دانشگاه قم
دانشکده علوم پایه
پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک

عنوان:

مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی اتلافی

استاد راهنما:

دکتر حسن پهلوانی

نگارنده:

ملیحه قرائتی

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به

پدرم

مادرم

همسرم

و استادم

به پاس آنچه به من آموختند

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر پهلوانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

چکیده

از آنجایی که مقاومت الکتریکی یکی از پارامترهای اصلی در مدارهای الکتریکی بوده و نقش اساسی در رسانش الکتریکی دارد، در این پایان نامه به بررسی مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپیک اتلافی می‌پردازیم. در ابتدا مدار الکتریکی کوانتومی اتلافی را به دو روش کانای کالدیرلا[۱] و مدار دوگان بررسی می‌کنیم. سپس مقاومت یک مدار کوانتومی LC را به عنوان یک محیط گرمایی در نظر می‌گیریم. محیط گرمایی را می‌توان با مجموعه ای از نوسانگرهای هماهنگ کوانتومی مدل سازی کرد. با استفاده از روش جفت شدگی کمینه بین مدار و میدان توصیف کننده‌ی محیط، فرآیند اتلاف انرژی و احتمال‌های گذار بین ترازهای انرژی مدار کوانتومی بدست می‌آید.

در ادامه با معرفی مدارهای مزوسکوپیک، تئوری کوانتومی یک مدار الکتریکی کوانتومی مزوسکوپیک LC با بار گسسته را نوشته و با در نظر گرفتن نظریه کانای کالدیرلا، جریان ماندگاری و طیف انرژی یک مدار الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی LC دارای مقاومت R تحت تأثیر یک میدان خارجی وابسته به زمان را بررسی می‌کنیم. در پایان جریان گذار را در مدارهای الکتریکی کوانتومی مزوسکوپی اتلافی از روش جفت شدگی کمینه محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

هامیلتونی کانای کالدیرلا، سیستم اتلافی، گسستگی بار، معادله کوانتومی لانژون، جفت شدگی کمینه

---

[۱] Caldirola-Kanai

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مدارهای الکتریکی کوانتومی اتلافی

۱.۱ بررسی اتلاف در مدارهای الکتریکی کوانتومی به روش کانای کالدیرلا

مدار الکتریکی LC که دارای خازن C و القاگر L است، یک نوسانگر الکترومغناطیسی را تشکیل داده که در آن جریان برحسب زمان به صورت سینوسی تغییر می کند، درست همان طور که جابه جایی یک نوسانگر مکانیکی برحسب زمان تغییر می کند. با کمک تشابه بین نوسانگرهای الکترومغناطیسی و مکانیکی می‌توان براساس مطالعاتی که بر روی نوسانگرهای مکانیکی صورت گرفته است، شناختی از نوسانگرهای الکترومغناطیسی به دست آورد.
در این صورت از لحاظ صوری خازن شبیه فنر و القاگر شبیه جسم دارای جرم است. تابع هامیلتونی مربوط به یک نوسانگر هماهنگ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^{۲}}{۲m} + \frac{۱}{۲} m w^{۲} \hat{x}^{۲}$$

و چون این هامیلتونی منحصر به فرد نیست، می تواند با انواع دیگر هامیلتونی جایگزین شود که برای مدار LC در فضای بار و جریان به شکل زیر است.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^{۲}}{۲L} + \frac{\hat{q}^{۲}}{۲C}$$

که در آن، رابطه جابه‌جایی همزمان $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ برقرار است[۱].
با توجه به عملگرهای خلق و فنا برای نوسانگرهای هماهنگ می توان این عملگرها

را برای مدار LC به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{b}^{\dagger} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 c}}\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}\hat{p},$$
$$\hat{b} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 c}}\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}\hat{p}.$$

این عملگرها در روابط زیر که به جبر هایزنبرگ معروف است، صدق می کنند.

$$[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}] = 1, \quad [\hat{H},\hat{b}] = -\hbar\omega_0\hat{b}, \quad [\hat{H},\hat{b}^{\dagger}] = \hbar\omega_0\hat{b}^{\dagger}$$
$$\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \frac{1}{2}), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$$

در مکانیک کوانتومی روش هایی برای بررسی کوانتش سیستم های اتلافی وجود دارد، یکی از این روش ها که در آن با ارائه‌ی هامیلتونی برای سیستم اتلافی کوانتش کانونیک به طور پدیده‌شناختی از این سیستم به عمل می آید، نظریه‌ی کانای کاندیرلا است. بر این اساس هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ میرا با ضرایب میرایی γ، جرم m و بسامد ω_0 به صورت زیر پیشنهاد می‌شود.[۲]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}e^{-\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2e^{\gamma t} \qquad (۱.۱)$$

و برای مدار الکتریکی کوانتومی اتلافی (RLC) به صورت زیر است.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2L}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\hat{q}^2}{2C}e^{\frac{R}{L}t} \qquad (۲.۱)$$

با استفاده از معادلات حرکت هایزنبرگ عملگرهای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ و ترکیب آنها معادله حرکت نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{\hat{x}} + \omega_0^2\hat{x} + \gamma\dot{\hat{x}} = 0 \qquad (۳.۱)$$

به دست می آید، به طور مشابه معادله حرکت عملگرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ در تصویر هایزنبرگ به صورت زیر است.

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{q},\hat{H}] = \frac{\hat{p}}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (۴.۱)$$
$$\dot{\hat{p}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p},\hat{H}] = -\frac{\hat{q}}{C}e^{\frac{R}{L}t} \qquad (۵.۱)$$

از ترکیب این دو می‌توان به معادله حرکت مدار RLC دست یافت:

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{q}{LC}=۰ \tag{۶.۱}$$

با استفاده از رابطه جابه جایی و تعریف عملگر جریان $\hat{p}=\dot{\hat{q}}Le^{\frac{R}{L}t}$، داریم

$$\Delta\hat{q}\Delta\dot{\hat{q}}\geqslant\frac{\hbar}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{۷.۱}$$

که در این حالت نیز آشکارا نقض اصل عدم قطعیت در زمان های بزرگ $(t\rightarrow\infty)$ دیده می شود.
از شکل هامیلتونی (۱.۱) واضح است که این هامیلتونی شبیه هامیلتونی یک نوسانگر غیر میرا با جرم وابسته به زمان $me^{\gamma t}$ است، بنابراین می توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\hat{H}=\hbar\omega_{\circ}(\hat{b}^{+}\hat{b}\dagger\frac{۱}{۲}) \tag{۸.۱}$$

که در آن $\hat{b}^{\dagger}$ و $\hat{b}$ به ترتیب عملگرهای خلق و فنا هستند:

$$\hat{b}=(\frac{۱}{۲\hbar m\omega_{\circ}e^{\gamma t}})^{\frac{۱}{۲}}(me^{\gamma t}\omega_{\circ}\hat{x}+i\hat{p}) \tag{۹.۱}$$

$$\hat{b}^{\dagger}=(\frac{۱}{۲\hbar m\omega_{\circ}e^{\gamma t}})^{\frac{۱}{۲}}(me^{\gamma t}\omega_{\circ}\hat{x}-i\hat{p}) \tag{۱۰.۱}$$

و در رابطه جابه جایی $[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}]=۱$ صدق می کنند.
با توجه به شباهت هامیلتونی (۲.۱) (مدار الکتریکی کوانتومی اتلافی) به هامیلتونی (۱.۱) (نوسانگر هماهنگ میرا) می توان عملگرهای خلق و فنا را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{b}=(\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}Le^{-\frac{R}{L}t}})^{\frac{۱}{۲}}(\sqrt{\frac{L}{C}}e^{-\frac{R}{L}t}\hat{q}+i\hat{p}) \tag{۱۱.۱}$$

$$\hat{b}^{\dagger}=(\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}Le^{-\frac{R}{L}t}})^{\frac{۱}{۲}}(\sqrt{\frac{L}{C}}e^{-\frac{R}{L}t}\hat{q}-i\hat{p}) \tag{۱۲.۱}$$

که در این مورد نیز $[\hat{b},\hat{b}^\dagger]=۱$ برقرار است.
و می توان ویژه توابع و ویژه مقادیر را برای این هامیلتونی به صورت زیر نوشت[۳]

$$(-\frac{\hbar^۲}{۲L}e^{-\frac{R}{L}t}\frac{\partial^۲}{\partial q^۲}+\frac{q^۲}{۲C}e^{\frac{R}{L}t})u_m(q,t)=\hbar\sqrt{\frac{C}{L}}(m+\frac{۱}{۲})u_m(q,t) \qquad (۱۳.۱)$$

$$u_m(q,t)=\frac{۱}{\sqrt{۲^m m!}}(\sqrt{LC}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\pi\hbar})^{\frac{۱}{۴}}exp(\sqrt{LC}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{۲\hbar}q^۲)H_m[(\frac{\sqrt{LC}e^{\frac{R}{L}t}}{\hbar})^{\frac{۱}{۲}}q]$$

که در آن H_m چندجمله ای هرمیت است.

۲.۱ روش مدار دوگان برای کوانتش مدار الکتریکی کوانتومی اتلافی

روش دیگر برای کوانتش کانونیک مدار الکتریکی کوانتومی اتلافی، مضاعف کردن فضای فاز با در نظر گرفتن مدار دوگان مدار اصلی است که در سال ۱۹۳۱ توسط باتیمن[۱] پیشنهاد شد. در این روش لاگرانژی تابعی از متغیرهای دینامیکی دو مدار است که یکی از آنها مدار میرای اصلی و دیگری مدار همزاد مدار اصلی نامیده می‌شود. انرژی تلف شده از مدار اصلی توسط مدار همزاد جذب می شود[۴].
اگر عملگر $\hat{q}$ نشانگر بار مدار اصلی و عملگر $\hat{g}$ نشانگر عملگر بار مدار دوگان باشد، لاگرانژی کل سیستم چنین است.

$$\mathcal{L}=L\dot{\hat{q}}\dot{\hat{g}}+\frac{R}{۲}(\hat{q}\dot{\hat{g}}-\hat{g}\dot{\hat{q}})-\frac{\hat{q}\hat{g}}{C}$$

که در آن L القاییدگی هر یک از مدارها است. معادلات لاگرانژی برای درجات آزادی $\hat{q}$ و $\hat{g}$ به شکل زیر هستند.

$$\ddot{\hat{q}}+\frac{R}{L}\dot{\hat{q}}+\frac{\hat{q}}{LC}=۰, \qquad \ddot{\hat{g}}-\frac{R}{L}\dot{\hat{g}}+\frac{\hat{g}}{LC}=۰ \qquad (۱۴.۱)$$

[۱] Bateman

با تعریف تکانه های کانونیک مزدوج $\hat{q}$ و $\hat{g}$ به شکل زیر

$$\hat{p}_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{q}}} = L\dot{\hat{g}} - \frac{۱}{۲}R\hat{g}$$
$$\hat{p}_g = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{g}}} = L\dot{\hat{q}} + \frac{۱}{۲}R\hat{q}$$

هامیلتونی کل سیستم برحسب متغیرهای مزدوج کانونیک به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \dot{\hat{q}}\hat{p}_q + \dot{\hat{g}}\hat{p}_g - \mathcal{L}\\ &= \frac{۱}{L}\hat{p}_q\hat{p}_g + \frac{R}{۲L}(\hat{g}\hat{p}_g - \hat{q}\hat{p}_q) + (\frac{۱}{c} - \frac{R^۲}{۴L})\hat{q}\hat{g}\end{aligned} \qquad (۱۵.۱)$$

برای کوانتش کانونیک سیستم روابط جابه جایی همزمان زیر روی متغیرهای مزدوج اعمال می شود.

$$[\hat{q}, \hat{p}_q] = i\hbar, \qquad [\hat{g}, \hat{p}_g] = i\hbar$$

به کمک این روابط جابه جایی و هامیلتونی (۱۵.۱) به راحتی می توان نشان داد معادلات (۱۴.۱) معادلات حرکت q، g در تصویر هایزنبرگ خواهند بود. به منظور ساده شدن محاسبات بعدی، تبدیلات کانونیکی زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{q} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\hat{q}_۱ + \hat{q}_۲), \qquad \hat{g} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\hat{q}_۱ - \hat{q}_۲),$$
$$\hat{p}_q = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\hat{p}_{q_۱} + \hat{p}_{q_۲}), \qquad \hat{p}_g = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\hat{p}_{q_۱} - \hat{p}_{q_۲}),$$

با اعمال این تبدیلات، هامیلتونی (۱۵.۱) برحسب متغیرهای جدید به شکل زیر بیان می شود.

$$\hat{H} = (\frac{\hat{p}_{q_۱}^۲}{۲L} + K\frac{\hat{q}_۱^۲}{۲}) - (\frac{\hat{p}_{q_۲}^۲}{۲L} + K\frac{\hat{q}_۲^۲}{۲}) - \frac{R}{۲L}(\hat{q}_۲\hat{p}_{q_۱} + \hat{q}_۱\hat{p}_{q_۲}) \qquad (۱۶.۱)$$

که در آن $K = \frac{۱}{C} - \frac{R^۲}{۴L}$ مشترک دو مدار است.

هامیلتونی سیستم برحسب عملگرهای خلق و فنای متغیرهای جدید $\hat{q}_۱$، $\hat{q}_۲$، $\hat{p}_{q_۱}$ و $\hat{p}_{q_۲}$

که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\hat{A} = (\frac{1}{2\hbar KL})^{\frac{1}{2}}(\hat{p}_{q_1} - i\sqrt{LK}\hat{q}_1), \qquad \hat{B} = (\frac{1}{2\hbar KL})^{\frac{1}{2}}(\hat{p}_{q_2} - i\sqrt{LK}\hat{q}_2)$$
$$\hat{A}^\dagger = (\frac{1}{2\hbar KL})^{\frac{1}{2}}(\hat{p}_{q_1} + i\sqrt{LK}\hat{q}_1), \qquad \hat{B}^\dagger = (\frac{1}{2\hbar KL})^{\frac{1}{2}}(\hat{p}_{q_2} + i\sqrt{LK}\hat{q}_2)$$

بنابراین می توان هامیلتونی (۱۶.۱) را به شکل ساده تر زیر نوشت.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \qquad \hat{H}_0 = \hbar K(\hat{A}^\dagger\hat{A} - \hat{B}^\dagger\hat{B})$$
$$\hat{H}_I = i\hbar\Gamma(\hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger - \hat{A}\hat{B}), \qquad [\hat{H}_0, \hat{H}_I] = 0$$

که در آن $\Gamma = \frac{R}{2L}$ ثابت میرایی مدار اصلی است. در این صورت ویژه حالت ها و ویژه مقادیر هامیلتونی $\hat{H}_0$ به شکل زیر است:

$$\hat{H}_0(|n> \otimes |m>) = \hbar K(n-m)(|n> \otimes |m>), \quad n, m = 0, 1, 2, \cdots \quad (17.1)$$

که $|n>$ و $|m>$ ویژه حالت های مدار الکتریکی کوانتومی است . برای تحقیق اصل عدم قطعیت لازم است شکل عملگرهای $\hat{q}$، $\dot{\hat{q}}$، $\hat{g}$ و $\dot{\hat{g}}$ را برحسب عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ داشته باشیم.
به کمک روابط معرفی شده، به راحتی می توان این وابستگی را به شکل زیر به دست آورد.

$$\hat{q} = \lambda^*\hat{A}^\dagger + \lambda\hat{A} + \lambda^*\hat{B}^\dagger + \lambda\hat{B}, \qquad \dot{\hat{q}} = \alpha^*\hat{A}^\dagger + \alpha\hat{A} + \beta^*\hat{B}^\dagger + \beta\hat{B}$$
$$\hat{g} = \lambda^*\hat{A}^\dagger + \lambda\hat{A} + \lambda^*\hat{B}^\dagger + \lambda\hat{B}, \qquad \dot{\hat{g}} = \alpha\hat{A}^\dagger + \alpha^*\hat{A} + \alpha^*\hat{B}^\dagger + \alpha\hat{B}$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar K}{L}} - i\frac{R}{4L}\sqrt{\frac{\hbar}{LK}}, \qquad \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar K}{L}} - i\frac{R}{4L}\sqrt{\frac{\hbar}{LK}}$$
$$\lambda = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{LK}}$$

چنانچه سیستم در لحظه $t=\circ$ در ویژه حالت هامیلتونی $H_\circ$ باشد، یعنی $|\psi_\circ>=|n>\otimes|m>$ با استفاده از این روابط و به کمک روابط زیر

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\hat{A}(\circ)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}=\hat{A}(\circ)cosh\Gamma t-\hat{B}^\dagger(\circ)sinh\Gamma t$$
$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\hat{B}(\circ)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}=-\hat{A}^\dagger(\circ)sinh\Gamma t+\hat{B}(\circ)cosh\Gamma t$$

می‌توان وابستگی زمانی مقادیر چشمداشتی عملگرهای $\hat{q}^۲$، $\dot{\hat{q}}^۲$، $\hat{g}^۲$ و $\dot{\hat{g}}^۲$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$<\psi(t)|\hat{q}^۲|\psi(t)>=<n|\otimes<m|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\hat{q}^۲e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}|n>\otimes|m>=۲R^۲e^{۲\Gamma t}(n+m+۱)$$
$$<\psi(t)|\dot{\hat{q}}^۲|\psi(t)>=<n|\otimes<m|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\dot{\hat{q}}^۲_۲e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}|n>\otimes|m>=۲\alpha^۲e^{۲\Gamma t}(n+m+۱)$$
$$<\psi(t)|\hat{g}^۲|\psi(t)>=<n|\otimes<m|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\hat{g}^۲e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}|n>\otimes|m>=۲R^۲e^{-۲\Gamma t}(n+m+۱)$$
$$<\psi(t)|\dot{\hat{g}}^۲|\psi(t)>=<n|\otimes<m|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}\dot{\hat{g}}^۲e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I(\circ)t}|n>\otimes|m>=۲\alpha^۲e^{-۲\Gamma t}(n+m+۱)$$

از این مقادیر چشم داشتی و با توجه به اینکه متوسط عملگرهای $\hat{q}$، $\dot{\hat{q}}$، $\hat{g}$ و $\dot{\hat{g}}$ در حالت‌های $|\psi(t)>$ صفر هستند، روابط عدم قطعیت زیر برقرار است.

$$\Delta\hat{q}\Delta\dot{\hat{q}}=۲R\alpha e^{۲\Gamma t}(n+m+۱)$$
$$\Delta\hat{g}\Delta\dot{\hat{g}}=۲R\alpha e^{-۲\Gamma t}(n+m+۱)$$

که نشان می دهند برای زمان های $t\rightarrow\pm\infty$ با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ سازگاری ندارند.

۳.۱ معادله ی کوانتومی لانژون

برهم کنش سیستم اتلافی با محیط خود در سطح میکروسکوپیک بسیار پیچیده و نسبت به مکان و زمان تصادفی است و بعضاً اطلاع یافتن از شکل صریح وابستگی مکانی و زمانی این برهم کنش در ابعاد میکروسکوپیک غیرممکن است . با این

وجود موضوع مهم و قابل اندازه گیری، معادله حرکت ماکروسکوپیک سیستم اتلافی است . بنابراین باید محیط جاذب سیستم اتلافی که حمام گرمایی نامیده می شود و برهم کنش آن با سیستم اصلی را به طور نظری به گونه ای مدل سازی کرد، که با ترکیب معادلات حرکت هایزنبرگ حمام گرمایی و سیستم اصلی معادله‌ی حرکت ماکروسکوپیک سیستم اصلی به‌دست آید. در این روش مبنای توصیف این حرکت ماکروسکوپیک معادله ی کوانتومی لانژون[۲] است[۵، ۶].

یک ذره به جرم m تحت تأثیر پتانسیل خارجی یک بعدی $V(x)$ قرار دارد و با محیط خود به طور خطی برهم کنش می کند. حرکت ماکروسکوپیک این ذره توسط معادله کوانتومی لانژون به صورت زیر توصیف می شود:

$$m\ddot{\hat{x}} + \int_{0}^{t} dt' \mu(t-t')\dot{\hat{x}}(t') + \frac{dV(x)}{dx} = F_N(t) \qquad (۱.۱۸)$$

$F_N(t)$ نیروی نوفه است که مقدار متوسط آن نسبت به ویژه حالت های هامیلتونی محیط صفر است.

$\mu(t)$ تابع حافظه است و نیرویی که از این تابع به دست می آید از نوع میراکننده ی حرکت ذره بوده و به تاریخچه حرکت ذره بستگی دارد. معادله لانژون، برای یک ذره ی متحرک در یک محیط جاذب است که از حذف درجات آزادی به دست می آید و در واقع متغیرهای دینامیکی محیط جاذب فقط در نیروی نوفه ی $F_N(t)$ ظاهر می شود. این معادله هم چنین یک معادله ی پدیده شناختی نیز است، به این معنی که بر هم کنش ذره با محیطش در سطح میکروسکوپیک توسط تابع حافظه در سطح ماکروسکوپیک توصیف می شود که می تواند به طور تجربی و یا با مدل سازی محیط به دست آید. در ادامه مدلی برای محیط جاذب یک ذره که منجر به معادله ی لانژون می شود را بررسی می کنیم.

۱.۳.۱ مدل مدار های الکتریکی کوانتومی مستقل

از آنجایی که می‌توان مدارهای الکتریکی کوانتومی اتلافی را با نوسانگرهای مستقل مدل‌سازی کرد، لذا می‌توان سیستم اتلافی را متشکل از تعداد زیادی مدارهای الکتریکی مستقل در نظر گرفت[۷، ۸]؛ در نتیجه هامیلتونی کل سیستم به صورت مجموع سه

[۲] Langevin

جمله است:

$$\hat{H}_F = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_{SB}$$

$\hat{H}_S$ هامیلتونی سیستم اتلافی حرکت ذره‌ی باردار در مدار الکتریکی کوانتومی L است که تحت تأثیر پتانسیل خارجی $V(q)$ قرار گرفته و در فضای بار و جریان به شکل زیر است:

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}^{۲}}{۲L} + V(\hat{q}) \tag{۱۹.۱}$$

$\hat{H}_B$ هامیلتونی مربوط به درجات آزادی محیط سیستم اتلافی است که شامل مجموعه‌ای از مدارهای مستقل است یعنی:

$$\hat{H}_B = \sum_{n=۱}^{N}(\frac{\hat{p}_i^{۲}}{۲L_i} + \frac{۱}{۲}c_i\hat{q}_i^{۲}) \tag{۲۰.۱}$$

$\hat{H}_{SB}$ هامیلتونی جفت شدگی بین ذره باردار و محیط جاذبش است که در مورد مدارهای الکتریکی کوانتومی اتلافی این جملات به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$H_{SB} = -\hat{q}\sum_{i=۱}^{N}\alpha_i\hat{q}_i + \hat{q}^{۲}\sum_{i=۱}^{N}\frac{\alpha_i^{۲}}{۲}c_i \tag{۲۱.۱}$$

$\hat{q}_i$، $\hat{p}_i$، L_i و c_i به ترتیب عملگرهای بار، تکانه، القاییدگی و ظرفیت خازن $n-$امین مدار بوده و α_i ها ثابت جفت کننده سیستم اتلافی و محیط است.
با کمک روابط جابه‌جایی $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ و $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ معادلات حرکت هایزنبرگ به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}} &= \frac{۱}{i\hbar}[\hat{q}, \hat{H}] = \dfrac{\hat{p}}{L} \\ \dot{\hat{p}} &= \frac{۱}{i\hbar}[\hat{p}, \hat{H}] = -\dfrac{\partial V}{\partial \hat{q}} + \sum \alpha_i\hat{q}_i - \hat{q}\sum \alpha_i^{۲}c_i^{۲} \end{cases} \tag{۲۲.۱}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}}_i &= \frac{۱}{i\hbar}[\hat{q}_i, \hat{H}] = \dfrac{\hat{p}_i}{L_i} \\ \dot{\hat{p}}_i &= \frac{۱}{i\hbar}[\hat{p}_i, \hat{H}] = -\dfrac{\hat{q}_i}{c_i} + \hat{q}\alpha_i \end{cases} \quad (۲۳.۱)$$

با حذف عملگر $\hat{p}_i(t)$ بین این معادلات، وابستگی زمانی $\hat{q}_i(t)$ برحسب $\hat{q}(t)$ به دست می‌آید.

$$\hat{q}_i(t) = \hat{q}_i(\circ)cos\omega_i t + \frac{\hat{p}_i(\circ)}{L_i\omega_i}sin\omega_i t + \int_\circ^t \frac{\alpha_i}{L_i\omega_i}sin(\omega_i(t-s))\hat{q}(s)ds \quad (۲۴.۱)$$

معادله حرکت مربوط به عملگرهای $\hat{p}$ و $\hat{q}$ را نیز می‌توان از معادلات (۲۲.۱) به دست آورد.

$$\ddot{\hat{q}} + \frac{۱}{L}(\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial q} + \sum_{i=۱}^{N} \alpha_i^۲ c_i \hat{q}) = \sum_{i=۱}^{N} \alpha_i \frac{\hat{q}_i}{L} \quad (۲۵.۱)$$

با قرار دادن $\hat{q}_i(t)$ در معادله (۲۵.۱) و استفاده از انتگرال جزءبه‌جزء خواهیم داشت:

$$L\ddot{\hat{q}} + \frac{\partial V(\hat{q})}{\partial q} + \sum_{i=۱}^{N} \alpha_i^۲ c_i \hat{q} = \sum_{i=۱}^{N} \alpha_i(\hat{q}_i(\circ)cos\omega_i t + \frac{\hat{p}_i(\circ)}{L_i\omega_i}sin\omega_i t$$
$$+ \frac{\hat{q}}{L_i\omega_i^۲} - \frac{\hat{q}(\circ)}{L_i\omega_i^۲}cos\omega_i t - \int_\circ^t \frac{cos(\omega_i(t-s))}{L_i\omega_i^۲}\dot{\hat{q}}(s)ds$$

با توجه به $\omega_i = \frac{۱}{\sqrt{L_i c_i}}$، تابع حافظه $\mu(t)$ ونیروی نوفه $F_N(t)$ به شکل زیر تعریف می شوند.

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{۱}{L}\sum \frac{\alpha_i^۲}{L_i\omega_i^۲}cos\omega_i t, & t \gneq \circ \\ \circ & t \leq \circ \end{cases} \quad (۲۶.۱)$$

$$F_N(t) = \sum \alpha_i(\hat{q}_i(\circ)cos\omega_i\ t + \frac{\hat{p}_i(\circ)}{L_i\omega_i}sin\omega_i t - \frac{\alpha_i}{L_i\omega_i^۲}\hat{q}(\circ)cos\omega_i t) \quad (۲۷.۱)$$

که نهایتاً معادله‌ی کوانتومی لانژون به صورت زیر، به‌دست می‌آید.

$$L\ddot{\hat{q}} + L\int_\circ^t ds\mu(t-s)\dot{\hat{q}}(s) + \frac{\partial V}{\partial \hat{q}} = F_N(t) \quad (۲۸.۱)$$

فصل ۲

روش جفت شدگی کمینه برای مدارهای الکتریکی کوانتومی