشتین خلا در بعد پنجم به دست می‌آید.

بنابراین میدان‌های گرانشی و پیمانه‌ای چهاربعدی می‌توانند یك منشأ مشترک در میدان گرانشی پنج بعدی داشته باشند. به عبارت دیگر منشأ نور در هندسه‌ی بعد اضافی می‌باشد.

دیدیم که در روش K. K اگر معادلات میدان را در پنج بعد بنویسیم از تقلیل آن به معادلات گرانش در چهار بعد و معادلات ماکسول می‌رسیم. ضمن آنکه تقارن‌های موجود در گرانش چهار بعدی و الکترومغناطیس باید حفظ شود. گروه تقارنی نسبیت عام در چهار بعد تقارن پوانکاره است و در الکترومغناطیس یک تبدیل پیمانه‌ای موضعی U(1) گروه تقارن جابجاپذیر را ایجاد می‌کند. یعنی حالت خلا معادلات در پنج بعد باید شکل $M^4 \times S^1$(استوانه اي)داشته باشد.

اگر خواستار تعمیم وحدت کالوزا-کلاین برای وحدت بخشیدن نیروهای قوی و ضعیف هسته‌ای با نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی باشیم، ضمن آن که احتیاج به ابعاد بیشتری برای فضا-زمان داریم باید از تئوری پیمانه‌ای غیر آبلی یانگ- میل استفاده کنیم، در این صورت فضا زمان دارای ابعاد 1+3+D خواهد بود و حالت خلا معادلات N بعدی به شکل $M^4 \times B^D$ در می‌آید. که در آن M^4 تقارن پوانکاره مربوط به فضا-زمان را نشان می‌دهدو B^D دارای يك تقارن پیمانه‌ای $SU(3)\otimes SU(2)\otimes SU(1)$ است.

به این ترتیب ابعاد فضا-زمان برای ارائه یک مدل استاندارد باید به صورت فضا-زمان یازده بعدی باشد و حالت خلا معادلات به شکل $M^4 \times B^7$ در می‌آید، و این اساس تئوری کالوزا-کلاین است. ولی اشکال کار در این است که حالت معادلات کالوزا-کلاین که در پنج بعد به صورت $M^4 \times B^1$ فرض می‌شود، فقط به طور کلاسیکی پایاست و در يك سد پتانسیل شبه کلاسیکی غیرپایاست. این پایایی را در پنج بعد می‌توان با فرض ثابت بودن توپولوژی به دست آورد. ولي پایایی در $M^4 \times B^D$ به سادگي میسر نمی شود. مشکل دوم این است که $M^4 \times B^D$ در حالت کلی جواب حالت خلا معادلات انیشتین در $M^4 \times B^D$ بعد نیست. بنابراین اگر بتوان نارسایی‌های اخیر را حل کرد، می‌توان به یک مدل استاندارد فیزیك با استفاده از رفتارهای مدرن کالوزا-کلاین رسید.

۳-۱ مدل ارکانی

یک روش به دست آوردن گرانش چهار بعدی روی شامه، ترکیب کردن نظریه جهان شامه با نظریه کالوزا-کلاین می‌باشد که توسط ارکاني- حامد، دیمپلوس و دوالي (ADD) در سال 1998 پیشنهادشدوامکان جدیدی برای حل مسئله سلسله مراتب ارائه می‌دهد. در فیزیك ذرات، مدل ADD به عنوان مدلی با ابعاداضافه بزرگ شناخته می‌شود. قبل از بیان مدل ارکانی به بحث مختصری در مورد سلسله مراتب اشاره می‌شود.

بر حسب نظریه‌های موجود، دو مقیاس بنیادی انرژی در طبیعت وجود دارد، مقیاس الکتروضعیف $M_{ew}\sim 10^3 Gev$ و دیگری مقیاس گرانش که همان مقیاس پلانك است

$M_{pl}\sim10^{19}Gev$، فاصله بسیار زیاد بین این دو مقیاس انرژی ($\frac{M_{ew}}{M_{pl}}\sim10^{-16}$) که نیاز به یک تنظیم ظریف 16 رقمي دارد، مسئله سلسله مراتب نام دارد.

این مسئله مانع اتحاد مدل استاندارد در مقیاس ضعیف با گرانش در مقیاس پلانك می‌شود. هرکدام از مقیاس‌های انرژی یك طول ویژه دارند که با عکس مقیاس انرژی آن‌ها بیان می‌شود.

طول ویژه در واقع به طور تقریبی مقیاسی را که در آن برهم کنش قابل اندازه گیری تجربی است، مشخص می‌کند. برهم کنش‌های ضعیف در فواصل حدود M_{ew}^{-1} بررسي و کاوش می‌شوند. در حالی که نیروهای گرانش تنها به طور دقیق در فواصل حدود Cm اندازه گیری شده است. تعبیر ما از M_{pl} به عنوان مقیاس بنیادی بر این اساس پایه گذاری شده است که قانون گرانش تا $10^{-33}Cm$ (طول پلانك) تغییر نمي کند.

ارکانی و همکارانش حل زیر را برای مسئله سلسله مراتب ارائه دادند. [6]

آن‌ها یک هندسه تخت برای 4+n بعد در نظر گرفتند، که در آن n بعد اضافی فضایی با شعاع مشترك R با توپولوژی دونات شکل فشرده است. همچنین از این واقعیت که مقیاس ضعیف یك قطعیت تجربي دارد، M_{ew}^{-1} را به عنوان تنها مقیاس طول کوتاه بنیادی در طبیعت در نظر گرفتند.

مقیاس پلانك $M_{*}=M_{pl(4+n)}$ این نظریه 4+n بعدي راM_{ew} در نظر می‌گیریم.

با انتگرال‌گیري از کنش انیشتین هیلبرت روی ابعاد اضافی می‌توان مقیاس پلانك چهار بعدی مؤثر را به دست آورد.

دو ذره به جرم هاي M_1 و M_2 در فاصله $r \ll R$ قرار دارند. طبق قانون گاوس در 4+n بعد پتانسیل زیر را احساس می‌کند.

$$V(r)\sim\frac{m_1m_2}{M_*^{2+n}}\frac{1}{r^{n+1}} \qquad r\le R \qquad (۱۶-۱)$$

یعنی قانون گرانش در فواصل از مرتبه R تغییر می‌کند.

حال اگر دو جسم در فواصل بزرگتر از R قرار داده شوند خطوط شار گرانشی نمی توانند به ابعاد اضافی نفوذ کنند و پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V(r)\sim\frac{m_1m_2}{M_*^{2+n}R^n}\frac{1}{r} \qquad r\gg R \qquad (۱۷-۱)$$