دانشگاه کاشان

دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی –گرایش آنالیز

عنوان:

مسائل اکسترمم مقید با تصویربی‌نهایت بعدی. انتخاب و نقطهٔ زینی

استاد راهنما:

دکترخیراللّه پوربرات

نویسنده :

سمیه مدنی

بهمن ۸۷

چکیده

این پایان نامه با آنالیز فضای تصویر مسائل اکسترمم مقید که دارای تصویر بابعد نامتناهی هستند، سروکار دارد. نشان داده‌شده‌است که مقدمهٔ انتخاب برای نگاشت‌های مجموعه مقدار و شبه‌مضارب این امکان را به ما می‌دهد که شرایط کافی بهینه‌بودن را جایی‌که روش‌های کلاسیک شکست می‌خورد، برای این مسائل نشان دهیم.

لغات کلیدی : شرایط بهینه‌بودن. نقطهٔ زینی. مضارب . شبه‌مضارب. آنالیز فضای تصویر.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۰۰) $90C$. $65K$

فهرست مندرجات

مقدمه

این پایان‌نامه دربارهٔ مسائل ژئودزیک که دسته‌ای از مسائل اکسترمم مقید می‌باشد و دارای بعد تصویر نامتناهی است، نوشته‌شده‌است. یکی از مسائل اوّلیهٔ حساب تغییرات مسائل ژئودزیک می‌باشد مانند مسألهٔ یافتن منحنی مینیمم که دو نقطهٔ A وB را به هم وصل می‌کند.

مسائل اکسترمم مقید براساس تحلیل فضای تصویرشان یعنی فضایی که تصاویر توابع در آن‌ها قراردارند، طبقه‌بندی می‌شوند. پیشرفت در این مسائل از سه دهه قبل آغاز شده‌است. قطعاً مطالعهٔ ویژگی‌های توابع حقیقی مقدار از نوع قدیمی آن می‌باشد به هر حال در اغلب حالات ویژگی‌های تصویر هدف مطالعه وتحقیق نیست. تحلیل فضای تصویر یک گام اولّیه وکمکی برای مطالعهٔ مسائل اکسترمم وتعادلی است. آنالیز روی فضای تصویر روی فضایای جداسازی پایه گذاری شده‌است. این ابزارهای ریاضی برای مدت زیادی در زمینهٔ مسائل اکسترمم مقید استفاده شده‌است. این امکان در آنالیز وجوددارد که می‌توان مسألهٔ با تصویر نامتناهی بعد را به یک فضای تصویر متناهی بعد مربوط ساخت این کار به وسیلهٔ درنظر گرفتن به‌عنوان توابع چند ضابطه‌ای با مقادیری از زیرمجموعه‌های مناسب از یک فضای متناهی‌بعد انجام می‌گیرد. در فرض‌هایی که پیوستگی توابع را دربرمی‌گیرد، وجود یک انتخاب برای تصویر تابع چندضابطه‌ای به‌طوری که برد این تابع بایک زیرمجموعهٔ مناسب ازفضای تصویر اشتراک تهی باشد، یک شرط لازم و کافی برای بهین بودن در مسألهٔ ژئودزیک است. همچنین یک انتخاب می‌تواند به‌وسیلهٔ یک انتگرال وزنی بیان شود که وزن ها، شبه‌مضرب‌های انتخاب نامیده‌می‌شوند. که می‌تواند توسیعی از کلاس مضارب انتخاب باشد. هنگامی‌که مضارب انتخاب به‌طورموضعی به مجهول x بستگی نداشته باشد، شرایط کلاسیک لازم و یا کافی بهینه‌بودن از حساب تغییرات می‌تواند دوباره به‌دست آید. قسمتی از شرایط لازم بهین بودن

در فصل ۳ بیان شده است و در فصل ۴ به شرایط کافی بهینه بودن پرداخته‌ایم.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱—۱ مجموعه های محدب

تعریف ۱.۱ مجموعهٔ غیر تهی $K \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب است اگروتنهااگر $\forall x_1, x_2 \in K$ و $\forall \alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم: $(1-\alpha)\, x_1 + \alpha x_2 \in K$

قرارداد می‌کنیم مجموعه‌های تهی و تک‌عضوی محدب باشند.

تعریف ۲.۱ اگر $\mathrm{int}K \neq \phi$ ، K به‌طوراکید محدب است اگروتنهااگر

$x_1 \neq x_2$, $\forall x_1, x_2 \in clK$ $\forall \alpha \in (0, 1)$ $(1-\alpha)\, x_1 + \alpha x_2 \in intK$

هر زیرفضا وهر نیم‌فضا محدب است.

بستار محدب $K \subseteq \mathbb{R}^n$ عبارت است ازاشتراک همه مجموعه‌های محدب و بسته‌ای که شامل K هستند.

گزاره ۳.۱ اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های محدب، محدب است.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم $x, x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ گوییم x ترکیب محدب $x_1, \ldots, x_r$ است اگروتنهااگر $\alpha_1 \ldots \alpha_r \in [0, 1]$ وجودداشته‌باشد به‌طوری که $\sum_1^r \alpha_i = 1$, $x = \sum_1^r \alpha_i x_i$. اگر $r > 2, i = 1 \ldots r : \alpha_i > 0$ آن‌گاه x ترکیب محدب سره نامیده‌می‌شود.

برای هر $K \subseteq \mathbb{R}^n$ داده شده اشتراک همه مجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ که شامل K هستند،راغلاف محدب K می‌گوییم که با $convK$ نمایش می‌دهیم. غلاف محدب $K \subseteq \mathbb{R}^n$ برابراست با مجموعهٔ همهٔ ترکیبات محدب عناصر K. به عبارت دیگر

$$convK == \{\Sigma_1^n \alpha_i x_i \mid x_i \in K, \alpha_i \geq 0, \Sigma_1^n \alpha_i = 1\}$$

گزاره ۵.۱ بستارمحدب K برابر با$cl\ conv\ k$ است.

اثبات. $cl\ convK$ بسته ومحدب است و به‌وضوح شامل K است. برهان خلف:فرض کنیم مجموعهٔ محدب $\hat{K}$ وجود دارد به‌طوری که $K \subseteq \hat{K} \subset clconvK$

این نتیجه می‌دهد که $\exists \hat{x} \in (convK) - \hat{K}$ تناقض از این حقیقت ناشی می‌شود $\hat{x} \in convK$ نتیجه می‌دهد که $\hat{x}$ متعلق به هر مجموعهٔ محدبی است که شامل K است وبنابراین $\hat{x}$ متعلق به $\hat{K}$ نیز می‌باشد. □

اگر K محدب وباز باشد آن‌گاه$K = convK \subset clconvK$

گزاره ۶.۱ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب است اگروتنهااگر $K = conv\ K$ و یا اگروتنهااگر هر ترکیب محدب از عناصر K متعلق به K باشد.

اثبات. رجوع شود به مرجع ۴. □

قضیه ۷.۱ (c.caratheodory)فرض کنیم $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ، هر عضو $convK$ می‌تواند به صورت ترکیب محدب حداکثر $n + 1$ عنصر K بیان شود.

تعریف ۸.۱ (زیرفضای برداری) گیریم V فضایی برداری برروی هیأت F باشد. یک زیرفضای V، عبارت است از یک زیرمجموعهٔ W از V که خود با اعمال جمع برداری وضرب اسکالری روی V، خود یک فضای برداری به روی F باشد.

یک زیرفضای آفین از یک فضای برداری V، یک زیرمجموعهٔ بسته تحت ترکیبات آفین بردارهای فضاست. برای مثال مجموعهٔ $A = \{\Sigma_1^N \alpha_i v_i \mid \Sigma_1^N \alpha_i = 1\}$ یک زیرفضای آفین است. برای نشان دادن این که این مجموعه یک فضای آفین است، مشاهده‌می‌کنیم که این مجموعه یک عمل انتقال را روی زیرفضای برداری W از V ، که $W = \{\Sigma_1^N \beta_i v_i \mid \Sigma_1^N \beta_i = 0\}$ انجام داده‌است.

در تعریف قبل اگر V را فضای $\mathbb{R}^n$ درنظربگیریم،

فرض می‌کنیم W یک زیرفضای $m \leq n$ بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد،(اگر $m = n$ آن‌گاه $W = \mathbb{R}^n$) به‌ازای‌هر $a \in \mathbb{R}^n$ مجموعهٔ $a + W = \{a + w : w \in W\}$ یک زیرفضای آفین (مربوط به W) از $\mathbb{R}^n$ نامیده‌می‌شود وتعریف می‌کنیم $dim\ a + W = dim\ W$.

یک فضای برداری خود یک فضای آفین نیز می‌باشد.

گیریم $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ، زیرفضای آفین باکمترین بعد شامل K را غلاف آفین K نامیم و آن رابا $affK$ نشان‌می‌دهیم. منظور از $dimaffK$ بعد همین زیرفضای آفین است.

می‌توان گفت $affK$ مجموعهٔ همهٔ ترکیبات آفین K است ویابه عبارت دیگر

$$affK = \{\Sigma_1^n \alpha_i x_i \mid x_i \in K, \alpha_i \in \mathbb{R}, \Sigma_1^n \alpha_i = 1\}$$

بردارهای $K_1, \ldots, K_{m+1} \in K$ با $m \leq n$ مستقل آفینی هستند اگر

$$dimaff\{K_1, \ldots, K_{m+1}\} = m$$

یک ابرصفحهٔ آفین، یک زیرفضای آفین $(n-1)$–بعدی از یک فضای برداری n–بعدی است.

یک ابرصفحهٔ برداری (خطی)، یک زیرفضای برداری $(n-1)$–بعدی از یک فضای برداری n–بعدی است. دریک فضای n–بعدی معادلهٔ یک ابرصفحه برداری به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ می‌باشد که اگر $b = 0$ باشد معادلهٔ ابرصفحهٔ خطی یا همگن به‌دست می‌آید.

درفضای یک‌بعدی (خط راست)، ابرصفحه یک نقطه است، که خط را به دو نیم‌خط تقسیم می‌کند. در صفحه، ابرصفحه یک خط است. درفضای سه‌بعدی، ابرصفحه یک صفحه‌است.

هرابرصفحه، فضا را به دو قسمت تقسیم می‌کند هر یک از این دو قسمت نیم‌فضا نامیده می‌شود. یک نیم‌فضامی‌تواند به‌وسیلهٔ نامعادلهٔ خطی مشخص شود که‌از معادلهٔ خطی ابرصفحه‌ای که آن را تعریف می‌کند، گرفته‌می‌شود. اگر فضا n–بعدی باشد، در حالت اکید $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b$ که نشان‌دهندهٔ نیم‌فضای باز است. و در حالت غیراکید $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$ که نشان دهندهٔ نیم‌فضای بسته است. (دراینجا $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ومخالف صفرند.)

درون نسبی[1] K، تظریف مفهوم درون است که اغلب درمورد مجموعه‌هایی که دارای بعد کمتر از فضایی که در آن قرارگرفته‌اند، می‌باشند به‌کارمی‌رود.

درون نسبی K شامل نقاطی‌است که نسبت به زیرفضای کوچکتر که ازمجموعهٔ K عبور می‌کند، درلبهٔ مجموعه نمی‌باشند. به‌عبارتی درون نسبی مجموعهٔ K درون آن داخل غلاف آفین K می‌باشد. یعنی

$$ri(K) = \{x \in K : \exists \epsilon > 0; (N_\epsilon(x) \cap aff(K)) \subset K\}$$

که $N_\epsilon(x)$ گوی باز به شعاع ϵ حول x در هر فضای متریکی می‌تواند باشد.

اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $A \subseteq H$، تعریف می‌کنیم

$$A^\perp = \{x \in H :< x, y >= 0, y \in A\}$$

$A^\perp$ یک زیرفضای خطی بستهٔ H است زیرا می‌دانیم اگر $x \perp y$ آن‌گاه

$$< x + y, x + y >= \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

بااستفاده از پیوستگی وخطی‌بودن ضرب داخلی برای مؤلفهٔ اول نتیجه‌می‌گیریم که $A^\perp$ زیرفضای بستهٔ H است. اگر x یک نقطهٔ حدی $A^\perp$ باشد پس دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $A^\perp$ وجوددارد که $x_n \longrightarrow x$ وبرای هر $y \in A$ و برای هر n داریم: $< x_n, y >= 0$ و $< x, y >= \lim_{n \longrightarrow +\infty} < x_n, y > = \lim_{n \longrightarrow +\infty} 0 = 0$ بنابراین $x \in A^\perp$.

[1] relative interior

برای زیرفضای بستهٔ M از H وبرای $h \in H$، می‌دانیم $y_\circ$ منحصربه‌فرد در M موجود است به‌قسمی که $h - y^\circ \in M^\perp$، بنابراین می‌توان تابع $P : H \longrightarrow M$ که $Ph = y_\circ$ را تعریف کرد. P را تصویر[۲] h برروی M می‌نامیم.

۱—۲ مخروط

حالت خاصی از مجموعه‌های محدب مخروط‌های محدب هستند که نقش مهمی در زمینهٔ مسائل اکسترمم مقید ایفامی‌کنند.

تعریف ۹.۱ مجموعهٔ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ مخروط با رأس $\bar{x} \in clK$ است اگروتنهااگر

$$.x \in K, \alpha \in (\circ, +\infty) \Longrightarrow \bar{x} + \alpha(x - \bar{x}) \in K \qquad (۱.۲.۱a)$$

برای $\bar{x} = \circ$ تعریف به شکل زیر در می آید: K مخروط با رأس مبدأنامیده می شود یا به طور ساده‌تر یک مخروط است اگروتنهااگر

$$.x \in K, \alpha \in (\circ, +\infty) \Longrightarrow \alpha x \in K \qquad (۱.۲.۱b)$$

به‌علاوه اگر K محدب باشد، آن را مخروط محدب می‌نامیم. K یک مخروط نوکدار است اگروتنهااگر

$$.(clK) \cap (-clK) = \{\circ\} \qquad (۲.۲.۱)$$

وقتی‌که رأس در نقطهٔ $\bar{x}$ است آن‌گاه رابطهٔ بالا می‌بایست برای $K - \bar{x}$ صدق کند. مخروط K اکیداً نوکدار نامیده‌می‌شود اگروتنهااگر K و$convK$ نوکدار باشند.

مخروط$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n :< y, x >\geq \circ, \forall x \in K\}$ را قطب مثبت K می‌نامند.

فضای کامل $\mathbb{R}^n$، یک نیم‌فضا،یک ابرصفحه و یک خط مخروط هستندکه هرعضو (از فضا، از مرز یک نیم‌فضا، از ابرصفحه واز خط) می‌تواند نقش رأس را ایفاکند. تعریف بالا برای مجموعهٔ $K \subseteq B$ که B یک فضای باناخ است، برای مثال $B = C^\circ[a, b]$، نیاز به هیچ‌گونه تغییری ندارد.

مثال ۱۰.۱ مجموعه های K و$K - \{\circ\}$ وقتی‌که

[۲] projection

شکل ۱-۱:

$K = \mathbb{R}^2_+ \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0, x_2 > 0\}$ مخروط های محدب می باشند،که نوکدار نیستند.

K مخروط با رأس صفر است: زیرا

$$\alpha \in \mathbb{R}_+, x \in K \Longrightarrow \alpha x_1 < 0, \alpha x_2 > 0 : \alpha x \in K$$

و محدب است زیرا:

$$\alpha, \beta \in (0, 1) \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in K$$

چون $\alpha x_1 < 0$ و $\beta y_1 < 0$ درنتیجه $\alpha x_1 + \beta y_1 < 0$ به‌همین ترتیب $\alpha x_2 > 0$ و $\beta y_2 > 0$ درنتیجه $\alpha x_2 + \beta y_2 > 0$.

داریم:

$$clK = \mathbb{R}^2_+ \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$-clK = \mathbb{R}^2_- \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$$

بنابراین $(clK) \cap (-clK) = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ پس K نوکدار نیست.

مثال ۱.۱۱ مجموعهٔ

$$K = \mathbb{R}^3_+ \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 - x_2 + x_3 \geq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_2 \geq x_1\}$$

یک مخروط محدب نوکدار است.

شکل ۱–۲:

K معادل با مجموعهٔ روبرو است: $K = \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3_+ : x_3 > x_1+x_2 \ , x_1 > x_2\}$

K مخروط با رأس صفر است زیرا اگر $\alpha\in\mathbb{R}_+$ و $x=(x_1,x_2,x_3)\in K$ داریم: $\alpha x\in \mathbb{R}^3_+$ و $\alpha x_3 > \alpha x_1+\alpha x_2$ و $\alpha x_1 > \alpha x_2$ وبنابراین $\alpha x\in K$.

K محدب است زیرااگر $\alpha,\beta\in(0,1)$ و $x,y\in K$ داریم: $\alpha x_3 > \alpha x_1+\alpha x_2$ و $\beta y_3 > \beta y_1+\beta y_2$ نتیجه می‌دهد: $\alpha x_3+\beta y_3 > (\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)$. از طرف دیگر $\alpha x_1 > \alpha x_2$ و $\beta y_1 > \beta y_2$ نتیجه می‌دهد: $\alpha x_1+\beta y_1 > \alpha x_2+\beta y_2$ وبنابراین $\alpha x+\beta y\in K$.

K نوکدار است زیرا داریم

$$clK = \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3_+ : x_3 \geq x_1+x_2, x_1 \geq x_2\}$$

$$-clK = \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3_- : x_3 \leq x_1+x_2, x_1 \leq x_2\}$$

$$(clK)\cap(-clK) = \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3_+\cap\mathbb{R}^3_- : x_3 = x_1+x_2, x_1 = x_2\} =$$
$$= \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3_+\cap\mathbb{R}^3_- : \tfrac{x_3}{2} = x_1 = x_2\} = \{(0,0,0)\}$$

گزاره ۱۲.۱ $K\subseteq\mathbb{R}^n$ مخروط محدب است اگروتنهااگر

$$x^1, x^2\in K, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2_+ - \{0\} \Longrightarrow \alpha x^1+\beta x^2\in K \qquad (۳.۲.۱)$$

اثبات. شرط کافی: با قراردادن $\alpha = 1-\beta$ که $\beta\in[0,1]$ رابطهٔ (۳.۲.۱) محدب بودن K را نشان‌می‌دهد.و با قراردادن $x^1 = x^2$ رابطهٔ (۳.۲.۱) به‌شکل (۱.۲.۱) در می‌آید.

شرط لازم: قرارمی‌دهیم $\delta = \alpha + \beta$ و$\gamma = \beta/\delta$ $\forall x^۱, x^۲ \in K$ و از محدب‌بودن K نتیجه‌می‌گیریم که $\hat{x} = (۱ - \gamma)x^۱ + \gamma x^۲ \in K$ که K یک مخروط می‌باشد.رابطهٔ آخر نتیجه می‌دهد که $\delta\hat{x} \in K$ و(۱.۱) نتیجه‌می‌شود. □

گزارهٔ قبل مشخص می‌کند مخروط های محدب مجموعه‌هایی هستند که تحت جمع برداری بسته‌اند وضرب اسکالر نامنفی دارند.

تعریف ۱۳.۱ فرض‌کنیم $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ و $X \subset \mathbb{R}^n$و$\{\bar{x}\} \neq X$. مخروط تولید شده توسط X از $\bar{x}$ مجموعهٔ

$$coneX = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x} + \alpha(y - \bar{x}), y \in X, \alpha \in (\circ . + \infty)\} \qquad (۴.۲.۱a)$$

می‌باشد. وقتی $\bar{x} = \circ$ آن‌گاه:

$$coneX = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y, y \in X, \alpha \in (\circ . + \infty)\} \qquad (۴.۲.۱b)$$

این دومجموعهٔ (۴.۲.۱) مخروط می باشند وغلاف محدبشان به‌ترتیب مخروط تولیدشده از $\bar{x}$ توسط X و مخروط تولیدشده توسط X نامیده‌می‌شود.

یک دستهٔ مهم از مخروط‌های بارأس در مبدأ به‌وسیلهٔ ویژگی زیر تعریف می‌شوند: $K + clK = K$. اگر K محدب وبسته یا(باز) باشد، این ویژگی برای آن صدق‌می‌کند.

یک مخروط محدب که بسته نیست وویژگی بالا را داراست،نمی‌تواند شامل مبدأ باشد: برهان خلف: فرض کنیم شامل مبدأ باشد می گیریم $a = \circ \in K$ و$\circ \neq b \in (clK) - K$ از طرفی به دلیل بسته نبودن داریم:$a + b \notin K$ که با $K + clK = K$ متناقض است.

گزاره ۱۴.۱ اگر در مخروط محدب K رابطهٔ $K + clK = K$ برقرارباشد و $K = clK - \{\circ\}$ آن‌گاه K نوکداراست.

اثبات. برهان خلف: فرض‌می‌کنیم نوکدار نباشد یعنی $(clK) \cap (-clK) \neq \{\circ\}$ بنابراین $\exists k \in (clK) \cap (-clK) - \{\circ\}$ پس داریم: $k, -k \in K$ وبه‌دلیل محدب بودن K $k + (-k) = \circ$ که با فرض تناقض دارد. □

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم مجموعهٔ ناتهی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و $\bar{x} \in clX$ داده شده‌باشد مجموعهٔ $\bar{x}+x \in \mathbb{R}^n$ هایی که دنبالهٔ $\{x^i\}_1^\infty \subseteq clX$ موجودباشد، که $lim_{i\longrightarrow+\infty}x^i = \bar{x}$ ودنباله $\{\alpha_i\}_1^\infty \subset \mathbb{R}_+ - \{0\}$ که $lim_{i\longrightarrow+\infty}\alpha_i = +\infty$ وجود داشته‌باشد، به‌طوری که

$$lim_{i\longrightarrow+\infty}\alpha_i(x^i - \bar{x}) = x \qquad (۵.۲.۱)$$

مخروط مماس X در $\bar{x}$ نامیده‌می‌شود که آن را با $TC(\bar{x};X)$ نشان‌می‌دهیم. قیدمی‌کنیم $TC(\emptyset;\emptyset) = \emptyset$.

اگر $\bar{x} = 0$ آن‌گاه مخروط مماس به‌شکل $TC(X)$ نوشته‌می‌شود.

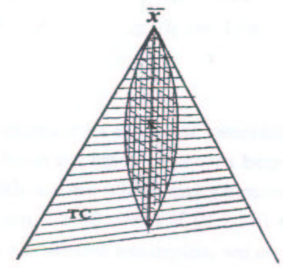
به راحتی مشاهده‌می‌کنیم که $TC(\bar{x};X)$ یک مخروط با رأس $\bar{x}$ است.

زیرا اگر $y \in TC(X;\bar{x})$ آن‌گاه $y = \bar{x}+x$ که دنبالهٔ $\{x^i\} \subseteq clX$ موجود است که $lim_{i\longrightarrow+\infty}x^i = \bar{x}$ و دنباله $\{\alpha_i\}_1^\infty \subset \mathbb{R}_+ - \{0\}$ که $lim_{i\longrightarrow+\infty}\alpha_i = +\infty$ وجود دارد که $lim_{i\longrightarrow+\infty}\alpha_i(x^i-\bar{x}) = x$ اگر $\beta \subset \mathbb{R}_+$ آن‌گاه داریم: $\bar{x}+\beta(y-\bar{x}) = \bar{x}+\beta x$ که باید در $TC(X;\bar{x})$ قرار داشته باشد.اگر $\alpha_i \longrightarrow +\infty$ پس $\beta\alpha_i \longrightarrow +\infty$ بنابراین $lim_{i\longrightarrow+\infty}\beta\alpha_i(x^i-\bar{x}) = \beta\lim_{i\longrightarrow+\infty}\alpha_i(x^i-\bar{x}) = \beta x$ بنابراین $\bar{x}+\beta x \in TC(X;\bar{x})$.

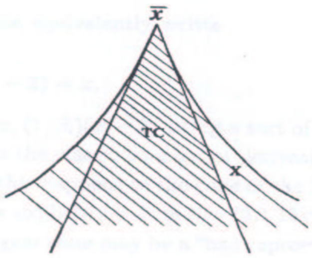
اگر $\bar{x} \in intX$ آن‌گاه $TC(\bar{x};X) = \mathbb{R}^n$. زیرااگر $\bar{x}$ نقطهٔ درونی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه همسایگی باز $N_\epsilon(\bar{x})$ به شعاع ϵ و به مرکز $\bar{x}$ وجود دارد و برای دنبالهٔ $\frac{y}{n}$ که $y \in \mathbb{R}^n$ ، $N_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N_1$ داشته‌باشیم $\frac{y}{n} < \epsilon$ لذا دنبالهٔ $\bar{x}+\frac{y}{n}$ به $\bar{x}$ میل می‌کند. قرار می‌دهیم $\{\alpha_n\} = \{n\}$ و $\{x^n\} = \{\bar{x}+\frac{y}{n}\}$ لذا $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n(\bar{x}+\frac{y}{n}-\bar{x}) = y$ از طرفی $y+\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ بنابراین $TC(\bar{x};X) = \mathbb{R}^n$.

داریم: $TC(\bar{x};\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ و $TC(\bar{x};\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$ و $TC(\bar{x};\mathbb{Z}^n) = \bar{x}$(البته با $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$ چون $cl\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$).

برای نشان دادن $TC(\bar{x};\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$ ، می‌دانیم $cl\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$ بنابراین $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. فرض می‌کنیم $x \in \mathbb{R}^n$ دلخواه باشد بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\} = \{\bar{x}+\frac{x}{n}\} \in \mathbb{R}^n$ به $\bar{x}$ میل می‌کند. قرارمی‌دهیم $\{\alpha_n\} = \{n\} \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ وبنابراین داریم: $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n(\bar{x}+\frac{x}{n}-\bar{x}) = x$ و $x+\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ و بنابراین $TC(\bar{x};\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$.



شکل ۱—۳:



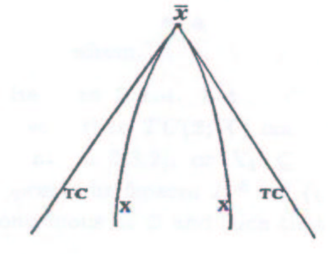
شکل ۱—۴:

حال نشان می‌دهیم $TC(\bar{x};\mathbb{Z}^n)=\bar{x}$: دنبالهٔ $\{\bar{x}\}\in\mathbb{Z}^n$ درنظرمی‌گیریم وقرارمی‌دهیم $\alpha_n=\{n\}$ بنابراین داریم: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}n(\bar{x}-\bar{x})=\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\times ۰=۰$.

شکل های (۱ − ٦) ,(۱ − ۷)، مخروط های مماس مشابه‌دارند. X درابتدا پیوسته است ولی در شکل بعدی یک مجموعهٔ غیر شماراست.

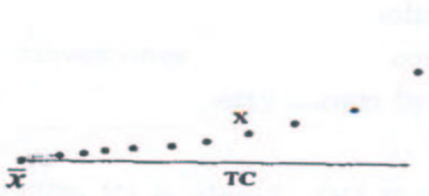
در شکل (۱ − ۸)، X مکمل یک دایره است فرقی نمی کند باز باشد یا بسته. در شکل (۱ − ۹)، X دنبالهٔ نامتناهی از مرز مربعات است. در شکل (۱ − ۱۰)، داریم: $TC(\bar{x};X)=\mathbb{R}^۲$. به‌سادگی می‌توان نشان‌داد اگر $X\neq\emptyset$ آن‌گاه $TC(\bar{x};X)\neq\emptyset$. درتعریف مخروط مماس با قراردادن $\beta_i=\frac{۱}{\alpha_i}$ می‌توان (۵.۲.۱) را به طور معادل به شکل رابطهٔ زیر می‌توان‌نوشت:

$$lim_{\beta_i\downarrow ۰}\frac{۱}{\beta_i}(x^i-\bar{x})=x \qquad (۵.۲.۱')$$

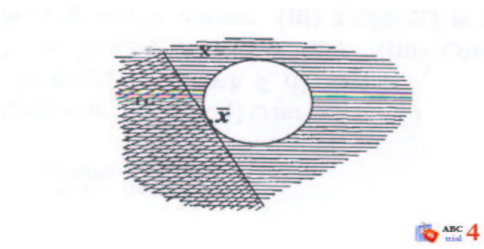


شکل ۱—۵:

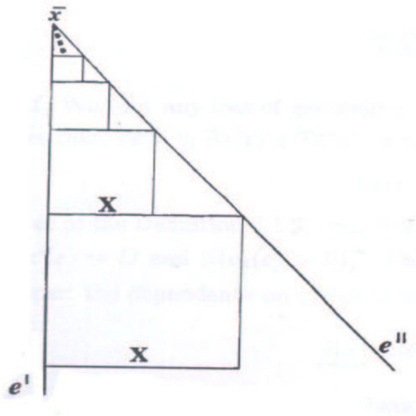
شکل ۱—٦:



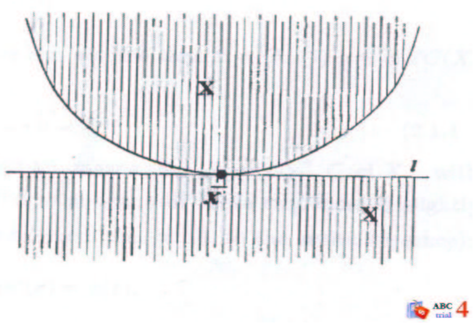
شکل ۱—۷:



شکل ۱—۸:



شکل ۱—۹:



شکل ۱—۱۰:

که نشان می‌دهد x نوعی مشتق تعمیم‌یافته است و $\frac{1}{\beta_i}(x^i - \bar{x})$ نوعی نسبت خارج قسمتی است. چنین تعبیری به مفهوم کلاسیک مشتق شبیه است.

قضیه ۱۶.۱ فرض کنیم $X \subset \mathbb{R}^n$ و $\bar{x} \in clX$ آن‌گاه:

(i) $TC(\bar{x}; X)$ بسته‌است.

(ii) اگر X محدب باشد، آن‌گاه $TC(\bar{x}; X)$ شامل clX است ومحدب‌است.

(iii) اگر $X_۱ \subseteq X_۲$ ، آن‌گاه $TC(\bar{x}; X_۱) \subseteq TC(\bar{x}; X_۲))$.

اثبات در مرجع ۴.

۱–۳ محمل خطی وجدایی پذیری

مفاهیمی که در این‌بخش بیان می‌شوند، در نظریهٔ اکسترمم‌های مقید و زمینه‌های وابسته به آن اساسی می‌باشند. فرض‌کنیم $a \in \mathbb{R}^n - \{۰\}$ و $b \in \mathbb{R}$ در ادامه ابر صفحهٔ $H^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n :< a, x >= b\}$ ونیم‌فضاهای وابسته به آن یعنی $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n :< a, x > \leq b\}, H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n :< a, x > \geq b\}$ را در نظرمی گیریم.

تعریف ۱۷.۱ ابرصفحهٔ $H^\circ \subset \mathbb{R}^n$ ابرصفحهٔ محمل‌کننده یا محمل $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نامیده‌می شوداگر وتنهااگر

$$H^\circ \cap clK \neq \emptyset \text{ و } (K \subseteq H^-) \text{ یا } K \subseteq H^+ \qquad (۱.۳.۱)$$

دراین‌صورت (H^-) یا H^+ نیم‌فضاهای محمل‌کنندهٔ K نامیده‌می شوند.

هر عضو $H^\circ \cap clK$، نقطهٔ تکیه‌گاه (محمل) نامیده‌می شود.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنیم $K \subset \mathbb{R}^n$ و $F \subseteq cl\ K$، F وجه K است اگروتنهااگر اشتراک clK با یک ابرصفحهٔ محمل‌کننده H° از K باشد.

شکل ۱–۱۱:

تعریف ۱۹.۱ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ داده‌شده‌است.مجموعهٔ

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n :< y, x >\leq 1, \forall x \in K\} \qquad (۲.۳.۱)$$

قطب K نامیده‌می‌شود. قرارمی‌دهیم $(\emptyset)^* = \mathbb{R}^n$.

تعریف قطب زیرمجموعه‌ای از یک فضای هیلبرت در بالا آورده‌شده‌است.برای فضاهای نرم‌دار و فضاهای برداری محدب تغییرات مناسبی لازم‌است. به‌دلیل این‌که K^* اشتراک نیم فضاهای بسته‌است وبه‌دلیل گزاره‌ای که بیان‌می‌کند اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های محدب، محدب است.K^* محدب وبسته است.علاوه‌براین K^* شامل مبدأ نیز می‌باشد. یک تفسیر مستقیم از $K^* - \{0\}$ مجموعهٔ گرادیان‌های y از نیم‌فضای ازنوع $< y, x > \leq 1$ که محمل K می‌باشد،است.

قطب زیرفضای S، مکمل متعامدش می‌باشد یعنی $S^* = S^{\perp}$. زیرا واضح است که $S^{\perp} \subseteq S^*$. اگرS زیرفضاباشد و α اسکالر و $x \in S$ و $y \in S^*$ باشد داریم $\alpha x \in S$ بنابراین $< y, \alpha x > \leq 1$ درنتیجه $< y, x > \leq \frac{1}{\alpha}$ و اگر $\alpha \longrightarrow +\infty$ به‌دست می آید: $< y, x > \leq 0$. در تعریف قطب به جای ≤ 1 می‌توانیم از ≥ -1 استفاده کنیم بنابراین داریم $< y, \alpha x > \geq -1$ ودرنتیجه $< y, x > \geq \frac{-1}{\alpha}$ و اگر $\alpha \longrightarrow +\infty$ به‌دست می آید: $< y, x > \geq 0$. ودرنتیجه $< y, x >= 0$ که این یعنی $y \in S^{\perp}$ است وبنابراین $S^* = S^{\perp}$.

در حالت خاص داریم: $(\mathbb{R}^n)^* = O$ و $O^* = \mathbb{R}^n$ البته واضح است که $K^* \neq \emptyset$ چون $O \in K^*$.

شکل‌های (۱ – ۱۱) ... (۱ – ۱۶)، مثال‌هایی از مجموعه های K وقطب های آن را نشان می‌دهد. در شکل‌های (۱ – ۱۱) و(۱ – ۱۲)، K می تواند به عنوان یک دایره یا به عنوان محیط با