دانشگاه‌مازندران

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی محض گرایش نظریه گراف و ترکیبیات

عنوان

پارامترهای احاطه‌گری علامت‌دار در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر سیدمحمود شیخ‌الاسلامی کاوکانی

اساتید مشاور

دکتر عبداله خودکار

دکتر ابوالفضل اکرا طالشیان

پژوهشگر

آرزو نازی قمشلو

بهمن ماه ۱۳۸۸

بنام مقدس پروردگار عالمیان

قدردانی

اکنون که به شکرانه الهی این رساله به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا از تمامی بزرگوارانی که راهگشای این تحقیق بوده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی استاد راهنمای ارجمندم که در تمام مراحل تحقیق با بزرگواری مرا راهنمایی نموده‌اند و وقت و بی‌وقت صبورانه در کمال صمیمیت و سخاوت پاسخ‌گوی اینجانب بوده‌اند و نه تنها از علم ایشان بلکه از تواضع و خلوص ایشان درسها آموختم، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم. از اساتید مشاور محترم جناب آقای دکتر عبداله خودکار و جناب آقای دکتر ابوالفضل اکرا طالشیان که مرا در انجام این رساله همراهی کردند تشکر می‌کنم.

از مادرم که سالها با تحمل سختیها و مرارتها زمینه تعلیم اینجانب را فراهم کرده‌اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم و شادی روح پدرم را از خداوند بزرگ خواستارم.

از همسرم که ایام تحصیل مرا صبورانه تحمل کرد تا وقت بیشتری را به مطالعه و تحقیق بپردازم صمیمانه تشکر می‌کنم و آرزوی بهترینها را برای او دارم.

و در نهایت از سرکار خانم عطاپور و کلیه کسانی که مرا در نگارش این رساله یاری کردند کمال تشکر را دارم.

آرزو نازی قمشلو
بهمن ماه ۱۳۸۸
تهران، ایران

تقدیم به:

همسرم که بحق مشکلات دوران تحصیلم را صبورانه تحمل کرد.

چکیده

فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. توابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ و $g : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را در نظر بگیرید.

تابع g یک تابع احاطه‌گر (تام) یالی علامت‌دار روی گراف G نامیده می‌شود هرگاه بازای هر یال e از $E(G)$، $\sum_{e' \in N_G[e]} g(e') \geq ۱$ ($\sum_{e' \in N_G(e)} g(e') \geq ۱$). مقدار $g(E(G)) = \sum_{e \in E(G)} g(e)$ را وزن تابع احاطه‌گر (تام) یالی علامت‌دار g می‌گویند. مینیمم وزن $g(E(G))$ بازای تمام توابع احاطه‌گر (تام) یالی علامت‌دار روی گراف G عدد احاطه‌ای (تام) یالی علامت‌دار، $\gamma'_s(G)$ ($\gamma'_{st}(G)$)، نامیده می‌شود.

تابع f را یک تابع بد گویند هرگاه بازای هر رأس $v \in V(G)$، $\sum_{u \in N_G(v)} f(u) \leq ۱$. ماکسیمم مقدار $f(V(G)) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ روی کلیه توابع بد f روی G عدد تصمیم منفی، $\beta_D(G)$، نامیده می‌شود.

تابع $h : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۰, ۱\}$ یک تابع احاطه‌گر یالی منفی روی گراف G نامیده می‌شود هرگاه بازای هر یال e از $E(G)$، $\sum_{e' \in N_G[e]} h(e') \geq ۱$. مقدار $h(E(G)) = \sum_{e \in E(G)} h(e)$ را وزن تابع احاطه‌گر یالی منفی h می‌گویند. مینیمم وزن $h(E(G))$ بازای تمام توابع احاطه‌گر یالی منفی روی گراف G عدد احاطه‌ای یالی منفی، $\gamma'_m(G)$، نامیده می‌شود.

در این رساله ابتدا مفاهیم اعداد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار، k- زیرتصمیم منفی، k- زیر احاطه‌ای یالی منفی را بترتیب بعنوان تعمیم‌هایی از عدد احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار، عدد تصمیم منفی و عدد احاطه‌ای یالی منفی، معرفی و مطالعه می‌کنیم. سپس مفهوم عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار را معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی

تابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار، عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار، تابع k- زیرتصمیم منفی، عدد k- زیرتصمیم منفی، تابع k- زیراحاطه‌گر یالی منفی، عدد k- زیراحاطه‌ای یالی منفی. عدد احاطه‌ای ستاره‌ای علامت‌دار، عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار.

فهرست مطالب

مقدمه . . . ۱

۱ **پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی** ۴

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی . . . ۴

۲ **عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار** ۹

۱.۲ یک کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار . . . ۱۱

۲.۲ کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار جنگلها . . . ۱۳

۳ **عدد k- زیرتصمیم منفی** ۲۸

۱.۳ چند کران بالا برای عدد k- زیرتصمیم منفی در گرافها . . . ۲۹

۲.۳ یک کران پایین برای عدد k- زیرتصمیم منفی در درختها . . . ۳۳

۳.۳ عدد k- زیرتصمیم منفی در گرافهای خاص . . . ۴۰

۴ **عدد k- زیر احاطه‌ای یالی منفی** ۴۳

۱.۴ کرانهای پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای یالی منفی در گرافها ۴۵

۵ عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار ۶۰

۱.۵ خواص اساسی عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار ۶۱

۲.۵ عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار گرافهای منتظم ۶۵

۳.۵ عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار گرافهای کامل دوبخشی ۶۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۶

فهرست الفبایی ۸۰

مراجع ۸۴

چکیده انگلیسی ۹۰

مقدمه

در سال ۱۹۹۵ مفهوم عدد احاطه‌ای علامت‌دار در گرافها توسط دونبار[۱] و همکاران [۴] بصورت زیر معرفی شد: تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱,۱\}$ یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار برای گراف G است هرگاه بازای هر رأس $v \in V(G)$، $\sum_{v' \in N_G[v]} f(v') \geq ۱$. تابع احاطه‌گر علامت‌دار f را مینیمم گویند هرگاه تابع احاطه‌گر علامت‌دار g از گراف G با $\sum_{v \in V(G)} g(v) < \sum_{v \in V(G)} f(v)$ موجود نباشد. وزن یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمم عدد احاطه‌ای علامت‌دار، $\gamma_s(G)$، نامیده می‌شود.

امروزه این مفهوم توسط محققین بسیاری مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع [۴]، [۵]، [۶]، [۱۰]، [۱۵]، [۱۶] و [۳۹] مراجعه کنید.

در سال ۲۰۰۱ زلینکا [۲] [۳۸] با تغییر همسایگی بسته به همسایگی باز در تعریف فوق، مفهوم عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را معرفی کرد. در سال ۲۰۰۴ هنینگ [۳] [۱۷] عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را بطور گسترده بررسی کرد. وی انگیزه مطالعه دقیق‌تر این پارامتر را تنوع کاربرد آن در مدلسازی مسایل مختلف عنوان کرده است. به عنوان مثال با نسبت دادن اعداد ۱ و ۱− به رئوس یک گراف دلخواه می‌توان شبکه‌هایی از افراد یا سازمانهایی را مدلسازی کرد که بایستی در آنها تصمیمی کلی با پاسخی مثبت یا منفی گرفته شود. فرض کنید هر شخص (رأس) یک حق رأی و یک نظر نهایی داشته باشد. تخصیص عدد ۱ به هر رأس بیانگر رأی مثبت آن فرد و عدد ۱−، بیانگر رأی منفی فرد است. همین‌طور فرض بر این است که رأی هر فرد در نظر نهایی افراد مجاورش تاثیر می‌گذارد. بنابراین افرادی که دارای درجات بالا هستند نفوذپذیری بالاتری نیز دارند. نظر نهایی هر فرد مثبت است هرگاه تعداد آرای مثبت موجود در همسایگی باز وی بیش از تعداد آرای منفی موجود در همسایگی بازش باشند. هدف، جستجوی تخصیص آرایی به رئوس گراف مفروض است به طوری که یک تخصیص متفق‌القول را تضمین کند. به عبارتی هدف

[۱] Dunbar
[۲] Zelinka
[۳] Henning

جستجوی تخصیصی است که بواسطه آن نظر نهایی هر شخص مثبت باشد. چنین تخصیصی، تخصیص متفق‌القول نامیده می‌شود. این سیستم در بین کلیه تخصیص‌های متفق‌القول سعی دارد تعداد افراد با رأی مثبت را به کمترین تعداد برساند. تحت این شرایط عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار ، مینیمم مجموع ممکن برای کل آراست. یعنی این عدد بیانگر مینیمم تعداد افرادی است که ضمن داشتن آرا مثبت کلیه افراد شبکه را مجبور به دادن نظر نهایی مثبت می‌کنند.

در سال ۲۰۰۱ اکس‌یو [۴] [۳۳] مساله زیر را مطرح کرد: فرض کنید G گرافی ساده و $E = E_۱ \cup E_۲$ افرازی از مجموعه یالهای $E(G)$ باشد. یال دلخواه e از گراف G خوب (بد) است هرگاه $e \in E_۱ (e \in E_۲)$. برای ساختن گرافی از اندازه m چند یال خوب لازم است به طوریکه تعداد یالهای خوب موجود در $N_G[e]$ بازای هر $e \in E(G)$ بیش از تعداد یالهای بد موجود در آن باشد.

براساس مساله اخیر، اکس‌یو مفهوم عدد احاطه‌ای یالی علامت‌دار در گرافها را بصورت زیر تعریف کرد: تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ یک تابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار برای گراف G است هرگاه برای هریال e از $E(G)$، $\sum_{e' \in N_G[e]} f(e') \geq ۱$. در بین تمامی چنین توابعی آنهایی که کمترین وزن را دارند توابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمم نامیده می‌شوند. وزن یک تابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمم عدد احاطه‌ای یالی علامت‌دار، $\gamma'_s(G)$، نامیده می‌شود.

زلینکا در سال ۲۰۰۲ با تبدیل همسایگی بسته به همسایگی باز در مفهوم احاطه‌ای یالی علامت‌دار، مفهوم عدد احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را معرفی کرد.

مفهوم احاطه‌ای یالی علامت‌دار و احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار با توجه به ارتباط آنها با بعضی پارامترهای دیگر نظریه گراف مورد توجه محققین قرار گرفته و نتایج زیادی در این مورد به چاپ رسیده است. (رجوع کنید به[۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲۳]، [۲۴]، [۳۴]، [۳۵] و [۳۷]).

تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ یک تابع احاطه‌گر ستاره‌ای علامت‌دار گراف G است هرگاه بازای هر رأس v از $V(G)$، $\sum_{e \in E_G(v)} f(e) \geq ۱$، که در آن $E_G(v) = \{uv \in E(G) \mid u \in N_G(v)\}$. مینیمم مقدار

[۴] Xu

$f(E(G)) = \sum_{e\in E(G)} f(e)$، بازای تمام توابع احاطه‌گر ستاره‌ای علامت‌دار f را عدد احاطه‌ای ستاره‌ای علامت‌دار، $\gamma_{ss}(G)$، می‌نامند. این مفهوم را اکس‌یو [۳۲] در سال ۲۰۰۴ معرفی کرده است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مراجع [۲۵] و [۳۰] مراجعه کنید.

هدف اصلی این رساله تعمیم برخی از پارامترهای احاطه‌ای علامت‌دار و تعیین مقدار دقیق آنها برای گرافهای خاص و ارائه کرانهای بالا و پایین قابل وصول برای آنهاست.

رساله حاضر بیان تفصیلی مقالات [۱]، [۷]، [۸] و [۹] است و به‌صورت زیر تنظیم شده است:

در فصل اول، تعاریف مورد نیاز از نظریه گراف و احاطه‌گرها را بیان خواهیم کرد.

در فصل دوم، مفهوم عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را به عنوان تعمیمی از عدد احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار معرفی می‌کنیم و مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در فصل سوم، مفهوم عدد k- زیرتصمیم منفی را به عنوان تعمیمی از عدد تصمیم منفی معرفی کرده و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل چهارم را به معرفی و مطالعه عدد k- زیر احاطه‌ای یالی منفی اختصاص داده‌ایم. و بالاخره در فصل پنجم، عدد دماتیک ستاره‌ای علامت‌دار را تعریف کرده و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه که در این فصل تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۳۱] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در سراسر این رساله گرافها ساده و غیرجهت‌دار هستند.

همسایگی باز رأس v از گراف G، $N_G(v)$، مجموعه تمام رأس‌هایی از G است که با رأس v مجاورند. به عبارت دیگر

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

همسایگی بسته رأس v عبارتست از

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

بازای هر e از $E(G)$، همسایگی یالی باز، $N_G(e)$، مجموعه تمام یال‌هایی از گراف G است که با یال e رأس مشترک دارند.

همسایگی یالی بسته عبارتست از

$$N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}.$$

همسایه یالی یک رأس مجموعه تمام یال‌هایی است که به آن رأس متصل هستند. بازای هر رأس v از $V(G)$، همسایه یالی رأس v را با $E_G(v)$ نمایش می‌دهند.

گراف خطی گراف G، $L(G)$، گراف ساده‌ای است که مجموعه رأس‌های آن $E(G)$ است و دو رأس e و e' از $L(G)$ مجاورند اگر و فقط اگر e و e' در G حداقل یک رأس مشترک داشته باشند. بنا به تعریف به آسانی می‌توان دید $L(P_n) = P_{n-1}$، $L(C_n) = C_n$ و $L(K_{1,n}) = K_n$.

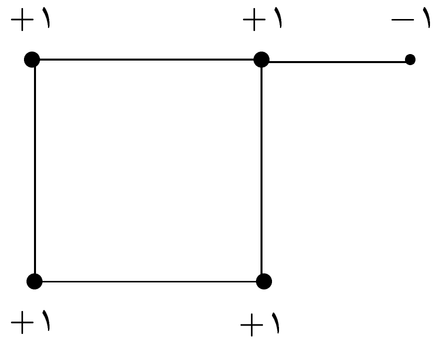
فرض کنید T یک درخت باشد. هر رأس از درجه یک در T را یک برگ گویند. رأسی از T را که با یک برگ مجاور باشد، رأس اتکا می‌نامند. رأس اتکای قوی به رأسی از T اطلاق می‌شود که حداقل با دو برگ مجاور باشد.

فرض کنید A مجموعه دلخواهی باشد. برای هر تابع حقیقی $f : A \longrightarrow R$ و زیرمجموعه $S \subseteq A$، تعریف کنید

$$f(S) = \sum_{u \in S} f(u).$$

$\omega(f) = f(A)$ را وزن تابع f گویند.

تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار $(STDF)$ برای گراف G است هرگاه برای هر رأس $v \in V(G)$، $\sum_{v' \in N_G(v)} f(v') \geq 1$. مینیمم وزن در بین توابع احاطه‌گر تام علامت‌دار گراف G عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار $(STDN)$، $\gamma_{st}(G)$، نامیده می‌شود. یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار از گراف G با وزن $\gamma_{st}(G)$ را یک $\gamma_{st}(G)$- تابع می‌گویند. شکل (۱.۱)، گراف G با $\gamma_{st}(G) = 3$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: گراف G با $\gamma_{st}(G) = 3$.

تابع رأی روی گراف G به تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ اطلاق می‌شود که در آن مفهوم رأی برای هر رأس v از $V(G)$، $f(w)$ $\sum_{w\in N_G(v)}$ است. رأس v دارای رأی مثبت است هرگاه

$$\sum_{w\in N_G(v)} f(w) \geq 1.$$

تابع k- زیر احاطه‌گر تام علامت‌دار $(STkSDF)$ از گراف G به تابع رأیی اطلاق می‌شود که حداقل k رأس از گراف G دارای رأی مثبت باشند. مینیمم مقدار $\sum_{v\in V(G)} f(v)$، روی کلیه توابع k- زیر احاطه‌گر تام علامت‌دار f از گراف G را عدد k- زیر احاطه‌ای تام علامت‌دار $(STkSDN)$، $\gamma^t_{ks}(G)$، می‌نامند. این مفهوم در سال ۲۰۰۶ توسط هریس [1] و همکاران [۱۱] تعریف شده است. اثبات دو گزاره زیر را می‌توان در [۱۱] ملاحظه کرد.

گزاره ۱.۱ برای $n \geq 3$ و $1 \leq k \leq n$،

$$\gamma^t_{ks}(C_n) = \begin{cases} 2k - n & \text{اگر } k \in \{\frac{n}{2}, n\} \\ 2k + 2 - n & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

[1] Harris

گزاره ۲.۱ برای $n \geq ۲$،

$$\gamma_{ks}^{t}(P_n) = \begin{cases} -۱ & \text{اگر } k = \frac{۱}{۲}(n+۱) \\ ۲k - n & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۰, ۱\}$ را یک تابع k- زیر احاطه‌گر منفی ($MkSDF$) می‌نامند هرگاه بازای حداقل k رأس v از $V(G)$،

$$\sum_{v' \in N_G[v]} f(v') \geq ۱.$$

عدد k- زیر احاطه‌ای منفی ($MkSDN$) از گراف G، $\gamma_{ks}^{-۱۰۱}(G)$، را چنین تعریف می‌کنند:

$$\min\{f(V(G)) \mid \text{است } G \text{ از گراف } MkSDF \text{ یک } f\}.$$

این مفهوم توسط برُز[۲] و همکاران [۲] تعریف شده و توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مطالعه بیشتر به [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.

قضایای زیر مقدار عدد k- زیر احاطه‌ای منفی را در مسیرها و دورها نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۱ [۲] بازای $n \geq ۲$ و $۱ \leq k \leq n - ۱$،

$$\gamma_{ks}^{-۱۰۱}(P_n) = \lceil \frac{k}{۳} \rceil + k - n + ۱.$$

قضیه ۴.۱ [۱۳] برای $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n - ۱$،

$$\gamma_{ks}^{-۱۰۱}(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n-۲}{۳} \rceil & \text{اگر } k = n - ۱ \text{ و } k \equiv ۰, ۱ (mod\ ۳) \\ ۲\lfloor \frac{۲k+۴}{۳} \rfloor - n & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

---

[۲] Broere

اگر $k=n$ آنگاه عدد k- زیر احاطه‌ای منفی، عدد احاطه‌ای منفی (MDN)، $\gamma_{ns}^{-101}(G)$، نامیده می‌شود. این تعریف توسط دونبار و همکاران [۳] مطرح شده است. قضیه زیر مقدار $\gamma_{ns}^{-101}(G)$ را در مسیرها و دورها نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۱ [۳]

۱) بازای $n \geq 2$، $\gamma_{ns}^{-101}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

۲) بازای $n \geq 3$، $\gamma_{ns}^{-101}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ یک تابع احاطه‌گر ستاره‌ای علامت‌دار $(SSDF)$ روی گراف G نامیده می‌شود هرگاه بازای هر رأس $v \in V(G)$،

$$f[v] = \sum_{e' \in E_G(v)} f(e) \geq 1,$$

که در آن $E_G(v) = \{uv \in E(G) \mid u \in N_G(v)\}$. عدد احاطه‌ای ستاره‌ای علامت‌دار $(SSDN)$، $\gamma_{SS}(G)$، عبارتست از:

$$\gamma_{SS}(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid \text{است } G \text{ از } SSDF \text{ یک } f\}.$$

تابع احاطه‌گر ستاره‌ای علامت‌دار f از گراف G را یک $\gamma_{SS}(G)$- تابع گویند هرگاه $f(E(G)) = \gamma_{SS}(G)$. مفهوم فوق در سال ۲۰۰۱ توسط اکس‌یو [۳۲] مطرح شده است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید مراجع [۲۵]، [۳۰] و [۳۵] را ببینید.

فصل ۲

عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار

در این فصل مفهوم k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را به عنوان تعمیمی از مفهوم احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار تعریف کرده و مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ یک تابع احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار $(SETDF)$ برای گراف G است هرگاه برای هر یال e از $E(G)$، $\sum_{e' \in N_G(e)} f(e') \geq ۱$. در بین تمامی چنین توابعی آنهایی که کمترین وزن را دارند توابع احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار مینیمم نامیده می‌شوند. وزن یک تابع احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار مینیمم، عدد احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار G، $\gamma'_{st}(G)$، نامیده می‌شود.

این مفهوم در سال ۲۰۰۲ توسط زلینکا [۳۷] ارائه شد. برای مطالعه بیشتر [۲۰] را ببینید.

تعریف ۱.۲ برای تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ و بازای هر رأس $v \in V(G)$، $f(v)$ را بصورت

$$f(v) = \sum_{e \in E_G(v)} f(e)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $E_G(v)$ همسایه یالی رأس v است.

تعریف ۲.۲ تابع $f : E(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ یک تابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار$(SETkSDF)$ برای گراف G است هرگاه برای حداقل k یال e از $E(G)$ داشته باشیم $\sum_{e' \in N_G(e)} f(e') \geq ۱$.
مینیمم مقدار $f(E(G))$ روی کلیه توابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار f از گراف G را عدد k- زیر

احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار ($SETkSDN$) گراف G، $\gamma'_{stk}(G)$، می‌نامیم. تابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار f از G با شرط $f(E(G)) = \gamma'_{stk}(G)$ را $\gamma'_{stk}(G)$- تابع گوییم.

برای هر تابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار f از گراف G تعریف می‌کنیم:

$$P = \{e \in E(G) \mid f(e) = ۱\},$$

$$M = \{e \in E(G) \mid f(e) = -۱\}$$

و

$$X = \{e \in E(G) \mid \sum_{e' \in N_G(e)} f(e') \geq ۱\}.$$

واضح است که اگر $k = m$ آنگاه عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار همان عدد احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار است. اگر $k = \lceil \frac{m}{۲} \rceil$ آنگاه عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را عدد احاطه‌ای اکثریت تام یالی علامت‌دار گویند. مفهوم عدد احاطه‌ای اکثریت تام یالی علامت‌دار، $\gamma'_{smt}(G)$، توسط کرمی [۱] و همکاران [۲۲] معرفی شده است.

در این فصل ابتدا عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را برای دورها و مسیرها تعیین می‌کنیم. سپس یک کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار ارائه داده و در نهایت کران‌هایی را برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار در جنگل‌ها بدست می‌آوریم.
برهان قضیه زیر سرراست است و از ذکر آن صرفنظر می‌کنیم.

قضیه ۳.۲ برای هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$،

$$\gamma'_{stk}(G) = \gamma^t_{ks}(L(G)).$$

از گزاره‌های ۱.۱، ۲.۱ و قضیه ۳.۲ نتایج زیر حاصل می‌شود.

[۱] Karami

نتیجه **۴.۲** برای $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n-۱$،

$$\gamma'_{stk}(P_n)=\begin{cases} -۱ & \text{اگر } k=\frac{n}{۲} \\ ۲k-n+۱ & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

نتیجه **۵.۲** برای $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n$،

$$\gamma'_{stk}(C_n)=\begin{cases} ۲k-n & \text{اگر } k\in\{\frac{n}{۲},n\} \\ ۲k+۲-n & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

تعریف ۶.۲ گراف G را همراه با یک تابع k- زیر احاطه‌گر تام یالی علامت‌دار f، (G,f)، گراف k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار $(SETkSDG)$ می‌نامیم. برای سادگی کار، یال e را $(+۱)$- یال از (G,f) گوییم هرگاه $f(e)=+۱$. به صورت مشابه، یال e را (-۱)- یال از (G,f) گوییم هرگاه $f(e)=-۱$.

۱.۲ یک کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار

در این بخش یک کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار برحسب اندازه ، ماکسیمم درجه و مینیمم درجه گراف G ارائه می‌کنیم.

قضیه ۷.۲ فرض کنید G گرافی ساده از اندازه m، مینیمم درجه δ و ماکسیمم درجه Δ باشد. فرض کنید G فاقد $K_۱$ و $K_۲$- مؤلفه باشد. در این‌صورت داریم

$$\gamma'_{stk}(G) \geq \frac{k\delta}{\Delta-۱}-m.$$

برهان : فرض کنید g یک $\gamma'_{stk}(G)$- تابع از گراف G باشد. فرض کنید برای k یال متمایز e در مجموعه $\{e_{j_1}=u_{j_1}v_{j_1},\dots,e_{j_k}=u_{j_k}v_{j_k}\}$، داشته باشیم $g(N_G(e))\geq 1$.

برای تابع $f:E(G)\longrightarrow\{0,1\}$ با ضابطه

$$f(e)=\frac{g(e)+1}{2} \tag{1.2}$$

داریم

$$\begin{aligned} f(N_G(e_{j_i}))=\textstyle\sum_{e\in N_G(e_{j_i})} f(e) &= \textstyle\sum_{e\in N_G(e_{j_i})}\frac{g(e)+1}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}(\textstyle\sum_{e\in N_G(e_{j_i})} g(e)+|N_G(e_{j_i})|)\\ &= \tfrac{1}{2}(g(N_G(e_{j_i}))+\deg(u_{j_i})+\deg(v_{j_i})-2). \end{aligned}$$

بنابراین بازای هر $i=1,\dots,k$،

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^k f(N_G(e_{j_i})) &= \textstyle\sum_{i=1}^k (g(N_G(e_{j_i}))+\deg(u_{j_i})+\deg(v_{j_i})-2)/2\\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^k (\deg(u_{j_i})+\deg(v_{j_i})-1)/2\\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^k \delta-1/2\\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^k \delta\\ &= k\delta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ازطرف دیگر

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^k f(N_G(e_{j_i})) &\leq \textstyle\sum_{e\in E(G)} f(N_G(e))\\ &= \textstyle\sum_{e=uv\in E(G)}(\deg(u)+\deg(v)-2)f(e)\\ &\leq \textstyle\sum_{e\in E(G)}(2\Delta-2)f(e)\\ &= (2\Delta-2)f(E(G)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

حال از (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$k\delta \leq \sum_{i=۱}^{k} f(N_G(e_{j_i})) \leq (۲\Delta - ۲) f(E(G)).$$

به عبارت دیگر

$$f(E(G)) \geq \frac{k\delta}{۲\Delta - ۲}.$$

حال با توجه به (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} f(E(G)) = \textstyle\sum_{e\in E(G)} f(e) &= \textstyle\sum_{e\in E(G)} (g(e) + ۱)/۲ \\ &= ۱/۲(\textstyle\sum_{e\in E(G)} g(e) + m) \\ &= ۱/۲(g(E(G) + m). \end{aligned}$$

چون $g(E(G)) = ۲f(E(G)) - m$، نتیجه می‌شود که

$$\gamma'_{stk}(G) = g(E(G)) \geq \frac{k\delta}{\Delta - ۱} - m.$$

□

به عنوان نتیجه مستقیم از قضیه ۷.۲ داریم:

نتیجه ۸.۲ برای هر گراف r- منتظم G ($r \geq ۲$) از اندازه m داریم

$$\gamma'_{stk}(G) \geq \frac{kr}{r - ۱} - m.$$

بعلاوه، کران فوق برای C_n و $k \in \{\frac{n}{۲}, n\}$ قابل وصول است.

۲.۲ کران پایین برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار جنگلها

در این بخش عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار را در جنگلها مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا یک کران پایین قابل وصول برای عدد k- زیر احاطه‌ای تام یالی علامت‌دار جنگلهایی را بدست می‌آوریم که