دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی و آمار

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc.)
رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست دو سالانه در تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما:

دکتر قاسم توحیدی

استاد مشاور:

دکتر مسعود صانعی

پژوهشگر:

احمد جلالی

پاییز ۱۳۹۲

نیکی و بدی که در نهاد بشر است　　شادی و غمی که در قضا و قدر است

به چرخ مکن حواله کاندر ره عقل　　چرخ از تو هزار بار بیچاره تر است

به نام خداوند ایثار و انصاف

تقدیم به کسانی که از گذشته تا به امروز در راه پیش‌رفت علم تحقیق در عملیات زحمت کشیده‌اند.

سپاس گزاری...

سپاس و تشکر از تمامی کسانی که مرا در انجام این پژوهش یاری نمودند.

احمد جلالی

پاییز ۱۳۹۲

بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی دانشجو: احمد جلالی **سال و نیمسال اخذ پایان نامه:** ۹۲-۹۱ دوم
شماره دانشجویی: ۹۰۰۷۹۲۲۸۷

عنوان پایان نامه: شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست دو سالانه در تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما: دکتر قاسم توحیدی

استاد مشاور: دکتر مسعود صانعی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی
گرایش: تحقیق در عملیات

نام واحد دانشگاهی: تهران مرکزی **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** پاییز ۱۳۹۲
کد واحد: ۱۰۱

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، شاخص مالم‌کوئیست، بهره‌وری، شاخص مالم‌کوئیست دوسالانه

چکیده: در این پایان‌نامه، شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست (MPI) جدیدی تحت عنوان شاخص مالم‌کوئیست دوسالانه بررسی می‌شود که دارای سه ویژگی جالب است: ۱) تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، از نشدنی بودن برنامه‌ریزی خطی جلوگیری می‌کند. ۲) تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، پیش‌بینی پس‌روی فنی را ممکن می‌سازد. ۳) هرگاه دوره‌ای به دوره‌های زمانی قبلی اضافه شود محاسبات قبلی از بین نمی‌رود.

نتایج نشان می‌دهند که در صورت تجزیه شاخص مالم‌کوئیست مجاورتی، حدود ۱۳ % مشاهدات در مجموعه داده‌ها را می‌توان به دلیل نشدنی بودن آن نادیده گرفت. استفاده صرف از داده‌های تقلیل یافته از مجموعه داده‌ها می‌تواند به نتایج کاملاً متفاوتی نسبت به زمانی که از شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه برای همه داده‌ها استفاده می‌کنیم منجر شود. همچنین نتایج نشان می‌دهند که هنگام استفاده از شاخص مالم‌کوئیست کلی، بهره‌وری برآورده شده بین دو دوره زمانی در صورتی که دوره زمانی سومی به داده‌ها اضافه شود به طور کلی تغییر خواهد کرد، در حالی که شاخص مورد بررسی در این پایان‌نامه مصون از این مشکل است.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه مناسب است تاریخ و امضاء:

فهرست مطالب

لیست جداول خ

لیست تصاویر ذ

۱ پیش‌گفتار ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ بیان مسئله ۲

۳.۱ اهمیت موضوع تحقیق ۳

۴.۱ تاریخچه ۳

۵.۱ نوآوری ۴

۶.۱ سوال تحقیق ۴

۷.۱ تعاریف ۵

۸.۱ مروری بر فصول آینده ۵

۲ آشنایی با DEA و MPI ۶

۱.۲ مقدمه‌ای بر DEA و کاربردهای آن ۶

۱.۱.۲ تابع تولید ۷

۲.۱.۲ مجموعه امکان تولید ۸

۳.۱.۲ کارایی ۹
۴.۱.۲ ورودی ۱۰
۵.۱.۲ خروجی ۱۰
۶.۱.۲ کارایی مطلق ۱۱
۷.۱.۲ کارایی نسبی ۱۱
۸.۱.۲ اثر بخشی ۱۱
۹.۱.۲ بهره‌وری ۱۱
۱۰.۱.۲ ناکارایی ۱۲
۱۱.۱.۲ مدل‌های اساسی در DEA ۱۲
۱۲.۱.۲ مدل غیر شعاعی SBM در DEA ۱۳
۲.۲ مقدمه‌ای بر MPI ۱۷
۳.۲ اندیس مالم کوئیست ۱۷
۱.۳.۲ تعریف تغییر کارایی، Catch-up ۱۹
۲.۳.۲ تعریف تغییر تکنولوژی، Frontier-Shift ۱۹
۳.۳.۲ محاسبه MI با بکار بردن مدل‌های شعاعی DEA ۲۶
۴.۳.۲ محاسبه MI با بکار بردن مدل‌های غیر شعاعی DEA ۲۸
۵.۳.۲ محاسبه MI با بکار بردن مدل غیر شعاعی و غیر ماهیتی ۳۰
۴.۲ نتایج LP نشدنی ۳۲

۳ شاخص تغییر بهره‌وری مالم‌کوئیست دو سالانه ۳۴

۱.۳ مقدمه ۳۴
۲.۳ تجزیه سه-عاملی شاخص مالم‌کوئیست ۳۵

۳.۳ شاخص مالم‌کوئیست مجاورتی ۳۸
۱.۳.۳ تجزیه کامل سه-عاملی شاخص مالم‌کوئیست مجاورتی ۳۹
۴.۳ شاخص مالم‌کوئیست کلی ۴۴
۱.۴.۳ تجزیه شاخص مالم‌کوئیست کلی ۴۴
۵.۳ مقایسه شاخص‌های مالم‌کوئیست مجاورتی و کلی ۴۵
۶.۳ شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه ۴۵
۱.۶.۳ تجزیه سه-عاملی شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه ۴۹
۲.۶.۳ تجزیه چهار-عاملی شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه ۵۰
۳.۶.۳ تجزیه‌ها برای نمونه‌های موجود در شکل (۲.۳) ۵۰

۴ مثال تجربی **۵۲**

۵ بحث و نتیجه‌گیری **۵۹**

مراجع **۶۱**

لیست جداول

۱.۲ اطلاعات شش واحد تصمیم‌گیری در دو دوره زمانی با دو ورودی و دو خروجی . . ۲۱

۲.۲ مقدار شاخص مالم‌کوئیست ۲۲

۳.۲ مجموعه داده‌ها برای اقتصاد صنعتی چین در سال‌های ۲۰۰۹ – ۲۰۰۵ . . . . . ۲۴

۴.۲ مقدار شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست ۲۵

۵.۲ اطلاعات دو DMU که هریک، دو ورودی و دو خروجی در دو دوره زمانی دارند،
برای مقایسه روش‌های محاسبه MI ۳۱

۶.۲ جواب حاصل از حل جدول (۱.۲) ۳۱

۷.۲ اطلاعات دو DMU که هریک، یک ورودی و یک خروجی در دو دوره زمانی
دارند برای بررسی نتایج LP نشدنی ۳۲

۸.۲ جواب حاصل از حل جدول (۳.۲) بر اساس مدل غیرشعاعی-غیرماهیتی ۳۳

۱.۴ اطلاعات شرکت‌های تولید کننده برق امریکا ۵۲

۲.۴ نتایج حاصل از شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه در غیاب نشدنی بودن برخی داده‌ها ۵۳

۳.۴ نتایج حاصل از شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه با در نظر گرفتن نشدنی بودن
برخی داده‌ها ۵۴

۴.۴ اطلاعات چهار DMU که هر کدام دو ورودی و دو خروجی در سه دوره زمانی دارند ۵۵

۵.۴ جواب‌های بدست آمده از حل برنامه GAMS برای دوره‌های t و t+۱ . . . . . ۵۶

۶.۴ جواب‌های بدست آمده از حل برنامه GAMS برای دوره‌های t+۱ و t+۲ . . . . ۵۷
۷.۴ جواب نهایی حاصل از حل داده‌های جدول (۴.۴) توسط برنامه GAMS ۵۸

لیست تصاویر

۱.۲ مدل جمعی تحت فرض بازده به مقیاس متغیر ۱۴

۲.۲ نمایش هندسی تغییرات کارایی و تغییرات تکنولوژی ۱۸

۱.۳ نمایش هندسی روند تجزیه سه عاملی ۳۵

۲.۳ نمایش هندسی شاخص مالم‌کوئیست سالانه ۴۸

فصل ۱
پیش‌گفتار

۱.۱ مقدمه

شاخص‌های مالم‌کوئیست [۱] [۵] حدود سه دهه است که جزء رایج ترین شاخص‌های اندازه‌گیری تغییرات بهره‌وری محسوب می‌شوند. فار [۲] و همکاران [۱۱] پیشنهاد دادند که شاخص‌های مالم‌کوئیست در ابتدا به مؤلفه‌های تغییر بهره‌وری و تغییر فنی تجزیه شوند؛ تجزیه این دو عامل تا حد زیادی، اگرچه نه به صورت جهانی، عواملی پذیرفته شده محسوب می‌شوند. تجزیه بعدی آن‌ها به صورت سه-عاملی، که در آن مؤلفه تغییر مقیاس نیز به آن‌ها اضافه گردید. البته در این تجزیه، محاسبه تغییرات فنی تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، به نشدنی بودن برنامه‌ریزی خطی منجر می‌شود. به تازگی دو شاخص تحت فرض بازده به مقیاس متغیر برای شاخص‌های مالم‌کوئیست مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از نشدنی بودن جلوگیری می‌کنند. اولی مربوط به شاخص مالم‌کوئیست متوالی [۳] است [۲۰] که زنجیره‌ای از فناوری‌های بدست آمده از همه داده‌ها را برای همه واحدها و همه دوره‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد و دو دوره را با هم مقایسه می‌کند.

دومی شاخص مالم‌کوئیست کلی [۴] است [۱۶] که یک تکنولوژی واحد جهانی را که از همه داده‌ها

[۱] Malmquist Indices
[۲] Fare
[۳] Sequential Malmquist Index
[۴] Global Malmquist Index

ساخته شده است برای همه واحدها و دوره‌های موجود در نمونه‌ها بررسی می‌کند. اشکال اصلی شاخص مالم‌کوئیست متوالی آن است که این شاخص نمی‌تواند پس‌روی فنی را تشخیص دهد، در حالی که اشکال شاخص مالم‌کوئیست کلی آن است که دوره زمانی اضافی را برای محاسبه مجدد همه برآوردهای قبلی می‌طلبد، و در این محاسبه مجدد امکان دارد تغییراتی به وجود آید. این اشکالات محققان را بر آن داشت که شاخص مالم‌کوئیست جدیدی ارائه دهند که از اشکال نشدنی بودن به دور باشد و بتواند پس‌روی فنی و نیز پیش‌روی آن را اندازه‌گیری کند و زمانی که دوره‌های جدیدی به داده‌ها اضافه شدند بتواند تغییرات بهره‌وری را که قبلاً محاسبه شده‌اند ثابت نگه دارد.

۲.۱ بیان مسئله

شاخص‌های مالم‌کوئیست متعددی برای بررسی میزان پیش‌رفت و پس‌رفت بهره‌وری در تحلیل پوششی داده‌ها [۵] (DEA) معرفی شده‌اند که هر یک از آن‌ها دارای خواصی می‌باشند. در این پایان‌نامه شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه [۶] بررسی می‌شود که دارای خواص مفیدی به شرح زیر است:

الف) تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، نشدنی نیست.

ب) هرگاه دوره‌ای به دوره‌های زمانی قبلی اضافه شود محاسبات قبلی از بین نمی‌رود.

ج) تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، بررسی پس‌رفت فنی را امکان پذیر می‌کند.

در فصل چهارم مثالی ارائه می‌گردد که مدل بررسی شده را به تفصیل توضیح می‌دهد.

[۵] Data Envelopment Analysis
[۶] Biennial Malmquist Index

۳.۱ اهمیت موضوع تحقیق

با توجه به بررسی میزان پیش‌رفت و یا پس‌رفت واحدهای تصمیم‌گیری [۷] (DMUها) نسبت به زمان از نظر مدیریت از اهمیت بیشتری برخوردار است. بنابراین شاخص با ویژگی‌های برتر برای این بررسی بسیار مهم است.

۴.۱ تاریخچه

اندازه بهره‌وری یک موضوع مهم برای تحقیق در DEA است. یک راه خیلی مفید برای اندازه بهره‌وری در DEA شاخص مالم‌کوئیست هست که به نام پروفسور مالم‌کوئیست نامیده شده است. MPI[۸] روی عقیده او پایه‌گذاری شده و به وسیله کیو [۹] مطرح شده بود[۱۰] . MPI رابطه کارایی یک DMU را که در دوره‌های زمانی مختلف مورد استفاده تکنولوژی از یک دوره پایه بوده محاسبه می‌کند. فار و همکاران [۱۹] اندازه کارایی فارل [۱۰] را با اندازه بهره‌وری کیو و همکاران ترکیب کردند [۱۰] و یک DEA مبنی بر MPI را ساخت و آن را به دو مولفه که یکی تغییرات کارایی را اندازه می‌گیرد و دیگری تغییرات تکنولوژی را اندازه می‌گیرد تجزیه کرد. چن [۱۱] یک MPI غیر شعاعی با یک کاربرد گویا از منابع اصلی چنیـــن معرفی کرد [۲۴]. پاستور [۱۲] و لوول [۱۳] یک MPI موضعی را مطرح کردند [۱۶]. زلینیوک [۱۴] یک MPI به‌هم پیوسته مبنی بر نمره کارایی فارل به‌هم پیوسته را گسترش داد [۲۲]. یو [۱۵] یک تجزیه جدید از MPI را فراهم آورد که میزان تغییر بهره‌وری متغیر ورودی را اندازه می‌گرفت [۲۳].

[۷] Decision Making Units
[۸] Malmquist Productivity Index
[۹] Caves
[۱۰] Farrell
[۱۱] Chen
[۱۲] Pastor
[۱۳] Lovell
[۱۴] Zelenyuk
[۱۵] Yu

لو [۱۶] و لیو [۱۷] یک SBM[۱۸] مبنی بر MPI را برای ارزیابی بهره‌وری از شرکت‌های سرمایه‌گذاری تایوان پیشنهاد دادند [۲۱]. کائو [۱۹] یک مدل DEA وزن‌دار شده برای MPI موضعی مطرح کرد و آن را به کار برد تا تغییرات بهره‌وری جنگ‌های تایوان را قبل و بعد از سازماندهی آنالیز کند. پاستور یک شاخص تغییر بهره‌وری مالم‌کوئیست شاخه‌ای را معرفی کرد. فار آن را به کار برد تا رشد بهره‌وری را در کشورهای صنعتی آنالیز کند [۱۱].

۵.۱ نوآوری

در این پایان‌نامه، در فصل چهارم یک مثال تجربی ارائه می‌گردد که شاخص مالم‌کوئیست دوسالانه را با دو شاخص مالم‌کوئیست مجاورتی [۲۰] و شاخص مالم‌کوئیست کلی مقایسه می‌نماید و در این مثال نواقص شاخص‌های موجود در مقایسه با شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه به وضوح نشان داده می‌شوند.

۶.۱ سوال تحقیق

سوالاتی که در این زمینه مطرح می‌شوند چنین است:

۱- آیا در شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه، تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، نشدنی بودن برنامه ریزی خطی رخ نمی‌دهد؟

۲- آیا در شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه، تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، بررسی پس‌رفت فنی امکان پذیر است؟

۳- آیا در شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه، اگر دوره‌ای به دوره‌های زمانی قبلی اضافه شود، محاسبات

[۱۶] Lo
[۱۷] Lu
[۱۸] Slacks Based Measure
[۱۹] Kao
[۲۰] Adjacent Malmquist Index

قبلی ثابت باقی می‌مانند؟

۷.۱ تعاریف

تحلیل پوششی داده‌ها: یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی [۲۱] و یا محاسبه بهره‌وری تعداد متناهی از واحدهای تصمیم‌گیری متجانس در حالت چند ورودی [۲۲] و چند خروجی [۲۳] است [۱].

شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست: بررسی تغییر بهره‌وری یک واحد تصمیم‌گیری بین دو دوره زمانی t و t+۱ [۹].

تغییر کارایی (Catch-Up) : نسبت کارایی DMU_o در دوره t+۱ با مرز دوره t+۱ به کارایی DMU_o در دوره t با مرز دوره t [۹].

انتقال مرز (Frontier-Shift) : تأثیر میزان انتقالی که مرز از دوره t به دوره t+۱ پیدا می‌کند [۹].

۸.۱ مروری بر فصول آینده

در فصل دوم، ابتدا مفاهیم تحلیل پوششی داده‌ها مطرح می‌شود سپس، به بررسی اندیس مالم‌کوئیست و مفاهیم مرتبط با آن پرداخته می‌شود. سپس، مثالی برای درک بیشتر مطالب گفته شده ارائه می‌گردد. در انتهای این فصل نتایج حاصل از LP نشدنی بیان و مثالی در همین زمینه ارائه می‌گردد. در فصل سوم به بیان شاخص مالم‌کوئیست دو سالانه و تجزیه آن به مولفه‌های متعدد پرداخته می‌شود. در فصل چهارم نمونه‌ای تجربی ارائه می‌گردد که به بررسی شاخص مالم‌کوئیست مورد نظر و مقایسه آن با شاخص‌های رقیب می‌پردازد. سرانجام در فصل پنجم نتیجه‌گیری خواهد آمد.

[۲۱] Efficiency
[۲۲] Input
[۲۳] Output

فصل ۲
آشنایی با DEA و MPI

۱.۲ مقدمه‌ای بر DEA و کاربردهای آن

یکی از شاخه‌های مهم در علم تحقیق در عملیات تحلیل پوششی داده‌ها است که یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی و یا محاسبه بهره‌وری تعداد متناهی از واحدهای تصمیم گیری متجانس در حالت چند ورودی و چند خروجی است. هر واحد تصمیم‌گیری به عنوان بخشی از یک مجموعه که ورودی‌های هم‌نوع را برای تولید خروجی‌های هم‌نوع استفاده می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. در این روش، نیازی به تعیین شکل صریح تابع تولید نیست و از برنامه ریزی خطی برای ساختن یک سطح قطعه قطعه خطی (یا مرز [۱]) برای پوشاندن تمام داده‌ها استفاده می‌شود که این رویه از مبدأ می‌گذرد. کارایی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری نسبت به این مرز محاسبه می‌شود. در واقع، عملکرد تمامی مشاهدات را از طریق اندازه‌گیری فاصله آن‌ها تا مرز کارایی ارزیابی می‌کنند. به همین دلیل، به این روش تحلیل پوششی داده‌ها می‌گویند. نقاط واقع روی مرز کارا است و سایر واحدهای تصمیم‌گیری که در داخل سطح پوششی قرار می‌گیرند ناکارا هستند. نتیجه این ارزیابی میزان کارایی واحد تحت ارزیابی نسبت به دیگر واحدها می‌باشد و همواره مقداری بین صفر و یک است. همین‌طور، از طریق DEA می‌توان منابع و میزان ناکارایی را در هر ورودی و خروجی برای همه

[۱] Frontier

DMU ها تعیین کرد [۲]. در مدل‌های DEA امکان سه نوع جهت‌گیری با ماهیت ورودی، خروجی و بدون ماهیت وجود دارد. در مدل‌ها با ماهیت ورودی واحدهای تصمیم‌گیری در پی آن هستند که با کمترین ورودی، مقدار مشخصی خروجی ایجاد کنند. در ماهیت خروجی، واحدهای تصمیم‌گیری با مقدار مشخصی از ورودی، بیشترین میزان خروجی ممکن را تولید می‌کنند که به این دو ماهیت شعاعی می‌گویند. در مدل‌های بدون ماهیت، واحدهای تصمیم‌گیری در پی کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌ها به طور همزمان هستند که این مدل‌ها را مدل‌های غیر شعاعی می‌نامند [۱].

مدل‌های DEA برای مقایسه و ارزیابی سازمان‌ها و صنایع مثل صنعت بانکداری، بیمه و بیمارستان کاربرد دارد. فرض کنید که یک سیستم تحت ارزیابی شامل n واحد تصمیم‌گیری باشد که در آن j–امین واحد m ورودی را برای تولید s خروجی استفاده می‌کند. برای آن که بتوان به بیان مطالب بعدی پرداخت ابتدا به بیان یک سری تعاریف پرداخته می‌شود [۲].

۱.۱.۲ تابع تولید

تابع تولید [۲] تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را بدهد و با داشتن آن می‌توان قضاوت نمود که یک واحد تصمیم‌گیری، کارا است یا نه [۱]. معمولاً به دلیل پیچیدگی فرایند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن تابع تولید، اغلب تابع تولید را نمی‌توان در دست داشت یا به دست آوردن آن بسیار مشکل می‌باشد از این رو می‌توان تابع تولید را تقریب زد [۱].

تقریب تابع تولید به دو روش پارامتری و غیر پارامتری انجام می‌پذیرد:

۱) **روش پارامتری:** در این روش شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌نمایند. ساده‌ترین تابعی که می‌توان در نظر گرفت، رابطه خطی بین x و y است که عبارت است از: $y = \alpha x + \beta$ که در آن α و β پارامترهایی

[۲] Production Function

هستند که بایستی با توجه به مشاهدات و به کار بردن روش‌های ریاضی مشخص گردند. روش‌های متفاوتی از جمله روش می‌نیمم کردن مجموع قدر مطلق انحرافات، روش می‌نیمم کردن مجموع مربعات انحرافات یا روش می‌نیمم نمودن ماکزیمم انحرافات و تابع کاب داگلاس [۳] را می‌توان نام برد. اما، روش پارامتری دارای ایراداتی می‌باشد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

الف) چرا شکل منحنی، صورت مورد نظر است؟

ب) اگر خروجی بیش از یکی باشد، چگونه می‌توان منحنی برازش داد؟

ج) مشکل تمایل مرکزی منحنی را چگونه می‌توان حل نمود؟

ایرادات فوق، اساسی‌ترین مشکلات روش پارامتری می‌باشد که برای رفع مشکلات فوق در سال ۱۹۵۷ فارل روش غیر پارامتری را ارائه نمود [۱].

۲) **روش غیر پارامتری:** در این روش شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند که یکی از این روش‌ها تحلیل پوششی داده‌ها است [۱].

۲.۱.۲ مجموعه امکان تولید

همان‌طور که یادآور شدیم، با داشتن تابع تولید به راحتی می‌توان کارایی یک واحد تصمیم‌گیری را محاسبه نمود. اما، همان طوری که ذکر شد به دلایل مختلف تابع تولید به راحتی محاسبه نمی‌گردد و در بعضی مواقع به دست آوردن صورت تحلیلی آن غیر ممکن می‌باشد. از این رو مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید (PPS)[۴] می‌سازیم و مرز آن را تقریبی از تابع تولید می‌گیریم [۱].

مجموعه امکان تولید یک مرز تقریبی است که با توجه به تکنولوژی تولید دارای ویژگی‌های مورد نظر

[۳] Cobb-Doaglas
[۴] Production Possibility Set

می‌باشد:

۱) اصل شمول مشاهدات (ناتهی بودن) [۵]:

$$\forall j \quad (j = ۱, ۲, \cdots, n) \qquad (x_j, y_j) \in T.$$

این اصل در تمامی تکنولوژی‌ها قابل اجراست [۱].

۲) اصل بی‌کرانی اشعه(بازده به مقیاس ثابت [۶]**) :**

$$\forall (x, y) \quad \Big((x, y) \in T, \quad \forall \lambda (\lambda \geq ۰) \Longrightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T\Big).$$

۳) اصل تحدب [۷]**:**

$$\forall (x_۱, y_۱), \forall (x_۲, y_۲) \Big((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \in T, \quad \forall \lambda, \lambda \in [۰, ۱] \Longrightarrow \lambda (x_۱, y_۱) + (۱ - \lambda)(x_۲, y_۲) \in T\Big).$$

۴) اصل امکان پذیری [۸]**:**

$$\forall (x, y) \Big((x, y) \in T \quad \forall\, \overline{x}, \overline{x} \geq x, \quad \forall\, \overline{y}, \overline{y} \leqslant y \Longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in T\Big).$$

۵) اصل کمینه درون‌یابی [۹]**:**

T کوچکترین مجموعه امکان است که در چهار اصل فوق صدق می‌کند [۱].

مجموعه امکان تولید، که آن را با T نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$T = \Big\{(x, y) | \text{ بردار نامنفی } x \text{ بتواند بردار نامنفی } y \text{ را تولید کند } \Big\}.$$

۳.۱.۲ کارایی

کارایی از نسبت مقدار کاری که انجام شده به مقدار کاری که باید انجام شود به دست می‌آید. یعنی، از نسبت خروجی‌ها به ورودی‌ها به دست می‌آید [۲].

[۵] Nonempty
[۶] Constant Returns To Scale
[۷] Convexity
[۸] Possibility
[۹] Minimum Extrapolation Theorem