به نام آنکه، هستی نام از و یافت فلک. جنبش، زمین آرام از و یافت

خدایی کافرینش در سجودش گواهی مطلق آمد بر وجودش

تعالی الله یکی بی مثل و مانند که خوانندش خداوندان خداوند

فلک بر پای دار و انجم افروز خرد را بی میانجی حکمت آموز

دانشکده علوم

رساله دکتری

ریاضی محض

عنوان

گراف‌های وابسته به حلقه‌ها

نگارش

رضا نیک‌اندیش

استاد راهنما

دکتر محمدجواد نیک‌مهر

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز

و

همسر صبور و فداکارم

تقدیر و سپاسگذاری

اکنون که به لطف خدا کار این پایان‌نامه به فرجام رسیده بر خود لازم می‌دانم از بزرگوارانی که در این مسیر همراه من بوده‌اند تشکر نمایم. لذا از جناب آقای دکتر محمدجواد نیک‌مهر برای کوشش‌های فراوانش در این سالها و قبول زحمت راهنمایی این رساله بسیار سپاسگذارم. از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سعید اکبری که همواره راهنمایی‌های ارزشمندشان راهگشای اینجانب بوده بسیار متشکرم. از جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی، جناب آقای دکتر احمد موسوی، جناب آقای دکتر ابراهیم قربانی و سرکار خانم دکتر رمضانی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، متشکرم.

همچنین از دوستانم آقایان دکتر فرزاد شاویسی و قدرت‌الله عالی‌پور تشکر می‌کنم. در انتها، از همسر مهربانم به خاطر از خودگذشتگی و دلگرمیهایش و از پدر و مادر عزیزم به خاطر زحمات فراوانشان سپاسگذاری می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، برخی روابط بین خواص گرافی دو گراف وابسته به حلقه‌ها و خواص جبری حلقه‌ها را مطالعه می‌کنیم. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $I(R)^*$ مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های نابدیهی چپ R باشد. گراف اشتراکی ایده‌آل‌های R، که با $G(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $I(R)^*$ و دو رأس متمایز I و J متصل هستند اگر و تنها اگر $I \cap J \neq 0$. ما همه‌ی حلقه‌هایی که گراف اشتراکی ایده‌آل‌های آنها ناهمبند است را رده‌بندی می‌کنیم. از میان سایر نتایج، برای هر حلقه‌ی R، نشان داده می‌شود اگر عدد خوشه‌ای $G(R)$ متناهی باشد، آنگاه عدد رنگی رأسی آن نیز متناهی است و اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد، این دو مقدار برابرند. سپس نشان داده می‌شود $G(\mathbb{Z}_n)$، برای هر عدد صحیح مثبت n، گرافی تام ضعیف است. همچنین، برای برخی مقادیر n، فرمولی صریح برای عدد رنگی رأسی $G(\mathbb{Z}_n)$ ارائه می‌کنیم. بعلاوه، ثابت می‌شود عدد رنگی یالی گراف $G(\mathbb{Z}_n)$ و بیشترین درجه رئوس در این گراف برابرند مگر اینکه یا $G(\mathbb{Z}_n)$ گرافی پوچ با دو رأس یا گرافی کامل از مرتبه فرد باشد. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و $\mathbb{A}(R)^*$ مجموعه‌ی ایده‌آل‌های نابدیهی با پوچ‌کن ناصفر باشد. گراف ایده‌آل پوچ‌کن R بعنوان گراف $\mathbb{AG}(R)$ با مجموعه رئوس $\mathbb{A}(R)^*$ معرفی می‌شود و دو رأس متمایز I و J متصل هستند اگر و تنها اگر $IJ = 0$. نشان می‌دهیم اگر $\mathbb{AG}(R)$ درخت باشد، آنگاه یا $\mathbb{AG}(R)$ گراف ستاره یا مسیری از مرتبه‌ی چهار است و در حالت اخیر، $R \cong F \times S$، که F یک میدان و S حلقه‌ای با یک ایده‌آل نابدیهی است. همچنین، نشان می‌دهیم اگر R حداقل سه ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، آنگاه $\mathbb{AG}(R)$ درخت نیست. برای هر حلقه‌ی کاهشی R نشان داده می‌شود، اگر R حداقل سه ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، آنگاه $\mathbb{AG}(R)$ شامل یک مثلث است. همچنین برای هر حلقه‌ی غیرکاهشی R نشان می‌دهیم اگر $|\mathrm{Min}(R)| = 2$، آنگاه یا $\mathbb{AG}(R)$ شامل یک دور است یا مسیری از مرتبه‌ی چهار است. سرانجام، نشان داده می‌شود اگر $|\mathrm{Min}(R)| = 1$ و $\mathbb{AG}(R)$ گرافی دوبخشی باشد، آنگاه $\mathbb{AG}(R)$ یک گراف ستاره است.

کلمات کلیدی. گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه، گراف ایده‌آل پوچ‌کن، حلقه نوتری، حلقه آرتینی، حلقه کاهشی، عدد خوشه‌ای، عدد رنگی، ایده‌آل اول مینیمال، گراف دوبخشی، دور.

فهرست مطالب

۱ مقدمه

نظریه‌ی گراف علاوه بر اینکه امروزه بعنوان یکی از مهمترین شاخه‌های علم ریاضی محسوب می‌شود، بعنوان یک ابزار قوی در اختیار سایر علوم همچون شیمی، الکترونیک، مخابرات و غیره قرار گرفته است. از میان سایر شاخه‌های علم ریاضیات بعضی متخصصین علم جبر نیز سعی کرده‌اند گراف‌هایی به اشیاء جبری اعم از نیم‌گروه‌ها، گروه‌ها و حلقه‌ها نسبت دهند و از خواص هندسی گراف برای یافتن نتایجی در مورد ساختار جبری این اشیاء بهره گیرند و برای برخی از قضایای جبری ترجمه‌ای در خواص هندسی گراف‌ها بدست آورند. در واقع، هدف از معرفی این گراف‌ها را می‌توان استفاده از یک شیء ترکیبیاتی برای درک بهتر خواص اشیاء جبری دانست.

بررسی گراف‌های متناظر با حلقه‌ها، که این رساله نیز در همین راستا است، در دو دهه‌ی اخیر به یکی از مسائل جذاب در مطالعه‌ی حلقه‌ها تبدیل شده است. گراف‌های مختلفی متناظر با یک حلقه تعریف شده است که در ادامه، به طور مختصر و برای آشنایی بیشتر با این زمینه، بعضی از آنها را معرفی می‌کنیم.

اولین گرافی که به عناصر یک حلقه نظیر شد، گرافی بود که توسط بک[۱] در [۱۶] معرفی شد. این گراف بعدها، با اندکی تغییر در تعریف، گراف مقسوم‌علیه صفر نامیده شد. با توجه به نقش این گراف در این پایان‌نامه، در فصل پنجم بیشتر در مورد این گراف شرح خواهیم داد. در سال ۱۹۹۵ شارما[۲] و باتوادکار[۳] گراف هم‌ماکسیمال را در [۵۳] معرفی کردند. این گراف بعدها و در [۴]، [۴۲]، [۵۸] و [۵۹] مورد مطالعه‌ی بیشتر قرار گرفت. گراف دیگری که در این سال‌ها مورد توجه علاقه‌مندان نظریه حلقه واقع شده است گراف جمعی یک حلقه است. این گراف در [۱۰] توسط اندرسون[۴] و بداوی[۵] معرفی و در [۵] و [۴۳] مورد بررسی مفصل‌تر قرار گرفت. گراف‌های

[۱] Beck

[۲] Sharma

[۳] Bhatwadekar

[۴] Anderson

[۵] Badawi

متنوع دیگری به یک حلقه نظیر شده است که برای جلوگیری از طولانی شدن بحث به ذکر همین چند نمونه بسنده می‌کنیم.

با بررسی گراف‌های مختلف وابسته به یک حلقه می‌توان مطالعه‌ی آنها را در دو جهت کلی زیر خلاصه نمود:

(اول). با داشتن گرافی وابسته به یک حلقه کدام خواص جبری حلقه را می‌توان بدست آورد؟

(دوم). گراف وابسته به یک حلقه‌ی خاص چه خصوصیات هندسی دارد؟

بر همین اساس، ما در این پایان‌نامه دو گراف وابسته به ایده‌آل‌های یک حلقه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اولین گراف، که در فصل سوم با آن آشنا می‌شویم، گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه است. در فصل سوم، ابتدا قطر و برخی خواص ابتدایی این گراف را مطالعه می‌کنیم. همچنین پیرامون کامل بودن گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه تحقیق می‌کنیم. سپس، نتایجی در مورد عدد خوشه‌ای و عدد رنگی رأسی این گراف ارائه می‌شود. فصل سوم با مطالعه‌ی گراف‌های اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه که در آنها یک یا چند رأس به سایر رئوس متصل است پایان می‌یابد. مطالعه‌ی این گراف در فصل چهارم با تمرکز بر روی بررسی عدد رنگی رأسی و یالی گراف اشتراکی ایده‌آل‌های حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ ادامه می‌یابد. سرانجام و در فصل پنجم گراف دیگری با نام گراف ایده‌آل پوچ‌کن ایده‌آل‌های یک حلقه معرفی می‌شود. در رابطه با این گراف برخی شرایط متناهی بودن آن، قطر، کمر و ارتباط دورها در این گراف و ایده‌آل‌های اول مینیمال را مطالعه می‌کنیم. مطالب ارائه شده در این رساله منجر به استخراج مقالات [۲]، [۹]، [۴۷] و [۴۸] شده است. همچنین خواننده علاقه‌مند می‌تواند مطالبی دیگر در همین راستا را در [۱] و [۳] بیابد.

۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی (بدون اثبات) نظریه‌ی گراف، مورد نیاز در این رساله بیان می‌شود و در بخش دوم تعاریف و قضایای نظریه‌ی حلقه و مدول که به آنها نیاز داریم، بیان می‌شوند.

۱.۲ گراف

ابتدا تعاریف و قضایای مورد نیاز مربوط به نظریه‌ی گراف ارئه می‌شود. در سرتاسر این رساله فرض می‌کنیم تمامی گراف‌ها ساده هستند.

نمادگذاری ۱.۲. اگر G یک گراف باشد،

(الف) مجموعه رئوس G با $V(G)$ و مجموعه یال‌های G با $E(G)$ نشان داده می‌شود.

(ب) اگر u و v دو رأس متصل در G باشند، می‌نویسیم $u — v$.

(ج) یالی با دو انتهای u و v با $\{uv\}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. $|V(G)|$ مرتبه‌ی G و $|E(G)|$ اندازه‌ی G نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲. گراف G متناهی نامیده می‌شود اگر مرتبه‌اش متناهی باشد.

تعریف ۳.۲. فرض کنید v و w دو رأس از گراف G هستند. یک مسیر بین v و w عبارت است از دنباله‌ای از رئوس متمایز $v_i \in V(G)$ که $1 \leq i \leq n$ و $v_1 — v_2 — \cdots — v_n$ به طوری که $v = v_1$ و $w = v_n$. طول این مسیر $n-1$ در نظر گرفته می‌شود. هر مسیر به طول $n-1$ با P_n نمایش داده می‌شود. در صورتی که $v = w$ این مسیر دوری به طول $n-1$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲. گراف G همبند نامیده می‌شود اگر بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. اگر G همبند نباشد آن را ناهمبند نامند.

تعریف ۵.۲. هر گراف همبند بدون دور درخت نام دارد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید u و v دو رأس در گراف G باشند. فاصله‌ی بین u و v در G عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v.

تعریف ۷.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. قطر گراف G ماکسیمم فاصله بین رئوس G است. قطر G با $diam(G)$ نشان داده می‌شود. در صورتی که گراف همبند نباشد می‌نویسیم $diam(G) = \infty$.

تعریف ۸.۲. طول کوتاهترین دور در گراف G کمر G نام دارد. کمر G با $girth(G)$ نشان داده می‌شود. در صورتی که هیچ دوری در گراف موجود نباشد می‌نویسیم $girth(G) = \infty$.

تعریف ۹.۲. مکمل گراف G که با $\overline{G}$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$. همچنین دو رأس در G به یکدیگر متصل هستند اگر و تنها اگر در $\overline{G}$ متصل نباشند.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید G یک گراف باشد و $v \in V(G)$. درجه‌ی رأس v در گراف G عبارت است از تعداد یال‌های واقع بر رأس v. درجه‌ی رأس v با نماد $deg(v)$ نشان داده می‌شود. بیشترین درجه رئوس گراف G با $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود. همچنین مجموعه همسایه‌های v با نماد $N(v)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید r یک عدد نامنفی باشد. گراف G گرافی $r-$منتظم نامیده می‌شود اگر درجه‌ی هر رأس آن برابر r باشد.

تعریف ۱۲.۲. گراف G کامل نامیده می‌شود اگر هر دو رأس G به یکدیگر متصل باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی عدد طبیعی n با K_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. یک خوشه از G زیرگرافی کامل از G است. مرتبه‌ی بزرگترین خوشه در G عدد خوشه‌ای G نامیده می‌شود. عدد خوشه‌ای G با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. مینیمم تعداد رنگ مورد نیاز برای تخصیص به رئوس گراف به نحوی که رئوس متصل به یکدیگر دارای رنگ متمایز باشند، عدد رنگی رأسی گراف G نامیده می‌شود. عدد رنگی رأسی گراف G با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود. عدد رنگی یالی برای گراف G به طور مشابه تعریف می‌شود. عدد رنگی یالی گراف G با $\chi'(G)$ نشان داده می‌شود.

اگر G یک گراف باشد، واضح است که $\omega(G) \leq \chi(G)$. برای برخی گراف‌ها این نامساوی به طور اکید برقرار است. برای یافتن برخی از روش‌های رنگ‌آمیزی در گراف‌ها خواننده می تواند به [۳۹] مراجعه کند.

تعریف ۱۵.۲. اگر برای گراف G داشته باشیم $\omega(G) = \chi(G)$، آنگاه G تام ضعیف نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲. اگر در گراف G یک رأس به سایر رئوس متصل باشد و هیچ یال دیگری در G وجود نداشته باشد، G ستاره نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۲. برای گراف G اگر $\omega(G) = ۲$، آنگاه G فاقد مثلث نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. اگر $\chi(G) = ۲$، آنگاه G دوبخشی نامیده می‌شود. همچنین، گراف دوبخشی که هر رأس از یک بخش به همه‌ی رئوس بخش دیگر متصل باشد، دوبخشی کامل نامیده می‌شود. گراف دوبخشی کامل متناهی که مرتبه یک بخش از رئوسش m و مرتبه بخش دیگر n باشد با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود.

واضح است که هر گراف دوبخشی فاقد مثلث است. همچنین، گراف ستاره، گراف دوبخشی کاملی است که یک بخش از رئوسش تک عضوی باشد.

تعریف ۱۹.۲. در گراف G یک زیرمجموعه از $V(G)$ مستقل نامیده می‌شود اگر هیچ دو عضوی از آن در G به یکدیگر متصل نباشند. مرتبه‌ی بزرگترین مجموعه‌ی مستقل از G عدد استقلال G نامیده می‌شود. عدد استقلال G با $\alpha(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۰.۲. گراف G اویلری نام دارد هرگاه شامل گذر بسته‌ای باشد که از تمام یال‌های گراف یکبار گذر کند.

تعریف ۲۱.۲. گراف G همیلتونی نام دارد هرگاه شامل دوری باشد که از تمام رئوس گراف یکبار گذر کند.

تعریف ۲۲.۲. گراف G مسطح نام دارد اگر بتوان به گونه‌ای آن را در صفحه رسم کرد که یال‌های آن (به جز احتمالاً در رئوس) یکدیگر را قطع نکنند.

قضیه‌ی مقدماتی زیر شرطی لازم و کافی برای آنکه یک گراف اویلری باشد، ارائه می‌کند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G گرافی همبند باشد. در این صورت G اویلری است اگر و تنها اگر درجه‌ی هر رأس از G عددی زوج باشد.

اثبات. قضیه‌ی ۲۶.۲.۱ از [۶۰] را ببینید. □

قضیه‌ی زیر، به طور کامل، گراف‌های مسطح را شناسایی می‌کند.

قضیه ۲.۲. (قضیه‌ی کوراتووسکی[۱]) فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت G مسطح است اگر و تنها اگر شامل زیرتقسیمی از K_5 یا $K_{3,3}$ بعنوان زیرگراف نباشد.

اثبات. قضیه‌ی ۲.۲.۶ از [۶۰] را ببینید. □

قضیه ۳.۲. (قضیه‌ی ویزینگ[۲]) اگر G یک گراف باشد، آنگاه $\chi'(G) = \Delta(G)$ یا $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

اثبات. صفحه ۱۶ از [۶۱] را ببینید. □

فرض کنید G یک گراف باشد. در نظریه‌ی گراف، اگر $\chi'(G) = \Delta(G)$، آنگاه G را کلاس یک و در غیر این صورت آن را کلاس دو نامند.

دو قضیه‌ی زیر در شناسایی گراف‌های کلاس یک و دو به ما کمک می‌کنند.

---

[۱] Kuratowski

[۲] Vizing

قضیه ۴.۲. فرض کنید G یک گراف باشد. فرض کنید برای هر رأس u از بیشترین درجه، یال $\{uv\}$ موجود باشد به طوری که $\Delta(G) - deg(v) + ۲$ بیشتر از تعداد رئوس با بیشترین درجه در G باشد. در این صورت $\chi'(G) = \Delta(G)$.

اثبات. نتیجه‌ی ۴.۵ از [۱۹] را ببینید. □

قضیه ۵.۲. اگر G گرافی از مرتبه‌ی $۲s$ و $\Delta(G) = ۲s - ۱$، آنگاه $\chi'(G) = \Delta(G)$. اگر G گرافی از مرتبه‌ی $۲s + ۱$ و $\Delta(G) = ۲s$، آنگاه $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$ اگر و تنها اگر G حداقل از اندازه‌ی $۲s^۲ + ۱$ باشد.

اثبات. قضیه‌ی D از [۴۹] را ببینید. □

۲.۲ حلقه و مدول

در سرتاسر این رساله فرض می‌کنیم R حلقه‌ای یکدار (و نه لزوماً جابه‌جایی) است.

نمادگذاری ۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(الف) حلقه‌ی موضعی R با ایده‌آل چپ (راست) ماکسیمال $\mathfrak{m}$ با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نمایش داده می‌شود.

(ب) حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی R با نماد $M_n(R)$ نمایش داده می‌شود.

(ج) اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، مجموعه ایده‌آل‌های اول R با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نشان داده می‌شود.

(د) اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال R با نماد $\mathrm{Min}(R)$ نشان داده می‌شود.

(ه) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و M مدولی روی آن باشد. اگر N زیرمدولی از آن باشد، مجموعه پوچ‌ساز N با نماد $Ann(N)$ نشان داده می‌شود. همچنین اگر $x \in M$، پوچ‌ساز x با نماد $Ann(x)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۳.۲. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد. عضو $r \in R$ را مقسوم‌علیه صفر M نامند اگر $m \in M$ایی ناصفر وجود داشته باشد که $rm = ۰$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر M را با $Z(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۴.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ (راست) ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکبسون R نامند و با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۵.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه عناصر پوچ‌توان R را رادیکال پوچ R نامند و با $\mathrm{Nil}(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۶.۲. حلقه‌ی R کاهشی نامیده می‌شود اگر $\mathrm{Nil}(R) = ۰$.

تعریف ۲۷.۲. مدول M را ساده می‌نامند، هرگاه M هیچ زیرمدول نابدیهی نداشته باشد. همچنین، M را نیم‌ساده نامند، اگر M را بتوان به صورت حاصل جمع زیرمدول‌های ساده‌اش نوشت.

تعریف ۲۸.۲. مجموع زیرمدول‌های ساده‌ی مدول M را بنیان مدول M نامند و آن را با نماد $soc(M)$ نمایش می‌دهند.

فرض کنید M یک مدول باشد. واضح است اگر M نیم‌ساده باشد، آنگاه $soc(M) = M$.

تعریف ۲۹.۲. فرض کنید M یک R-مدول باشد. گردآیه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمدول‌های M صادق در شرط ACC (DCC) گفته می‌شود اگر هیچ زنجیر نامتناهی صعودی (نزولی) از زیرمدول‌های موجود در $\mathcal{A}$ مانند $M_۱ \subset M_۲ \subset \cdots$ ($M_۱ \supset M_۲ \supset \cdots$) موجود نباشد.

تعریف ۳۰.۲. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد. زیرمدول Q از M زیرمدول اولیه‌ی M نام دارد اگر $M/Q \neq ۰$ و برای هر $a \in Z(M/Q)$ عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد که $a^n(M/Q) = ۰$. همچنین اگر $\sqrt{Ann(M/Q)} = \mathfrak{p}$، آنگاه Q زیرمدول $\mathfrak{p}$-اولیه از M نامیده می‌شود .

تعریف ۳۱.۲. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی R و G زیرمدول سره‌ی M باشد. تجزیه اولیه‌ی G در M عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی زیرمدول اولیه از M که برابر با G باشد. تجزیه اولیه‌ای از G در M مانند $G = \cap_{i=۱}^{n} Q_i$، که برای هر i، $n \geq i \geq ۱$، Q_iها در M $\mathfrak{p}_i$-اولیه‌اند، را مینیمال گویند اگر $\mathfrak{p}_i$ها متمایز باشند و

برای هر j، $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم

$$Q_j \nsupseteq \bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i.$$

تعریف ۳۲.۲. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی نوتری R باشد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R ایده‌آل اول وابسته به M نامیده می‌شود اگر عضو ناصفری مانند $m \in M$ وجود داشته باشد که $Ann(m) = \mathfrak{p}$. مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با $\mathrm{Ass}(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۳.۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای جابه‌جایی آرتینی و موضعی باشد. در این صورت R گرنشتاین[1] نامیده می‌شود اگر فضای برداری $Ann(\mathfrak{m})$ روی میدان $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ یک بعدی باشد (در حالتی که R آرتینی و موضعی نباشد نیز تعریف می‌شود).

تعریف ۳۴.۲. یک سری ترکیبی برای مدولی مانند M زنجیری از زیرمدول‌ها مانند

$$M_0 = 0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

است به طوری که M_i/M_{i-1} مدولی ساده باشد (در اینجا نماد $\subset$ برای نشان دادن زیرمدول سره بودن به کار می‌رود).

تعریف ۳۵.۲. یک مدول متناهی طول نامیده می‌شود اگر شامل یک سری ترکیبی باشد.

تعریف ۳۶.۲. یک سری از زیرمدول‌ها برای مدولی مانند M زنجیری متناهی از زیرمدول‌ها به شکل

$$M_0 = 0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

است (در اینجا نماد $\subseteq$ برای نشان دادن زیرمدول بودن به کار می رود). یک تظریف از این سری، هر سری از زیرمدول‌هاست که شامل همه‌ی M_iها باشد.

[1] Gorenstein

تعریف ۳۷.۲. دو سری از زیرمدول‌ها مانند

$$M_0 = 0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

$$K_0 = 0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_t = M$$

یکریخت نامیده می‌شوند اگر $n = t$ و جایگشتی مانند π از $\{1, \ldots, n\}$ وجود داشته باشد که برای هر i، $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $M_i/M_{i-1} \cong K_{\pi(i)}/K_{\pi(i)-1}$.

ثابت می‌شود که اگر M مدولی متناهی طول باشد، آنگاه هر دو سری ترکیبی از M یکریخت هستند (بعنوان نمونه قضیه‌ی ۱۱.۴ از [۳۴] را ببینید). از این مطلب تعریف زیر را داریم.

تعریف ۳۸.۲. فرض کنید M مدولی متناهی طول باشد. در این صورت طول مشترک همه‌ی سری‌های ترکیبی برای M طول M نامیده می‌شود و با $l(M)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳۹.۲. زیرمدول اساسی از یک مدول، زیرمدولی است که با هر زیرمدول ناصفر از مدول دارای اشتراک ناصفر باشد.

تعریف ۴۰.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. عضو $r \in R$ خودتوان نامیده می‌شود اگر $r^2 = r$.

تعریف ۴۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ناصفر قلب R نام دارد. قلب R با نماد $\breve{R}$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۶.۲. (قضیه‌ی ودربرن–آرتین[۱]) فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌ساده چپ باشد. آنگاه حلقه‌های تقسیمی مانند $D_1, \ldots, D_k$ و اعداد طبیعی مانند $n_1, \ldots, n_k$ وجود دارند به طوری که $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$. عدد k و زوج‌های $(n_1, D_1), \ldots, (n_k, D_k)$ به طور یکتا مشخص می‌شوند.

[۱] Wedderburn-Artin

اثبات. گزاره‌ی ۵.۳ از [۴۰] را ببینید. □

قضیه ۷.۲. فرض کنید B زیرمدولی از مدول A باشد. در این صورت A آرتینی است اگر و تنها اگر B و A/B آرتینی باشند.

اثبات. گزاره‌ی ۵.۴ از [۳۴] را ببینید.

قضیه ۸.۲. هر حلقه‌ی جابه‌جایی آرتینی به طور یکتا به حاصلضرب تعداد متناهی از حلقه‌های آرتینی موضعی تجزیه می‌شود.

اثبات. قضیه‌ی ۷.۸ از [۱۳] را ببینید. □

قضیه ۹.۲. برای هر حلقه‌ی R، $soc(R)$ ایده‌آل دوطرفه‌ای از R است.

اثبات. تمرین ۱۹ صفحه‌ی ۶۹ از [۴۰] را ببینید. □

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی جابه‌جایی نوتری R باشد. در این صورت I تجزیه اولیه‌ای مینیمال دارد.

اثبات. نتیجه‌ی ۳۵.۴ از [۵۴] را ببینید. □

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد به طوری که ایده‌آل $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در این صورت $\mathfrak{q}$ ایده‌آل $\mathfrak{m}$-اولیه‌ی R است.

اثبات. قضیه‌ی ۹.۴ از [۵۴] را ببینید. □

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی جابه‌جایی نوتری R و G زیرمدول سره‌ی M باشد. اگر $G = \cap_{i=1}^{n} Q_i$، که برای هر i، $1 \leq i \leq n$، Q_iها در M $\mathfrak{p}_i$-اولیه‌اند، تجزیه اولیه مینیمال G در M باشد، در این

صورت به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R داریم

$$\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \leftrightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/G).$$

به ویژه اگر $M \neq 0$، داریم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ یکی از ایده‌آل‌های اولی باشد که در تجزیه اولیه‌ی مینیمال صفر در M ظاهر شود.

اثبات. از [۵۴]، قسمت دوم تذکر ۳۳.۹ را ببینید. □

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی نوتری R باشد. در این صورت

$$Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

اثبات. نتیجه‌ی ۳۶.۹ از [۵۴] را ببینید. □

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت

$$\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}.$$

اثبات. گزاره‌ی ۸.۱ از [۱۳] را ببینید. □

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای جابه‌جایی، آرتینی و موضعی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) R یک حلقه‌ی گرنشتاین است.

(ب) هر R-مدول متناهی مولد انعکاسی است.

(ج) برای هر ایده‌آل I از R داریم $Ann(Ann(I)) = I$.

(د) اگر I و J دو ایده‌آل ناصفر از R باشند داریم $I \cap J \neq 0$.

اثبات. تمرین ۱۵.۲.۳ از [۲۱] را ببینید. □

قضیه ۱۶.۲. (قضیه‌ی هاپکینز-لویتزکی[۱]) اگر R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد، آنگاه R نوتری چپ است و $J(R)$ پوچ‌توان است.

اثبات. قضیه‌ی ۱۵.۴ از [۳۴] را ببینید. □

قضیه ۱۷.۲. (لم ناکایاما[۲]) برای هر ایده‌آل چپ J از حلقه‌ی R گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) $J \subseteq J(R)$.

(ب) اگر M یک R-مدول چپ متناهی مولد باشد و $JM = M$، آنگاه $M = 0$.

(ج) برای R-مدول چپ M که $N \subseteq M$ که M/N متناهی مولد است رابطه‌ی $N + JM = M$ تساوی $N = M$ را نتیجه می‌دهد.

اثبات. گزاره‌ی ۲۲.۴ از [۴۰] را ببینید. □

قضیه ۱۸.۲. (قضیه‌ی شریر[۳]) هر دو سری از زیرمدول‌های یک مدول M دارای تظریف‌های یکریخت هستند.

اثبات. قضیه‌ی ۱۰.۴ از [۳۴] را ببینید. □

قضیه ۱۹.۲. فرض کنید M یک R-مدول با طول متناهی باشد. اگر N زیرمدولی از M باشد، در این صورت

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

اثبات. گزاره‌ی ۱۲.۴ از [۳۴] را ببینید. □

قضیه ۲۰.۲. فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم متناهی است. در این صورت D یک میدان متناهی است.

[۱] Hopkins-Levitzki

[۲] Nakayama

[۳] Schreier