بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

برخی خواص ضربگر شور جبرهای لی

استاد راهنما:
دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور:
دکتر ندا آهنجیده

توسط:
فاطمه قاسمی

اسفند ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

سپاس پروردگاری را که بار دیگر بر من منت نهاد و به من توفیق علم‌آموزی عطا فرمود.

از همه اعضای خانواده‌ام بالاخص پدر و مادر بزرگوارم به‌خاطر تمامی مهربانی‌ها، دلگرمی‌ها، همفکری‌ها و زحماتشان که به‌طور خالصانه در طول زندگی‌ام نثارم کرده‌اند سپاسگزارم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان، که راهنمایی اینجانب را در این طرح پذیرفتند و مرا یاری نمودند، تشکر می‌کنم.

همچنین از استاد بزرگوار، سرکار خانم دکتر ندا آهنجیده که با صبوری دانش خود را در اختیار اینجانب قرار داده و با مشاوره خود راهگشای این طرح گشتند، سپاسگزاری می‌کنم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده و دکتر فرهاد خاکسار حقانی که نهایت عنایت را در مطالعه و داوری در جلسه دفاعیه نموده‌اند، سپاسگزاری کرده و از کلیه اساتید دلسوز و بزرگوارم به‌خاطر زحماتی که در طول دوره تحصیل متقبل شده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان امید آن دارم که لیاقت و توفیق داشته باشم تا بگونه‌ای زندگی کنم که پاسخی مثبت و ارزشمند به زحمت همه کسانی باشد که مرا در زندگی و در امر تحصیل یاری داده‌اند.

فاطمه قاسمی

اسفند ۸۸

این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فراموش نخواهم کرد، به مهربان‌ترین کسان خویش

پدر و مادر عزیزم

تقدیم می‌دارم.

چکیده

شور[۱] در سال ۱۹۰۴ مفهوم ضربگر شور و در سال ۱۹۴۰ هال[۲] مفهوم ایزوکلینیسم گروه‌ها را مطرح کردند. در این پایان‌نامه برخی خواص ایزوکلینیسم و ضربگر شور جبرهای لی را بیان می‌کنیم. در کل برخی مباحث مربوط به گروه‌ها را در جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم و به تعیین ساختار همه‌ی پوشش‌های جبرهای لی که ضربگر شور آن‌ها متناهی‌البعد است می‌پردازیم که تعمیم کار باتن[۳] و استیتزینگر[۴] می‌باشد. بویژه نشان می‌دهیم در جبرهای لی متناهی‌البعد با بعد یکسان، ایزوکلینیسم و یکریختی بودن معادلند. همچنین مشابه با نتیجه یامازاکی[۵] که در حالت گروه‌ها مورد بررسی قرار گرفت، نشان می‌دهیم هر توسیع رسته یک جبر لی متناهی‌البعد، تصویر همریخت یک پوشش رسته آن است.

---

[۱] Schur
[۲] Hall
[۳] Batten
[۴] Stitzinger
[۵] Yamazaki

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

a متعلق به مجموعه S	$a \in S$
به ازای هر	$\forall$
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموع مستقیم N و M	$M \oplus N$
حاصل ضرب دکارتی M_i ها	$\prod M_i$
حاصل ضرب تانسوری N و M	$M \otimes_R N$
A یک زیر مجموعه از B است	$A \subseteq B$
اشتراک دو مجموعه A و B	$A \cap B$
اشتراک مجموعه‌های A_i	$\cap A_i$
هسته همریختی f	$\mathrm{K}er(f)$
تصویر همریختی f	$\mathrm{I}m(f)$
بعد جبر لی L	$\mathrm{d}imL$
f یک تابع از مجموعه A به مجموعه B است	$f : A \longrightarrow B$
تحدید همریختی f روی مجموعه A	$f\|_A$
یکریخت است با	$\cong$
ایزوکلینیک است با	$\sim$
زیر جبر تولید شده توسط زیرمجموعه X از یک جبر لی	$< X >$
جبر خارج قسمت A بر B	A/B

H زیر جبر لی L است	$H \leq L$
I یک ایده‌ال L است	$I \lhd L$
جابجاگر عناصر x و y	$[x, y]$
فضای حاصل ضرب X و Y	$[X, Y]$
مرکز جبر لی L	$Z(L)$
مشتق جبر لی L	$L^{۲}$
مجموعه تبدیلات خطی از فضای برداری V به V	$\mathrm{E}nd(V)$
جبر همه تبدیلات خطی از فضای برداری V به V	$\mathrm{gl}(V)$
ضربگر شور جبر لی L	$M(L)$

پیشگفتار

پایان‌نامه حاضر به بررسی ساختار جبرهای لی، ضربگر شور آن‌ها و مفهوم ایزوکلینیسم در آن‌ها می‌پردازد. همچنین برخی قضایا و نتایج در گروه‌ها را در جبرهای لی بررسی می‌کند.

فصل اول شامل چهار بخش است که بخش اول آن مروری بر مفاهیم پایه‌ای جبرهای لی دارد. در بخش دوم به معرفی جبرهای لی پوچ‌توان پرداخته‌ایم. بخش سوم نحوه ساختن ماگما و جبر لی آزاد روی مجموعه غیرتهی و خواص آن‌را ارائه می‌دهد و در فصل چهارم به حاصلضرب تانسوری جبرهای لی پرداخته‌ایم.

در فصل دوم که شامل دو بخش است، به مقاله مانیهن[6] [۱۰]، تحت عنوان ایزوکلینیسم‌ها در جبرهای لی می‌پردازیم. مانیهن نشان می‌دهد برخلاف گروه‌ها، در جبرهای لی متناهی‌البعد با بعد مساوی ایزوکلینیسم بودن و یکریختی بودن معادلند (قضیه ۳.۱.۲). همچنین جبرهای پوششی یک جبر لی متناهی‌البعد یکریختند (لم ۵.۲.۲).

فصل سوم شامل چهار بخش است. در این فصل به بررسی مقاله سالمکار[7] و همکارانش [۱۱]، تحت عنوان برخی خواص ضربگر شور و پوشش‌های جبرهای لی پرداخته‌ایم. سالمکار مشابه با نتیجه یامازاکی [۱۳] که در گروه‌ها در سال ۱۹۶۴ مورد بررسی قرار گرفت، نشان می‌دهد که هر توسیع رسته یک جبر لی متناهی‌البعد، تصویر همریخت یک پوشش رسته آن است (قضیه ۲.۲.۳). بعلاوه یک ایده‌ال را در هر جبر لی معرفی می‌کند که کوچکترین ایده‌ال مشمول در مرکز است و جبر خارج قسمتی آن تواناست. همچنین شکل‌های مختلفی از این ایده‌ال را نشان داده و در آخر ارتباط بین این ایده‌ال و مفهوم ضربگر شور را مطالعه می‌کند.

[6] Moneyhun
[7] Salemkar

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی درباره جبرهای لی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اساسی جبرهای لی

در این فصل، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی جمع‌آوری شده است. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر و یافتن برهان برای قضایای این فصل، می‌توان به مراجع [۴] و [۵] مراجعه نمود.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم V فضایی برداری روی میدان F باشد. دراین‌صورت نگاشت $m : V \times V \longrightarrow V$ را دوخطی گوییم، هرگاه به ازای هر $x,\ y,\ z \in V$ و $a,\ b \in F$،

$$m(ax+by,z) = am(x,z) + bm(y,z).$$

$$m(x,ay+bz) = am(x,y) + bm(x,z).$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان F باشد. دراین‌صورت A را یک جبر می‌نامیم، هرگاه نگاشتی دوخطی مانند m روی A تعریف شده باشد. در این حالت نگاشت دوخطی m را یک ضرب روی A می‌نامند و $m(a,b)$ را با ab نشان می‌دهیم. جبر A را شرکت‌پذیر نامیم، هرگاه به ازای هر $a,\ b,\ c \in A$ داشته باشیم $(ab)c = a(bc)$.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنیم V یک فضای برداری $n-$بعدی روی میدان F و $\mathrm{E}nd(V)$ فضای برداری شامل همه‌ی تبدیلات خطی از V به V باشند. دراین‌صورت اگر $a,\ b \in \mathrm{E}nd(V)$، آن‌گاه $\mathrm{E}nd(V)$ همراه با ضرب تعریف شده زیر یک جبر شرکت‌پذیر است.
برای هر $v \in V$،

$$ab(v) = a(b(v)).$$

تعریف ۳.۱.۱ جبر L یک جبر لی است اگر ضرب آن دارای خصوصیات زیر باشد:

(L_1) به ازای هر $x \in L$، $xx = 0$.

(L_2) به ازای هر x، y، $z \in L$، $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$.

شرط (L_2) اتحاد ژاکوبی نامیده می‌شود.

توجه ۱.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد به‌طوری‌که $x,\ y \in L$. دراین‌صورت بنابر (L_1) و دوخطی بودن ضرب روی L داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)(x+y) \\ &= xx + xy + yx + yy \end{aligned}$$

$$= xy + yx$$

بنابراین

$$xy = -yx. \tag{۱.۱}$$

از طرف دیگر از (۱.۱) نتیجه می‌شود که اگر مشخصه میدان ۲ نباشد، آن‌گاه به ازای هر $x \in L$، $xx = ۰$. لذا روابط (۱.۱) و $(L_۱)$ معادلند. همچنین طبق (۱.۱) اتحاد ژاکوبی معادل است با:
به ازای هر $x,\ y,\ z \in L$،

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = ۰.$$

توجه **۲.۱.۱** پایه و بعد جبر لی L همان پایه و بعد آن به عنوان فضای برداری است. بنابراین جبر لی L را متناهی‌البعد گوییم، هرگاه L به عنوان فضای برداری دارای بعد متناهی باشد.

مثال **۲.۱.۱** فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ را در نظر گرفته و ضرب زیر را روی $\mathbb{R}^۳$ تعریف می‌کنیم:
برای هر $X = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $Y = (y_۱, y_۲, y_۳)$،

$$XY = X \times Y = (x_۲y_۳ - x_۳y_۲, x_۳y_۱ - x_۱y_۳, x_۱y_۲ - x_۲y_۱)$$

که در آن $X \times Y$ همان ضرب خارجی دو بردار می‌باشد. دراین‌صورت $\mathbb{R}^۳$ با ضرب فوق یک جبر لی متناهی‌البعد است.

مثال **۳.۱.۱** فرض کنیم $M_n(F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F باشد. به ازای هر $A,\ B \in M_n(F)$ حاصلضرب لی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = AB - BA.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که $M_n(F)$ به همراه عمل فوق تشکیل یک جبر لی متناهی‌البعد روی میدان F می‌دهد و این جبرلی را با $\mathrm{gl}(V)$ نمایش می‌دهیم.

توجه ۳.۱.۱ فرض کنیم A جبر شرکت‌پذیر دلخواهی باشد. اگر به ازای هر $a,\ b \in A$ تعریف کنیم $m(a,b) = [a,b] = ab - ba$، آن‌گاه به سادگی می‌توان بررسی کرد که A همراه با این عمل دارای ساختار جبر لی می‌باشد که آن‌را با $[A]$ نشان می دهیم. آدو[1] نشان داد که هر جبر لی روی میدانی با مشخصه صفر را می‌توان به عنوان زیر جبری از چنین جبر لی‌ای در نظر گرفت. ایوازاوا[2] در مورد جبرهای لی که روی میدان‌های با مشخصه ناصفر تعریف شده‌اند، همین حکم را ثابت نمود. به همین دلیل $[-,-]$ را برای نشان دادن ضرب روی هر جبر لی بکار می‌بریم.

تعریف ۴.۱.۱ جبر لی L را آبلی گوییم، هرگاه به ازای هر $x,\ y \in L$، داشته باشیم $[x,y] = ۰$.

توجه ۴.۱.۱ اگر L یک جبر لی متناهی‌البعد روی میدان F با پایه $\beta = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $۱ \leq i,\ j \leq n$، اسکالرهایی مانند $a_{ij}^k \in F$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=۱}^n a_{ij}^k x_k$$

مجموعه‌ی a_{ij}^k را ثابت ساختاری برای L نسبت به پایه‌ی β می‌گوییم که به وضوح این اسکالرها به پایه β کاملاً بستگی دارند. واضح است که برای مشخص نمودن ضرب لی، کافی است مقادیر a_{ij}^kها معلوم باشند، اما با توجه به شرایط $[x_i, x_i] = ۰$ و $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ در جبرهای لی کافی است، این مقادیر برای $۱ \leq i < j \leq n$، مشخص شوند.

[1] Ado
[2] Iwasawa

تعریف ۵.۱.۱ زیرفضای B از جبر A را زیر جبری از A می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x,\ y \in B$، داشته باشیم $xy \in B$.

نتیجه ۱.۱.۱ فرض می‌کنیم A یک جبر و B زیر جبری از A باشد. دراین‌صورت اگر A شرکت‌پذیر باشد، آن‌گاه B نیز شرکت‌پذیر است. همچنین اگر A یک جبر لی باشد، آن‌گاه B نیز یک جبر لی است. در این حالت زیر جبر B را با نماد $B \leq A$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۱.۱ در مثال ۱.۱.۱ دیدیم که $\mathrm{E}nd(V)$ یک جبر شرکت‌پذیر است و بنابر توجه ۳.۱.۱، $\mathrm{E}nd(V)$ همراه با $[-,-]$ ساختار یک جبر لی را دارد. حال اگر A را یک زیر فضای برداری از $\mathrm{E}nd(V)$ در نظر بگیریم که شامل همه‌ی تبدیلات خطی از V به V باشد به‌طوری‌که برای هر $v \in V$ و $a \in F$ داشته باشیم $f(v) = av$، آن‌گاه A یک زیر جبر لی $\mathrm{E}nd(V)$ است.

تعریف ۶.۱.۱ زیرفضای I از جبر A را ایده‌ال A می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in A$ و $y \in I$، داشته باشیم $yx,\ xy \in I$. همچنین اگر A یک جبر لی باشد، آن‌گاه ایده‌ال I را با نماد $I \lhd A$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۱.۱ اگر A یک جبر و I ایده‌ال A باشد، آن‌گاه I یک زیر جبر A می‌باشد.

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو زیر جبر لی از جبر لی L باشند. دراین‌صورت مجموعه‌ی

$$X+Y=\{x+y : x\in X,\ y\in Y\}$$

یک زیر جبر L است و این حاصل‌جمع را می‌توان به تعداد متناهی تعمیم داد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض می‌کنیم L یک جبر و $X\subseteq L$ باشد. دراین‌صورت اشتراک تمام زیر جبرهای L که شامل X هستند را زیر جبر تولید شده توسط X نامیده و با نماد $< X >$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۳.۱.۱ اگر L یک جبر و $X\subseteq L$ باشد، آن‌گاه $< X >$ کوچکترین زیر جبر L شامل X است.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر باشد. دراین‌صورت زیر مجموعه X از L را یک مجموعه مولد برای L گوییم، هرگاه $L=< X >$. اگر L یک جبر لی باشد، آن‌گاه L را متناهیاً تولید شده می‌نامیم، هرگاه X متناهی باشد.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر و B یک ایده‌ال A باشد. همچنین A/B یک فضای خارج قسمتی باشد. دراین‌صورت ضرب روی A یک ضرب روی A/B به صورت $\overline{x}\,\overline{y}=\overline{xy}$ ($\overline{x}$ نشان دهنده هم‌مجموعه $x\in A$ در A/B است) را القا می‌کند. بعلاوه، اگر A یک جبر لی باشد، آن‌گاه A/B نیز یک جبر لی است.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی و W و V زیر فضاهای L باشند. دراین‌صورت برای هر $v \in V$ و $w \in W$، مجموعه‌ی متشکل از ترکیب‌های خطی از عناصر $[v, w]$ را فضای حاصل‌ضرب V و W نامیده و با نماد $[V, W]$ نشان می‌دهیم.

لم ۲.۱.۱ اگر I و J ایده‌ال‌های L باشند، آن‌گاه $[I, J]$ یک ایده‌ال از L است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد، دراین‌صورت مرکز L را به صورت

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0, \forall y \in L\}$$

و مشتق L را به صورت $L^2 = [L, L]$ تعریف می‌کنیم.

نتیجه ۴.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد، دراین‌صورت $Z(L)$ و L^2 ایده‌ال‌های L هستند. همچنین L/L^2 یک جبر لی آبلی است.

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان F باشند دراین‌صورت تبدیل خطی $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ را یک همریختی جبرهای لی گوییم، هرگاه به ازای هر $x,\ y \in L_1$،

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

توجه شود که $[-, -]$ سمت چپ در تساوی بالا ضرب در L_1 و $[-, -]$ دوم ضرب در L_2، در نظر گرفته شده است. همریختی φ را یکریختی گوییم، هرگاه φ دوسویی باشد.

به آسانی دیده می‌شود که اگر φ یک همریختی جبرهای لی باشد، آن‌گاه $Ker\varphi$، یک ایده‌ال از L_1 و $Im\varphi$، یک زیر جبر لی L_2 می‌باشند. برای هر ایده‌ال I در L، همریختی $\pi : L \longrightarrow L/I$ با ضابطه $\pi(l) = l + I$ را همریختی طبیعی می‌نامیم.

قضیه ۲.۱.۱ قضایای یکریختی:

۱) اگر $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ یک همریختی جبرهای لی باشد، آن‌گاه $L_1/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

۲) اگر I و J ایده‌ال‌هایی از جبر لی L باشند، آن‌گاه $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.

۳) اگر I و J ایده‌ال‌هایی از جبر لی L باشند، به‌طوری‌که $I \subseteq J$، آن‌گاه J/I ایده‌الی از L/I است و

$$\frac{L/I}{J/I} \cong \frac{L}{J}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد. دراین‌صورت به ازای هر $x \in L$، تبدیل خطی $ad_x : L \longrightarrow L$ با ضابطه‌ی $ad_x(l) = [x, l]$ برای هر $l \in L$، را نگاشت الحاقی می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد. دراین‌صورت نگاشت خطی $d : L \longrightarrow L$ را یک مشتق‌گیری L گوییم، هرگاه به ازای هر $x,\ y \in L$،

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

حال فرض کنیم $\mathrm{Der}(L)$ مجموعه‌ی همه‌ی مشتق‌گیری‌های L باشد. دراین‌صورت اگر $d_1,\ d_2 \in \mathrm{Der}(L)$، آن‌گاه

$$[d_1, d_2](xy) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(xy)$$

$$= d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) - d_2(d_1(x)y + xd_1(y))$$
$$= d_1(d_2(x))y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + xd_1(d_2(y))$$
$$-d_2(d_1(x))y - d_1(x)d_2(y) - d_2(x)d_1(y) - xd_2(d_1(y))$$
$$= (d_1(d_2(x)) - d_2(d_1(x)))y + x(d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(y)))$$
$$= [d_1, d_2](x)y + x[d_1, d_2](y).$$

در نتیجه $[d_1, d_2] \in \mathrm{D}er(L)$. حال به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\mathrm{D}er(L)$ ساختار یک جبر لی را دارد.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنیم L یک جبر لی باشد. دراین‌صورت به ازای هر $x \in L$، نگاشت الحاقی $ad_x : L \longrightarrow L$ یک مشتق‌گیری L است. زیرا بنابر اتحاد ژاکوبی اعضای L و توجه ۳.۱.۱ داریم:
برای هر $y,\ z \in L$،

$$\begin{aligned} ad_x([y,z]) &= [x,[y,z]] \\ &= -[z,[x,y]] - [y,[z,x]] \\ &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] \\ &= [ad_x(y),z] + [y,ad_x(z)]. \end{aligned}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان F باشند، ضرب روی L_1 را با $[-,-]_1$ و ضرب روی L_2 را با $[-,-]_2$ نمایش دهیم. اگر $\theta : L_1 \longrightarrow \mathrm{D}er(L_2)$ یک همریختی جبرهای لی باشد، آن‌گاه با ضرب زیر یک ساختار جبر لی به حاصل‌جمع مستقیم L_1 و L_2 (به عنوان فضای برداری) می‌دهیم.
برای هر $x_1,\ y_1 \in L_1$ و $x_2,\ y_2 \in L_2$،