دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

طرح‌های بلوکی کامل گسترش یافته بهینه برای مشاهدات همبسته

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمارریاضی

مرضیه رحیمی

استاد راهنما

دکتر سعید پولادساز

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمارریاضی‌خانم مرضیه رحیمی

تحت عنوان

طرح‌های بلوکی کامل گسترش یافته بهینه برای مشاهدات همبسته

در تاریخ ۲۴ اسفند ۱۳۸۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر سعید پولادساز

۲ — استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر سروش علیمرادی

۳ — استاد داور ۱ — دکتر هوشنگ طالبی (دانشگاه اصفهان)

۴ — استاد داور ۲ — دکتر غلامرضا امیدی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر رسول نصر اصفهانی

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از
تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

فصل اول مقدمه ۱

فصل دوم طرح آزمایش ۵

۲–۱ مقدمه ۵

۲–۲ اصول پایه‌ای ۸

۲–۲–۱ طراحی یک آزمایش ۹

۲–۳ آشنایی با چند نوع طرح آزمایش ۱۰

۲–۳–۱ طرح‌های کاملا تصادفی شده ۱۰

۲–۳–۲ طرح‌های بلوکی کامل تصادفی شده ۱۲

۲–۳–۳ طرح‌های بلوکی ناقص ۱۳

۲–۳–۴ طرح‌های بلوکی ناقص متعادل ۱۳

فصل سوم طرح‌های بلوکی ۱۵

۳–۱ مقدمه ۱۵

۳–۲ ساختار کلی طرح‌های بلوکی ۱۶

۳–۲–۱ معرفی مدل آماری طرح‌های بلوکی ۱۶

۳–۲–۲ برآورد به روش حداقل مربعات معمولی () ۲۰

۳–۲–۳ برآورد به روش حداقل مربعات تعمیم‌یافته(GLS) ۲۳

۳–۲–۴ محاسبه‌ی ماتریس C برای هر بلوک ۲۵

۳–۳ معیارهای بهینگی ۲۷

۳–۴ بررسی بهینگی طرح‌های بلوکی متعادل ۳۳

فصل چهارم طرح‌های بهینه ۳۵
۴–۱ مقدمه ۳۵
۴–۲ آرایه‌های متعامد ۳۶
۴–۲–۱ چگونگی به دست آوردن طرح‌های بهینه با استفاده از آرایه‌ی نیم– متعادل ۳۸
۴–۳ طرح‌های بهینه برای ساختارهای همبستگی اتورگرسیو ۳۹
۴–۳–۱ محاسبه‌ی ماتریس C برای ساختارهای همبستگی اتورگرسیو ۳۹
۴–۳–۲ بررسی بهینگی برای ساختارهای همبستگی اتورگرسیو ۴۱
۴–۴ نتایج برای $AR(۱)$ ۴۵
۴–۴–۱ ماتریس Λ_k^* برای $AR(۱)$ ۴۶
۴–۴–۲ طرح‌های بلوکی کامل گسترش یافته $(ECBD)$های بهینه برای $\rho_۱ > ۰$ . . ۴۹
۴–۵ طرح‌های دودویی تعمیم‌یافته (GBD) بهینه برای $\rho_۱ > ۰$ ۵۵
۴–۶ طرح‌های بدون محدودیت بهینه برای $\rho_۱ > ۰$ ۵۷
۴–۶–۱ طرح‌های بهینه برای $\rho_۱ < ۰$ ۶۱
۴–۷ طرح‌های بهینه برای ساختارهای دیگر همبستگی ۶۶
۴–۷–۱ طرح‌های $ECBD$ بهینه برای $\rho_۱ > ۰$ ۶۷
۴–۷–۲ بلوک‌ها با اندازه‌ی $k = ۴$ ۶۷
۴–۷–۳ بلوک ها با اندازه‌ی $k = ۵$ ۶۸
۴–۷–۴ بلوک ها با اندازه‌ی $k = ۶$ ۶۸
۴–۷–۵ طرح‌های GBD و بدون محدودیت بهینه برای $\rho_۱ > ۰$ ۷۱
۴–۷–۶ طرح‌های GBD بهینه برای $\rho_۱ < ۰$ ۷۱

فصل پنجم شبیه سازی ۷۳
۵–۱ نوردیدن شبیه سازی شده ۷۳
۵–۲ مدل ریاضی برای الگوریتم ۷۶

پیوست ۷۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه طرح‌های آزمایشی را در حالتی که بین مشاهدات همبستگی وجود دارد در نظر می‌گیریم. تحت وابستگی کلی، طرح‌های بهینه از نظر تئوری به سختی مشخص می شوند. همچنین با روش‌های الگوریتمی نیز به سادگی به دست نمی‌آیند ولی این طرح‌ها در بعضی موارد که ساختار وابستگی مشخص باشد و برای مقادیر بخصوصی از پارامتر می‌توانند به دست آیند.

مدل‌های ساده‌ای مانند $AR(۱)$ یا $MA(۱)$ می‌تواند برای این وابستگی‌ها فرض شود. برای طرح‌های مورد نظر می‌توان برآورد کمترین مربعات تعمیم یافته را با فرآیندهای گفته شده استفاده نمود.

در این طرح‌ها فرض می‌شود که v تیمار و b بلوک با اندازه k وجود دارد، همچنین y_{ij} مشاهده واحد j از بلوک i باشد که $y_i = (y_{i۱}, ..., y_{ik})'$ و $y = ((y_۱)', ..., (y_b)')'$ است و مدل جمعی معمولی بلوک – تیمار به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$E(y) = T\tau + B\beta$$

که در آن T ماتریس وقوع تیمارها و B ماتریس مربوط به بلوک‌ها و τ و β به ترتیب بردارهای پارامترهای متناظر هستند.

رده‌بندی موضوعی: اولیه ۶۲K۱۰. ثانویه ۶۲K۰۵.

کلمات کلیدی: طرح‌های بلوکی ناقص متعادل، فرآیند اتورگرسیو مرتبه‌ی اول، طرح‌های دودویی تعمیم‌یافته، کمترین مربعات تعمیم‌یافته، آرایه‌ی نیم– متعادل، بهینگی عمومی.

فصل ۱

مقدمه

در تمامی زمینه‌های واقعی تحقیق، معمولا آزمایش‌هایی به وسیله‌ی پژوهشگران برای کشف موضوعی درباره‌ی فرآیند یا سیستمی خاص انجام می‌شود. به معنای واقعی کلمه، آزمایش یک آزمون است. آزمایش طرح شده، یک آزمون یا دنباله‌ای از آزمون‌ها است که در آن‌ها تغییرات مورد نظر، در متغیرهای ورودی فرآیند یا سیستم اعمال می شوند به قسمی که می‌توانیم علل تغییرات در پاسخ خروجی را مشاهده و مشخص کنیم. معمولا می‌توان فرآیند را به صورت ترکیبی از ماشین‌ها، روش‌ها، اشخاص و منابع دیگری تصور کرد که بعضی از ورودی‌ها را تبدیل به خروجی‌هایی می‌کنند که یک یا چند پاسخ قابل مشاهده دارند. بعضی از متغیرها در فرآیند کنترل پذیرند، در صورتی که بعضی دیگر کنترل ناپذیرند.

اهداف آزمون می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

۱. تعیین متغیرهایی که بیشترین تاثیر را در پاسخ y دارند.

۲. تعیین موقعیت متغیرهای موثر x، به طوری که تقریبا y همیشه نزدیک مقدار اسمی مطلوب باشد.

۳. تعیین موقعیت متغیرهای موثر x به طوری که تغییرپذیری y کوچک باشد.

۴. تعیین موقعیت متغیرهای موثر به طوری که اثرهای متغیرهای کنترل ناپذیر کمینه شوند.

روش‌های طرح آزمایش در بسط فرآیند و تعیین علت آشفتگی فرآیند به منظور اصلاح عملکرد نقش عمده دارند. در بسیاری موارد، ممکن است هدف، بسط خود فرآیند باشد، یعنی، فرآیندی که کمترین اثر از منابع خارجی تغییرپذیری را دارا باشد. روش‌های طرح آزمایش در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد وسیعی دارد. در واقع، عمل آزمایش را می‌توان به صورت بخشی از فرآیند علمی و به صورت یکی از راه‌های

فراگیری چگونگی کار سیستم‌ها یا فرآیندها در نظر گرفت. در رشته‌های مهندسی، طرح آزمایش ابزاری فوق‌العاده مهم برای اصلاح عملکرد فرآیندهای تولید است. همچنین کاربری وسیع در بسط فرآیندهای جدید دارد. کاربرد تکنیک‌های اولیه‌ی طرح آزمایش در توسعه فرآیند می تواند نتایج زیر را فراهم سازد:

۱. نتایج فرآیند را اصلاح کند.

۲. تغییرپذیری را کاهش داده و مطابقت آن را با نیازهای هدف یا اسمی نزدیک‌تر کند.

۳. زمان گسترش را تقلیل دهد.

۴. کل هزینه را تقلیل دهد.

روش‌های طرح آزمایش در طرح فعالیت‌های مهندسی نیز نقش عمده دارند، که در آن فرآورده‌های جدید تکامل یافته و فرآورده‌های فعلی اصلاح می شوند. بعضی کاربردهای طرح آزمایش در طرح مهندسی عبارت‌اند از:

۱. ارزیابی و مقایسه‌ی پیکربندی های طرح پایه‌ای

۲. ارزیابی دگرگونی‌های مواد

۳. انتخاب پارامترهای طرح که فرآورده به خوبی تحت شرایط محیطی بسیار متنوع کار کند، یعنی به طوری که فرآورده نیرومند باشد.

۴. تعیین پارامترهای طرح کلیدی فرآورده که بر عملکرد فرآورده اثر می‌گذارند.

استفاده از طرح آزمایش در این زمینه‌ها می‌تواند فرآورده‌هایی به وجود آورد که تولید آن‌ها ساده‌تر است، فرآورده‌هایی که زمینه عملکرد بیشتری داشته و قابل اعتمادند، هزینه تولید پایین تر و زمان آزمایش کوتاهتری دارند.[۱۷]

یکی از انواع طرح‌های آزمایش، طرح‌های بلوکی است در واقع بلوک بندی تکنیکی است که با ایجاد واحدهای همگن باعث می‌شود که بتوانیم تغییرات حاصل از منابع خارجی را با روشی معین کنترل کنیم؛ در بعضی از طرح‌های بلوکی، مشاهدات در واحدهای داخلی بلوک‌ها بر اساس زمان یا مکان به گونه‌ای مرتب می‌شوند که این ترتیب قرار گرفتن باعث ایجاد نوعی همبستگی در بین مشاهدات می‌شود که معمولا این همبستگی بر اساس فرآیندهایی مانند فرآیند اتورگرسیو ایستای مرتبه‌ی اول یا فرآیند میانگین متحرک مرتبه‌ی اول بیان می‌شود. بیشتر نتایج در مورد طرح‌های بلوکی برای طرح‌های بلوکی کامل یعنی حالت $k = v$ و طرح‌های بلوکی ناقص یعنی حالت $k < v$ است.

کانرت در سال (۱۹۸۷) برای حالتی که $k \leq v$ و وابستگی بین مشاهدات تحت فرآیند $AR(۱)$ با ضریب همبستگی مثبت $\rho_۱$ است طرح‌های بهینه را به دست آورد. همچنین مارتین و اکلستون در سال (۱۹۹۱) طرح‌های بهینه‌ی عمومی را برای حالت $k \leq v$ به دست آوردند.

در این پایان نامه حالت $k > v$ را در نظر می‌گیریم یعنی حالتی که اندازه‌ی بلوکی از تعداد تیمارها بیشتر

باشد؛ این طرح‌ها شامل هر دو نوع طرح بلوکی کامل و بلوکی ناقص می‌باشد، در واقع ساختار این طرح‌ها به گونه‌ایست که ابتدا واحدهای داخلی بلوک‌ها توسط طرح‌های بلوکی کامل پر می‌گردد و سپس در انتها یک طرح بلوکی ناقص قرار می‌گیرد.

کانرت در سال (۱۹۸۸) برای حالتی که $k = v + ۱$ و همبستگی مشاهدات داخل بلوک‌ها تحت فرآیند $AR(۱)$ با $\rho_۱ > ۰$ است انواع بهینه را به دست آورد. داس[۱] و دی[۲] در سال (۱۹۸۹) نشان دادند که در حالت $k > v$، طرح‌های دودویی تعمیم یافته، طرح‌های بهینه هستند. همچنین چای [۳] و ماجمدار[۴] در سال (۲۰۰۰) برای حالت $v < k \leq ۲v$ انواع بهینه را به دست آوردند.

یک ابزار مفید در ساختن طرح‌ها استفاده از آرایه‌ی نیم متعادل است؛ رائو[۵] در سال (۱۹۶۱) برای به دست آوردن انواع طرح‌های بهینه برای حالات مختلف k و v آرایه‌ی متعامد مرتبه‌ی دوم را معرفی کرد. چنگ[۶] در سال (۱۹۸۸) نشان داد که در صورتی که آرایه‌های نیم متعادل وجود داشته باشند می‌توان از آن‌ها برای به دست آوردن طرح‌های دودویی بهینه در حالتی که همبستگی بین مشاهدات تحت یک فرآیند ایستا باشد استفاده کرد؛ مارتین و اکلستون در سال (۱۹۹۱) نظریه‌ی چنگ را برای طرح‌های غیردودویی و فرآیندهای غیرایستا گسترش دادند. همچنین ساختن طرح‌های بهینه با استفاده از آرایه‌های نیم متعادل در ماجمدار و مارتین (۲۰۰۴) آمده است. انواع طرح‌های بهینه برای فرآیندهای مختلف در حالت $k \geq v$ در پولادساز و مارتین (۲۰۰۲) و همچنین در پولادساز(۲۰۰۱) آمده است.

در این پایان نامه ابتدا در فصل دوم به طور مختصر به تعریف طرح‌های آزمایش، انواع آن و بیان مثال‌هایی برای انواع طرح‌ها می‌پردازیم.

در فصل سوم به تعریف طرح‌های بلوکی، لزوم وجود چنین طرح‌هایی و انواع این طرح‌ها پرداخته؛ سپس برآورد پارامترها را به وسیله‌ی دو روش کمترین مربعات معمولی و کمترین مربعات تعمیم یافته به دست می‌آوریم. در این فصل همچنین ماتریس اطلاع را تعریف و این ماتریس را برای هر بلوک به دست می‌آوریم، همچنین معیارهای بهینگی را تعریف کرده و چگونگی به دست آوردن طرح‌های بهینه‌ی عمومی را در قالب قضیه‌ای از کیفر[۷] (۱۹۷۵) بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم ماتریس Λ^* را تعریف کرده، عناصر آن را به دست می‌آوریم سپس رابطه‌ی بین عناصر آن را بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه با بیان قضایا و اثبات آن‌ها طرح‌های بهینه را برای حالت $k > v$

---

[۱] Das
[۲] Dey
[۳] Chai
[۴] Majumdar
[۵] Rao
[۶] Cheng
[۷] Kiefer

تحت فرآیند $AR(۱)$ با $\rho_۱ > ۰$ به دست می‌آوریم. همچنین در مورد طرح‌های بهینه تحت فرآیند $AR(۱)$ با $\rho_۱ < ۰$ نیز بحث می‌کنیم؛ در ادامه در مورد طرح‌های بهینه تحت فرآیندهای دیگر با $\rho_۱ > ۰$، نیز می‌پردازیم و قضایای مربوط به این گونه فرآیندها را بیان و اثبات می‌کنیم.

در فصل پنجم تعریف نوردیدن شبیه سازی شده پرداخته و چگونگی این الگوریتم، را که برای به دست آوردن طرح‌های بهینه از آن استفاده می‌شود، بیان می‌کنیم.

در پیوست به طور مختصر سری‌های زمانی، ایستایی، فرآیندهای اتورگرسیو مرتبه‌ی اول ایستا و فرآیند میانگین متحرک مرتبه‌ی اول ایستا را تعریف می‌کنیم و خواص آن‌ها را به دست می‌آوریم؛ همچنین در این فصل به تعریف جبر ماتریس‌ها، اثر و مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس، ماتریس معین مثبت، معکوس عمومی و معکوس عمومی مور–پنروس و حاصل ضرب کرونکر را بیان می‌کنیم.

فصل ۲

طرح آزمایش

۲—۱ مقدمه

به طور مکرر مشاهده شده است که دانشمندان برای شناخت پدیده‌ها، آزمایش‌هایی را انجام می‌دهند تا حقیقتی را در مورد سیستم یا فرآیندی کشف کنند. انجام آزمایش همواره متضمن هزینه و زمان است. از این‌رو انجام آزمایش‌هایی موثر که با صرف حداقل هزینه و زمان بیشترین اطلاعات را به دست بدهد آرمان هر محقق است.

در واقع هدف طرح آزمایش حل مساله‌ی زیر است:

۱. کسب حداکثر اطلاعات و شناخت از فرآیندها

۲. صرف حداقل هزینه‌ها

۳. کسب حداقل زمان برای اجرای فرآیندها

در ابتدا طرح یک روش تجزیه و تحلیل داده‌ها بوده است ولی به خواص ریاضی و ترکیباتی آن کمتر توجه شده است؛ بیشتر طرح‌هایی که تا به حال مطالعه شده‌اند دارای خواص آماری هستند که از لحاظ کاربردی مفیدند. با رشد کامپیوتر و تکنولوژی امکان مطالعه مجموعه‌ای از طرح‌ها که ساختار ساده‌ای دارند برقرار شد که در هر مجموعه، طرح‌ها دارای خواص آماری مناسبی می‌باشند که می‌توان این خواص را با استفاده از تلفیقی از روش‌های تئوری و محاسباتی مشخص کرد.

اساس طرح آزمایش از دید آماری توسط فیشر(۱۹۳۰) بنا گذاشته شد که در ابتدا در مسایل

کشاورزی مورد استفاده قرار گرفت ولی امروزه در کلیه‌ی علوم، صنعت و حتی هنر کاربرد دارد.

هنگامی که صحبت از طرح آزمایش می‌شود منظور انجام یک تحقیق است، ولی یک تحقیق خاص. یک تحقیق فعالیتی است که برای یک محقق ایجاد آگاهی‌های بیشتری می‌کند. تحقیق در واقع یک نوع کنجکاوی است؛ کنجکاوی در ارتباط با یافتن حقیقت. معمولا دو نوع تحقیق وجود دارد؛ در نوع اول محقق سعی بر ایجاد مفاهیم و اثبات علوم و در نتیجه ارایه‌ی یک روش دارد. در نوع دوم تحقیق‌ها، کاربردی هستند؛ در تحقیق‌های کاربردی محقق تلاش در پاسخ به یک پرسش مشخص دارد. لذا در این‌گونه موارد محقق فرضیه‌ای دارد که سعی می‌کند آن را آزمایش کند.

در واقع طرح آزمایش شامل یک برنامه‌ی منظم در انجام بررسی‌هایی است که با استفاده از تکنیک‌های آماری انجام می‌شود. در این آزمون‌ها فاکتورها یا عواملی که در یک فرآیند نقش دارند در شرایط مختلف به کار گرفته شده و از وضعیت نهایی محصول یا اثر آن آن در محصول نهایی و یا فرآیند، اطلاعاتی جمع آوری می‌شود.

حال به بیان تعریف دقیقی از طرح آزمایش می‌پردازیم.

طراحی آزمایش، روش جمع آوری اطلاعات صحیح برای یک مطالعه‌ی آماری می‌باشد که نیاز به انجام آزمایش، کنترل عوامل و در نهایت جمع آوری اطلاعات دارد.

در ادامه مفاهیم مورد نیاز را تعریف می‌کنیم.

تعریف **۱.۲** آزمایش[۱] : هر عملی که نتیجه‌ی آن اطلاعات یا داده باشد، یک آزمایش است.

تعریف **۲.۲** واحد آزمایشی[۲] : کوچکترین جزیی که در آزمایش برای کسب اطلاعات مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف **۳.۲** تیمار آزمایشی[۳] : عاملی که در آزمایش بر روی واحد آزمایشی مورد آزمون قرار می گیرد تا تاثیر آن سنجیده شود.

تعریف **۴.۲** خطای آزمایشی[۴] : در اثر تکرار تیماری در واحدهای آزمایشی یکسان، تفاوت‌هایی مشاهده می‌شود که آن‌ها را خطای آزمایشی می‌نامیم.

حال مفاهیم فوق را در غالب مثال بیان می‌کنیم.

---

[۱] Experiment
[۲] Experiment unite
[۳] Experiment treatment
[۴] Experiment error

مثال ۵.۲ عامل مقاومت کششی ملاط سیمان پرتلند مشخصه‌ای مهم برای محصول است. مهندسی علاقه‌مند است که مقاومت فرمولبندی اصلاح‌شده‌ای را که در آن، امولسیون‌های پلیمری در طی عمل اختلاط به محصول اضافه می‌شود با مقاومت ملاط اصلاح نشده‌ای، مقایسه کند. این مهندس ۱۰ مشاهده از مقاومت برای فرمولبندی اصلاح شده و ۱۰ مشاهده‌ی دیگر از فرمولبندی اصلاح نشده جمع آوری کرده است. داده‌ها در جدول (۱) آمده است. می‌توانیم دو فرمولبندی مختلف را به عنوان دو تیمار یا دو سطح عامل فرمولبندی در نظر بگیریم.

جدول ۱، داده‌های عامل کششی برای آزمایش فرمولبندی سیمان پرتلند

j	ملاط اصلاح‌شده(y_{1j})	ملاط اصلاح‌نشده(y_{2j})
۱	۱۶/۸۵	۱۷/۵۰
۲	۱۶/۴۰	۱۷/۶۳
۳	۱۷/۲۱	۱۸/۲۵
۴	۱۶/۳۵	۱۸/۰۰
۵	۱۶/۵۲	۱۷/۸۶
۶	۱۷/۰۴	۱۷/۷۵
۷	۱۶/۹۶	۱۸/۲۲
۸	۱۷/۱۵	۱۷/۹۰
۹	۱۶/۵۹	۱۷/۹۶
۱۰	۱۶/۵۷	۱۸/۱۵

با بررسی این داده‌ها فورا احساس می‌شود که مقاومت ملاط اصلاح نشده بیشتر از مقاومت ملاط اصلاح‌شده است. این احساس با مقایسه‌ی متوسط مقاومت‌های کششی $\bar{y}_1 = ۱۶/۷۶$ برای ملاط اصلاح‌شده و $\bar{y}_2 = ۱۷/۹۲$ برای ملاط اصلاح‌نشده تقویت می‌شود. تفاوت متوسط مقاومت کششی در این دو نمونه، مقداری است که جزیی به نظر نمی‌رسد؛ اما روشن نیست که آیا این تفاوت به اندازه‌ای بزرگ است که بر متفاوت بودن واقعی دو فرمولبندی دلالت کند یا نه. شاید این تفاوت مشاهده‌شده در متوسط مقاومت‌ها نتیجه‌ی افت و خیز نمونه‌گیری بوده و دو فرمولبندی در واقع یکسان باشند. ممکن است دو نمونه‌ی دیگر نتایجی خلاف بالا و دال بر این بدهند که مقاومت ملاط اصلاح‌شده از فرمولبندی اصلاح‌نشده بیشتر است[۱۷].

هر یک از مشاهدات در آزمایش سیمان پرتلند را که در بالا مطرح شد یک تکرار می‌نامیم. توجه می‌شود که تکرار متفاوتند، به قسمی که در نتایج اغتشاش وجود دارد. چنین اغتشاشی را معمولا خطای آزمایشی یا به عبارت ساده خطا می‌نامیم. این یک خطای آماری است؛ به این معنا که از تغییراتی که کنترل نشده‌اند و معمولا اجتناب‌ناپذیرند پیش آمده است. وجود خطا یا اغتشاش دلالت بر این می‌کند که متغیر پاسخ، یعنی عامل مقاومت کششی، متغیری تصادفی است. متغیر تصادفی ممکن است گسسته یا

پیوسته باشد. اگر مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن متغیر تصادفی متناهی شمارا یا نامتناهی شمارا باشد، آن‌گاه متغیر تصادفی گسسته است، در صورتی که اگر مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن متغیر تصادفی یک بازه باشد، آن‌گاه متغیر تصادفی پیوسته است.

تعریف **۶.۲** عوامل غیرآزمایشی[۵] : عواملی که می‌توانند روی نتیجه‌ی آزمایش تاثیر گذارند و لذا بایستی آن‌ها را در غالب طرح‌های آزمایشی در اختیار داشته باشیم.

تعریف **۷.۲** صحت و دقت در طرح‌های آزمایشی[۶] : اگر اطلاعات به مقدار واقعی نزدیک باشد گوییم صحت در جمع آوری وجود دارد؛ و اگر پراکندگی اطلاعات کم باشد گوییم دقت در جمع آوری اطلاعات وجود دارد.

۲–۲ اصول پایه‌ای

اگر بخواهیم نتایجی با معنا و معتبر از داده‌ها استخراج کنیم، استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش ضروری است. وقتی مساله متضمن داده‌هایی است که شامل خطاهای آزمایشی هستند در این صورت روش‌های آماری تنها رهیافت عینی تحلیل است. پس، هر پژوهش استقرایی دارای دو وجه است، یکی طرح آزمایش و انجام آن و دیگری تحلیل آماری داده‌ها. این دو موضوع در ارتباط نزدیک با یکدیگرند زیرا روش تحلیل مستقیما به طرح استفاده شده بستگی دارد. سه اصل پایه‌ای در طرح آزمایش عبارتند از:

۱. تکرار
۲. تصادفی کردن
۳. بلوک بندی

منظور از تکرار، تهیه مشاهدات متعدد در امتحان واحدهای آزمایش است. تکرار دارای دو خاصیت است، اول این که پژوهشگر را قادر می‌سازد که برآوردی برای خطای آزمایش به دست آورد. این برآورد خطا مبنای واحد اندازه‌گیری در تعیین معنی دار بودن اختلافات مشاهده شده در داده‌هاست. وقتی می‌گوییم اختلافات معنی‌دار است این بدان معنی است که اختلافات از آن حدی که خطای نمونه‌گیری و خطای آزمایشی می‌توانند ایجاد کنند تجاوز کرده است و بنابراین نمی‌تواند معلول خطا باشد. دومین خاصیت مهم تکرار، آن است که مثلا، اگر برای برآورد اثر سطحی از یک عامل، از میانگین نمونه استفاده

[۵] Non experiment factors
[۶] Accuracy and Precision

کنیم، آن‌گاه تکرار موجب برآوردی دقیق تر برای آن اثر است.

منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص تیمارها به واحدهای آزمایشی و ترتیبی که مطابق آن آزمایش‌ها انجام می شوند به تصادف تعیین شوند. تصادفی کردن درست آزمایش، به خارج کردن «متوسط» اثرهای عوامل خارجی که می‌توانند در نتیجه‌ی نهایی تاثیرگذار باشند، کمک می‌کند.

بلوک‌بندی تکنیکی است که برای افزایش دقت آزمایش از آن استفاده می‌کنیم. استفاده از آن در آزمایش‌ها موجب می شود که علیرغم محدودیت‌های واقعی در انتخاب تصادفی واحدهای آزمایشی بتوانیم خطای آزمایش را کاهش دهیم. اصطلاح «بلوک» اشاره به متجانس بودن نسبی واحدهای مورد آزمایش دارد و محدودیت در تصادفی کردن کامل را نشان می‌دهد. در بسیاری از مسایل آزمایشی لازم است آزمایش به گونه‌ای طرح شود که بتوان تغییرات حاصل از منابع خارجی را با روشی معین کنترل کرد. مایلیم خطای آزمایش را تا حد ممکن کم کنیم یعنی مایلیم تغییرپذیری بین واحدهای آزمایش را از خطای آزمایش جدا کنیم. بلوک‌بندی تکنیکی است که چنین خواسته‌ای را تامین می‌کند. مثلا در بسیاری از موارد عملا در انجام آزمایش متوجه می‌شویم که نمی‌توانیم تیمارها را تحت شرایط کاملا یکسان به واحدهای آزمایشی نسبت دهیم. به عنوان مثال ممکن است که در انجام آزمایش لازم باشد از اشخاص مختلفی استفاده کنیم که به دلیل تجربه و تبحر خاص خود عملکردهای متفاوت دارند، یا در انجام آزمایش نیاز به مواد خام داشته باشیم و مواد خاصی که در اختیار داریم کیفیتی متفاوت دارند و یا ممکن است ناگزیر باشیم از ماشین‌های مختلفی برای اندازه‌گیری متغیر پاسخ استفاده کنیم. اشخاص، ماشین‌ها، مواد خام، زمان انجام آزمایش و نظایر این‌ها خود منابع بالقوی تغییرپذیری هستند. با بلوک بندی می‌توانیم این منابع خارجی تغییرپذیری را کنترل کنیم.[۱۷]

۲–۲–۱ طراحی یک آزمایش

طرح کردن یک آزمایش عبارت است از تدارک انجام یک آزمایش که برای افزایش صحت و دقت اطلاعات انجام می‌گیرد و معمولا برای یک طراحی آزمایش مناسب قدم‌های زیر برداشته می‌شود.

۱. بیان اهداف آزمایش

بطور مثال اثرسنجی و مقایسه‌ی روش‌های مختلف آموزش در یادگیری یا اثرسنجی انواع بذرها در میزان محصول گندم و مقایسه‌ی بذرها برای انتخاب بهترین بذر یا تعیین اثر مواد اولیه در کیفیت یک کالا و مقایسه‌ی انواع آن‌ها یا تعیین اثر ذوب در مقاومت یک قطعه فولادی ساخته شده و تعیین مناسب‌ترین درجه‌ی حرارت برای کیفیت برتر

۲. انتخاب تیمارهای آزمایشی (عوامل آزمایشی)
ممکن است تیمار آزمایشی از یک عامل باشد و یا از ترکیب عوامل مختلف باشد.
۳. تعیین عوامل غیرآزمایشی
۴. تعیین واحد آزمایشی
واحد آزمایشی باید به گونه‌ای باشد که تکرارپذیر باشد.
۵. تعیین تعداد تکرار
٦. تعیین صفتی که معرف اثر تیمارها می‌باشد(محصول آزمایش)
۷. شناخت طرح‌های آزمایشی مختلف در انتخاب مناسب‌ترین طرح بر مبنای اطاعات فوق.
۸. جمع آوری اطلاعات اضافی در انجام آزمایش برای استفاده‌ی از آن‌ها برای کسب اطلاعات بیشتر(صفات کمکی)

۲—۳ آشنایی با چند نوع طرح آزمایش

در این بخش به معرفی مقدماتی طرح‌های آزمایش می‌پردازیم. در قسمت اول به طرح‌های کاملا تصادفی شده توجه می‌کنیم، در قسمت دوم به معرفی طرح‌های بلوکی کاملا تصادفی شده اشاره می کنیم و در قسمت پایانی طرح‌های بلوکی ناقص را مورد توجه قرار می‌دهیم.

۲—۳—۱ طرح‌های کاملا تصادفی شده

در یک طرح کاملا تصادفی شده تیمارها (سطوح عوامل آزمایشی) را به طور کاملا تصادفی به مجموعه‌ی واحدهای آزمایش نسبت می‌دهیم و به این دلیل آن را طرح کاملا تصادفی می‌نامیم. این طرح زمانی کاراست که بین واحدهای آزمایشی هیچ‌گونه منبع تغییر شناخته شده‌ی دیگری به جز تیمارها وجود نداشته باشد. مثلا در استفاده از این طرح برای مطالعه‌ی میزان باروری محصول، لازم است قطعات مختلف زمین از نظر رطوبت، حاصل‌خیزی خاک، نور و غیره کاملا همگن باشند. به این دلیل طرح کاملا تصادفی شده نسبت به ترتیب فیزیکی واحدهای آزمایش انعطاف پذیر است. اگر منبع تغییر دیگری به جز تیمارها بین واحدهای آزمایش موجود باشد در این صورت برای آشکار کردن تفاوت واقعی تیمارها باید از طرح دیگری برای سنجش تیمارها استفاده کرد.

مثال ۸.۲ یک مهندس کشاورزی برای بهینه سازی میزان باروری نوعی بذر گندم خواستار آزمایش تاثیر کود نیترات آمونیوم بر باروری گندم است. او بنابر تجربیات خود می‌داند که برای این که کود آمونیوم بر روی باروری گندم موثر باشد باید بین ۴ تا ۱۰ درصد تغییر کند. بنابراین با در نظر گرفتن تیماری به عنوان شاهد (میزان باروری بدون استفاده از کود)، ۵ سطح ۰، ۴،۶، ۸ و ۱۰ درصد(که به ترتیب با $t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵$ نشان می‌دهیم) را برای مقایسه به کار می‌برد. او برای هر سطح ۵ تکرار در نظر می گیرد و به این ترتیب تعداد واحدهای آزمایش مورد نیاز برابر با ۲۵ به دست می آید. سپس قطعه زمین همگنی (زمینی که قسمت‌های مختلف آن از نظر رطوبت، حاصل خیزی و نور شرایط یکسان دارند) را انتخاب کرده و آن را به ۲۵ قسمت مساوی به شماره‌های ۱ تا ۲۵ تقسیم می‌کند. مهندس کشاورزی برای تخصیص واحدهای آزمایش به تیمارها از جدول اعداد تصادفی استفاده می‌کند. به این ترتیب که عددی تصادفی بین ۱ تا ۲۵ انتخاب می‌کند(مثلا عدد۸) و اولین تیمار یعنی بذر کود را در آن کرت (شماره ۸) کشت می کند. پس از آن دومین عدد تصادفی بین ۱ تا ۲۵ را انتخاب می‌کند و اگر همان عدد قبلی (۸) بود از آن صرف نظر کرده و عدد دیگری انتخاب می‌کند(مثلا ۱۷) و دومین تیمار یعنی بذر بدون کود(تکرار دوم مشاهده) را در آن کرت کشت می‌کند و به همین ترتیب تا مشخص شدن وضعیت تمام ۲۵ واحد آزمایش پیش می‌رود و طرحی مثلا به شکل زیر به دست می آید[۱۷].

جدول ۲، طرح کاملا تصادفی شده مربوط به مثال ۱

۵	۴	۳	۲	۱
$t_۲$	$t_۳$	$t_۵$	$t_۴$	$t_۳$
۱۰	۹	۸	۷	۶
$t_۱$	$t_۳$	$t_۱$	$t_۳$	$t_۲$
۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
$t_۲$	$t_۲$	$t_۴$	$t_۳$	$t_۴$
۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶
$t_۲$	$t_۵$	$t_۱$	$t_۱$	$t_۵$
۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
$t_۵$	$t_۴$	$t_۱$	$t_۵$	$t_۴$

چنین عملکردی در انجام آزمون‌های تصادفی شده برای جلوگیری از اثر متغیرهای اغتشاش نامعلوم لازم است. چرا که در غیراین‌صورت متغیرهای اغتشاش می‌توانند در نتایج اثر کرده و تحلیل را بی‌اعتبار کنند. برای توضیح مطلب، فرض کنید اجرای آزمایش روی ۲۵ واحد آزمایش به ترتیبی غیر تصادفی انجام شود. یعنی، به عنوان مثال پنج نمونه‌ی شاهد را در ردیف اول (کرت های شماره‌ی ۱ تا ۵)، پنج نمونه‌ی دوم با استفاده از ۴ درصد کود را در ردیف دوم و به همین ترتیب پنج نمونه‌ی آخر با استفاده از ۱۰ درصد کود را در ردیف آخر کشت کنند. در این حالت چنانچه قسمت‌های جغرافیایی زمین از نظر نور، شیب زمین

و غیره تفاوت جزئی با هم داشته باشند، آن گاه اثر این عوامل، میزان محصول را مخدوش و آزمایش را بی‌اعتبار می‌کند. با تصادفی کردن آزمایش، به خارج کردن «متوسط» اثرهای خارجی که می‌توانند نتایج را تحت تاثیر قرار دهند، کمک می‌شود.

۲–۳–۲ طرح‌های بلوکی کامل تصادفی شده

در بسیاری از مسایل مربوط به آزمایش‌ها، لازم است آزمایش به گونه‌ای طرح شود که بتوان تغییرپذیری ناشی از منابع مزاحم را به صورتی سیستماتیک کنترل کرد. مثلا اگر بخواهیم معین کنیم که سختی یک فلز برای چهار تیغه‌ی مختلف متفاوت است یا خیر،

از ماشین سنجش استفاده می‌شود که با فشار آوردن تیغه‌ای به قطعات آزمایشی فلز عمل می‌کند، و از عمق حاصل، سختی قطعه معین می شود. آزمایشگر تصمیم می‌گیرد که از هر تیغه ۴ مشاهده داشته باشد تنها یک عامل، نوع تیغه، وجود دارد و طرح تک عاملی کامل تصادفی شده عبارت است از تخصیص تصادفی هر یک از ۱۶ اجرا به واحد آزمایش است، به طوری که واحد آزمایش در اینجا قطعه فلز تحت آزمون و مشاهده‌ی سختی آن است. پس، در این آزمایش به ۱۶ قطعه‌ی آزمایشی مختلف نیاز داریم که برای هر اجرای طرح از یک قطعه استفاده می‌کنیم. در این وضعیت طرح، با آزمایش کامل تصادفی شده، مساله‌ای بالقوی جدی وجود دارد. اگر قطعات فلز از نظر سختی، مختصری تفاوت داشته باشند، که ممکن است مثلا از اختلاف حرارت شمش‌های مختلف در زمان تولید ناشی شده باشد، آن‌گاه واحدهای آزمایشی (قطعات) می‌توانند در تغییرپذیری مشاهده شده در داده‌های سهیم باشند. در نتیجه خطای آزمایش بازتاب هر دو خطای تصادفی و تغییرپذیری بین قطعات است. مایلیم خطای آزمایش را تا حد ممکن کم کنیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم تغییرپذیری بین قطعات را از خطای آزمایش جدا کنیم. طرحی که چنین نیاز آزمایشگر را تامین می‌کند، آزمودن هر تیغه یک مرتبه روی هر یک از چهار قطعه است. چنین طرحی را، طرح بلوکی کامل تصادفی شده می‌نامیم. واژه‌ی «کامل» نشان می‌دهد که هر بلوک (قطعه) شامل تمام تیمارها(تیغه‌ها) است. با استفاده از این طرح، بلوک‌ها یا قطعات برای مقایسه‌ی تیغه‌ها واحدهای آزمایشی همگن‌تری را به وجود می آورند. استراتژی این طرح به صورتی موثر دقت مقایسه‌های بین تیغه‌ها را با حذف تغییرپذیری بین قطعات اصلاح می‌کند. ترتیبی که چهار تیغه درون هر بلوک آزمون می‌شوند به طور تصادفی تعیین می‌شود. یکی از متداولترین طرح‌های آزمایش، طرح بلوکی کامل تصادفی شده است. وضعیت‌هایی که برای آن‌ها طرح بلوکی کامل تصادفی شده مناسب است فراوان‌اند[۱۷].

۲–۳–۳ طرح‌های بلوکی ناقص

در بعضی آزمایش‌ها با استفاده از طرح‌های بلوکی تصادفی شده ممکن است قادر به اجرای کلیه‌ی ترکیب‌های تیماری در هر بلوک نباشیم. چنین وضعیت‌هایی معمولا به دلیل کمبود وسائل آزمایشی یا اندازه‌ی فیزیکی بلوک پیش می‌آید. مثلا اگر در آزمون سختی فلز به دلیل محدودیت اندازه‌ی قطعات آزمایشی، تنها آزمون سه تیغه روی هر قطعه‌ی آزمایشی مقدور باشد. آن‌گاه هر تیغه‌ای را نمی‌توان با هر قطعه‌ای امتحان کرد. در این نوع مسایل ممکن است از طرح‌های بلوکی تصادفی شده‌ای استفاده کرد که وجود هر تیمار در هر بلوک ضروری نباشد. این طرح‌ها را طرح‌های بلوکی ناقص تصادفی شده می‌نامند.

۲–۳–۴ طرح‌های بلوکی ناقص متعادل

وقتی تمام مقایسه‌های تیماری اهمیت یکسان دارند، باید انتخاب ترکیب‌های تیماری که در هر بلوک به کار می‌روند به روش متعادل باشد، یعنی به گونه‌ای باشد که هر جفت تیمار با هم به اندازه‌ی تعداد دفعات جفت‌های دیگر در بلوک‌ها رخ دهد. پس، طرح بلوکی ناقص متعادل یک طرح بلوکی ناقص است که هر دو تیمار با هم به دفعات مساوی در یک بلوک ظاهر می‌شوند. چنانچه v تیمار داشته باشیم و در هر بلوک دقیقا k تیمار $(k < v)$ رخ دهد، طرح بلوکی ناقص متعادل را می‌توان با اختیار $\binom{v}{k}$ بلوک و تخصیص ترکیب‌های مختلف تیمارها به هر بلوک به دست آورد.

به عنوان مثال اگر یک مهندس شیمی تصور کند که زمان واکنش یک فرآیند شیمیایی تابعی از نوع کاتالیزور مورد استفاده باشد. آن‌گاه چهار کاتالیزور در جریان بررسی قرار دارند. شیوه‌ی آزمایش شامل انتخاب یک دسته مواد خام، کاربرد هر کاتالیزور در اجراهای متفاوت به واحد صنعتی آزمایشی، و ملاحظه‌ی زمان واکنش است. چون تغییرات در دسته‌های مواد خام می‌توانند بر عملکرد کاتالیزور موثر باشند، لذا مهندس تصمیم می‌گیرد که از دسته‌های مواد خام به عنوان بلوک استفاده کند. اما هر دسته به اندازه‌ای است که تنها سه کاتالیزور را برای اجرا می‌پذیرد. بنابراین باید از طرح بلوکی ناقص تصادفی شده استفاده کرد. طرح بلوکی ناقص متعادل برای این آزمایش همراه با مشاهدات ثبت شده، در جدول زیر آمده است[۱۷].