بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی گرایش آنالیز

خواص شمول خانواده ی کلاسهای توابع تحلیلی وابسته به عملگرهای انتگرالی

استاد راهنما:

دکتر سعید شمس

نگارش:

راحله صمدلوئی

مرداد ۸۸

پایان نامه آقای/خانم راحله صمدلوئی به تاریخ ۸۸٫۵٫۷

شماره ــــ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸٫۲ هیجده ۲

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر سعید شمس

۲- استاد مشاور : دکتر ــــ

۳- داور خارجی : دکتر رسول آقالاری

۴- داور داخلی : دکتر علی عبادیان

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید استادباشی

۸۸٫۵٫۷

تقدیم به

همسر بی همتایم

سپاسگزاری

شکر و سپاس خداوندی را سزاست که به ما عقلی عطا فرمود تا بتوانیم بیندیشیم و یاد گیریم و در راستای پیشرفت و تکامل قدمی برداریم. پس از لطف و عنایت الهی از حمایت های بی دریغ همسر *مهربانم و مادر عزیزم و خواهران و برادرانم* کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

همچنین برخود لازم می دانم از هدایت های بی شائبه استاد راهنمای خود **جناب آقای دکتر سعید شمس** سپاسگزاری کنم که تلاش و همکاری ایشان همواره باعث دلگرمی و افزایش روحیه پژوهش برای من بوده است و بدون راهنمایی های ایشان، این پروژه هیچگاه به نتیجه لازم نمی رسید.

از خانواده همسرم که در انجام این پروژه مرا کمک کردند، تشکر می نمایم.

در نهایت از تمامی *دوستان* مخصوصاً عاطفه حاجی کریمی و همسرشان و پگاه افتقار و عفت صفائی و *اساتیدی* که در دانشکده علوم دانشگاه ارومیه مرا حمایت کردند، سپاسگزاری می نمایم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از مفاهیم عملگرهای انتگرالی چند زیرکلاس توابع تحلیلی در دیسک واحد باز U معرفی شده اند و بعضی از نتایج جالب شامل خواص شمول، قضیه‌های پوششی و شعاعی مورد مطالعه قرار گرفته اند.

پیشگفتار

پایان نامه حاضر بر اساس مقاله مرجع [۳] گردآوری شده است که مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد.

در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی که در بخشهای مختلف پایان نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، می پردازیم و سپس تابع فوق هندسی گاوس را معرفی می کنیم که در تعریف عملگر I_λ در فصل چهارم بکار گرفته خواهد شد.

فصل دوم به توابع تک ارز و زیر کلاسهای آن اختصاص یافته است که شامل دو بخش می باشد. در ابتدا توابع تک ارز معرفی شده و قضایای مربوط به این توابع بیان می گردد. در بخش اول توابع محدب، نزدیک به محدب و ستاره گون را تعریف نموده و به بیان قضایایی چند در این زمینه پرداخته می شود و در بخش دوم پیروی و پیروی دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول تعریف خواهد شد که نقش مهمی را در پایان نامه ایفا می کند و سپس با استفاده از پیروی زیر کلاسهای خاصی از توابع تک ارز تعریف می گردد و در نهایت برخی از روابط مربوط به این زیر کلاسها را بیان می کنیم.

فصل سوم که هدف اصلی این پایان نامه است شامل ۳ بخش می باشد.

در بخش اول ابتدا ضرب پیچشی (ضرب هادامارد) را معرفی می کنیم و سپس با استفاده از این ضرب چندین عملگر انتگرالی و خطی مانند $\mathcal{L}(a,c)f(z)$ ، $D^\lambda f(z)$ و $I_n f(z)$ را تعریف نموده و برخی از خواص آنها بیان می شود. در بخش دوم عملگر انتگرالی چو-سایگو-سریواستاوا $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}f(z)$ را تعریف و برخی از خواص آن را بررسی می کنیم. در بخش سوم توابع وابسته به کلاس $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}f(z)$ معرفی شده و قضایایی در رابطه با خواص شمول این توابع آورده شده است.

فصل چهارم شامل ۳ بخش می باشد که برگرفته از مرجع [۱۲] است. در بخش اول عملگر انتگرالی I_λ را با استفاده از تابع فوق هندسی گاوس معرفی می کنیم. در ادامه کلاس $P_k(\beta)$ را تعریف کرده و قضایایی را در این زمینه بیان و اثبات خواهیم کرد. در بخش دوم به معرفی چندین زیر کلاس وابسته به $P_k(\beta)$ پرداخته شده و چند

قضیه‌ی مربوط به این زیرکلاسها بیان و اثبات می شود. همچنین یک قضیه پوششی ارائه و چند کاربرد آن بررسی شده است و در بخش آخر قضایای مربوط به خواص شمول توابع وابسته به $P_k(\beta)$ مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است.

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی مفاهیم و قضایای مقدماتی را که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، ارائه می دهیم. همچنین تابع فوق هندسی گاوس را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۱ هر مجموعه‌ی باز و همبند ناتهی را در $\mathbb{C}$ یک ناحیه [۱] می نامیم.

از این به بعد، ناحیه را با Ω نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد. اگر $z_\circ \in \Omega$ و

$$\lim_{z \longrightarrow z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد، گوییم f در $z_\circ$ مشتق پذیر است و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ باشد. f را در Ω تحلیلی [۲] گوییم هرگاه f در هر نقطه از Ω مشتق پذیر باشد. همچنین f در نقطه‌ی $z_\circ \in \Omega$ تحلیلی است هرگاه f در یک همسایگی از $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

تذکر ۴.۱ رده‌ی تمام توابع تحلیلی در Ω را با $H(\Omega)$ نمایش می دهیم.

تبصره ۵.۱ مجموع و حاصلضرب توابع تحلیلی روی Ω تحلیلی اند، یعنی هرگاه $g, f \in H(\Omega)$ آنگاه $f + g \in H(\Omega)$ و $fg \in H(\Omega)$.

تعریف ۶.۱ مجموعه‌ی $U = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$ را دیسک واحد باز [۳] در صفحه مختلط گوییم.

تعریف ۷.۱ مجموعه ی تمام توابع بفرم $f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k$ که در دیسک واحد باز U تحلیلی اند و در شرایط نرمال شده [۴] $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ صدق می کنند را با $\mathcal{A}$ نمایش می دهیم.

---

[۱] Region

[۲] Analytic

[۳] Open unit disk

[۴] Nomalized

تعریف ۸.۱ تابع تحلیلی f را یک تابع شوارتز[۵] گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $f(0) = 0$.

(۲)به ازای هر $z \in U$، $|f(z)| < 1$.

تعریف ۹.۱ نگاشت $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ که هم اندازه‌ی زاویه و هم جهت را حفظ نماید، نگاشت همدیس [۶] می نامند.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنیم $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. هرگاه $f'(z_0)$ در نقطه‌ای مانند $z_0 \in \Omega$ موجود باشد و $f'(z_0) \neq 0$، در اینصورت f زوایا را در z_0 حفظ می کند.

برهان. به مرجع [۲۰] قضیه ۲.۱۴، مراجعه کنید.

تذکر ۱۱.۱ هیچ تابع تحلیلی زوایا را در نقطه ای که مشتقش صفر است حفظ نمی کند. از این رو توابع تحلیلی که مشتق مخالف صفر دارند تابع همدیس نام گرفته‌اند.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم a، b، c و d اعداد مختلطی باشند که $ad - bc \neq 0$ آنگاه نگاشت

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

را یک تبدیل موبیوس [۷] می نامیم.

تذکر ۱۳.۱ اگر $S(z)$ یک تبدیل موبیوس باشد، آنگاه نگاشت $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ در رابطه‌ی

$$S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z)) = z$$

صدق می کند، یعنی S^{-1} نگاشت وارون S است. اگر S و T دو تبدیل موبیوس باشند ، نتیجه می گیریم که SOT نیز این چنین است. بنابراین ، مجموعه‌ی نگاشتهای موبیوس تحت عمل ترکیب، یک گروه تشکیل می دهد.

[۵] Schwarz function

[۶] Conformal mapping

[۷] Mobius transformation

تبصره ۱۴.۱ هر تبدیل موبیوس با برهمنهش تبدیلات از نوع زیر به دست می آید: (البته بعضی از اینها ممکن است حضور نداشته باشند.)

الف) انتقال [۸]: $z \to z + a$;

ب) دوران [۹]: $|z| = ۱, z \to az$;

پ) تجانس [۱۰]: $a > ۰, z \to az$;

ت) انعکاس [۱۱]: $z \to \frac{۱}{z}$.

با فرض $c = ۰$، داریم $S(z) = (a/d)z + (b/d)$ و از این رو، اگر $S_۱(z) = (a/d)z$، $S_۲(z) = z + (b/d)$، آنگاه $S = S_۲ O S_۱$ و کار تمام است. حال فرض کنیم $c \neq ۰$ و قرار می دهیم $S_۱(z) = z + (d/c)$ ، $S_۲(z) = \frac{۱}{z}$، $S_۳(z) = \frac{(bc-ad)}{c^۲}z$ و $S_۴(z) = z + (a/c)$. در اینصورت $S = S_۴ O S_۳ O S_۲ O S_۱$.

تعریف ۱۵.۱ یک فضای توپولوژیک، جفت مرتبی مانند (X, τ) است که در آن X یک مجموعه و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X و دارای ویژگیهای زیر است:

(۱) $\emptyset \in \tau$ ، $X \in \tau$.

(۲) اگر $U_۱, ..., U_n$ متعلق به τ باشند، آنگاه $\bigcap_{j=۱}^{n} U_j \in \tau$.

(۳) اگر $\{U_i : i \in I\}$ گردایه‌ی دلخواهی از مجموعه های متعلق به τ باشد، آنگاه $\bigcup_{j \in I} U_j \in \tau$.

گردایه τ را یک توپولوژی روی X و هر عضو τ را یک مجموعه‌ی باز می نامیم.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{C}$ و E یک زیر مجموعه در X باشد. آنگاه پوسته‌ی محدب[۱۲] بسته‌ی E، کوچکترین مجموعه‌ی محدب و بسته‌ی شامل E است که آنرا با $\overline{CoE}$ نمایش می دهیم.

Translate[۸]

Rotation[۹]

Homogeneity[۱۰]

Inversion[۱۱]

Closed convex hull[۱۲]

تعریف ۱۷.۱ فرض کنیم $0 < \alpha < \infty$. در این صورت انتگرال

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

که یک انتگرال همگراست، تابع گاما[13] نامیده می شود.

تعریف ۱۸.۱ هرگاه $q > 0$ و $p > 0$ آنگاه انتگرال

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

را تابع بتا[14] می نامیم.

تعریف ۱۹.۱ فرض کنیم $a_j (j = 1, 2, ..., p)$ و $b_j (j = 1, 2, ..., q)$ اعداد مختلط یا حقیقی باشند و $b_j \neq 0, -1, -2, ...$. آنگاه تابع فوق هندسی تعمیم یافته ${}_pF_q(z)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$ {}_pF_q(z) \equiv {}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n ... (a_p)_n}{(b_1)_n ... (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (p \leq q+1) \qquad (1.1)$$

که نماد $(\lambda)_n$ نماد پوچهامر[15] (تغییر فاکتوریل) است و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \lambda \neq 0 \\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

سری (۱.۱) برای z هایی که $|z| < \infty$، بطور مطلق همگراست اگر $p < q+1$ و همچنین برای $z \in U$ بطور مطلق همگراست اگر $p = q+1$.

تعریف ۲۰.۱ به ازای $p = 2$ و $q = 1$ در تعریف (۱۹.۱) تابع فوق هندسی گاوس [16] به صورت زیر بدست می آید:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \qquad (c > a+b; c > b > 0). \qquad (1.2)$$

---

[13] Gamma function

[14] Beta function

[15] Pochhammer symbol

[16] Gaussian hypergeometric function

سری (۱.۲) به ازای $z \in U$ بطور مطلق همگراست لذا تابع فوق هندسی گاوس در U تابع تحلیلی است.

به آسانی می توان دید که اگر $c > b > 0$ و $|z| \leq 1$ آنگاه:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt. $$

با جایگذاری $z = 1$ در رابطه‌ی فوق داریم:

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt = \frac{B(b,c-a-b)}{B(b,c-b)}, $$

که در آن $b > 0, c > a+b$.

لم ۲۱.۱ برای اعداد حقیقی یا مختلط a,b,c که $c \neq 0,-1,-2,\dots$ داریم:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z). $$

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}{}_2F_1(a,c-b;c;\tfrac{z}{z-1}). $$

$$ {}_2F_1(1,1;a;z) = (\tfrac{1}{(1-z)^a})^{-1}. $$

$$ {}_2F_1(1,1;2;z) = -z^{-1}Ln(1-z). $$

۲ رده‌ی توابع تک ارز

در این فصل ابتدا توابع تک ارز را تعریف می کنیم و در ادامه توابع محدب، ستاره گون و نزدیک به محدب را که زیر کلاسهایی از توابع تک ارز هستند را معرفی می کنیم و در بخش دوم پیروی و پیروی دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول را تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۲ تابع $f(z)$ را روی ناحیه Ω تک ارز [۱۷] گوییم هرگاه برای هر $z_۱$ و $z_۲$ در Ω که $z_۱ \neq z_۲$، داشته باشیم : $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی $z_۰ \in \Omega$ موضعاً تک ارز [۱۸] گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ تک ارز باشد.

تذکر ۲.۲ توابع تک ارز از نظر تحلیلی مشتق مخالف صفر دارند و از نظر هندسی خمهای ساده را به خمهای ساده می نگارند.

بعنوان مثال $z^۲$ در هیچ همسایگی مبدا تک ارز نیست چون مشتق آن در مبدا صفر است.

تبصره ۳.۲ زیر کلاس A که شامل تمامی توابع تک ارز است بوسیله‌ی S نمایش داده می شود.

مثال ۴.۲ تابع کوبه [۱۹] $K(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \dots$ مشهورترین تابع تحلیلی در کلاس S است که U را به کل $\mathbb{C}$ به استثناء آن قسمت از محور حقیقی که از $-\frac{۱}{۴}$ تا $-\infty$ قرار دارد تصویر می کند.

تذکر ۵.۲ رده‌ی S تحت جمع یا ضرب بسته نیست لذا فضای برداری نمی باشد. یعنی لازم نیست که مجموع یا ضرب دو تابع در S، متعلق به S باشد.

در زیر چند خاصیت را که حافظ خانواده‌ی S هستند بیان می کنیم:

(۱) اگر $f \in S$ و $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$، آنگاه: $g \in S$.

---

[۱۷] Univalent

[۱۸] Locally Univalent

[۱۹] Koebe function

(۲) اگر $f \in \mathcal{S}$ و $f(z) \neq \omega$، آنگاه:

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} \in \mathcal{S}.$$

(۳) اگر $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = \sqrt{f(z^{۲})}$، آنگاه : $g \in \mathcal{S}$.

(۴) هرگاه $f \in \mathcal{S}$ و $|\alpha| = ۱$ و $g(z) = \overline{\alpha} f(\alpha z)$، آنگاه: $g \in \mathcal{S}$.

(۵) اگر $f \in \mathcal{S}$ و ψ تابعی تحلیلی و تک ارز روی برد f با $\psi(۰) = ۰$ و $\psi'(۰) = ۱$، آنگاه:

$$g(z) = (\psi o f)(z) \in \mathcal{S}.$$

قضیه ۶.۲ فرض کنیم $f \in \mathcal{S}$، تابعی مانند $g \in \mathcal{S}$ موجود است بطوری که

$$g^{۲}(z) = f(z^{۲})$$

برهان. به مرجع [۲۱] قضیه‌ی ۱۲.۱۴ مراجعه کنید.

قضیه ۷.۲ هرگاه $f \in \mathcal{S}$،

$$f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k$$

آنگاه $|a_۲| \leq ۲$.

برهان. به مرجع [۲۱] قضیه ۱۴.۱۴ مراجعه کنید.

قضیه ۸.۲ اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ به ازای هر $|z| < ۱$ و $f(z) \neq c$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۴}$.

برهان. چون $f(z) \in \mathcal{S}$ ، لذا می توانیم قرار دهیم $f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k$. چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + \dots$ متعلق به $\mathcal{S}$ هست. با به کار بردن قضیه‌ی ۷.۲ برای تابع $g(z)$، نتیجه می گیریم که $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$. پس

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$$

لذا

$$|\frac{۱}{c}| \leq |a_۲| + ۲.$$

حال با بکار بردن قضیه ۷.۲ برای تابع f ($|a_۲| \leq ۲$) داریم: $|\frac{۱}{c}| \geq ۴$ و این حکم را کامل می کند.

قضیه‌ی بالا به قضیه‌ی پوشش موسوم است. قضیه مبین آن است هر تابع واقع در S قرص $|z| < ۱$ را بر میدانی در صفحه‌ی w می نگارد که این میدان شامل قرص $|w| < \frac{۱}{۴}$ می باشد.

قضیه ۹.۲ (قضیه دگر شکلی [۲۰]) فرض کنیم $f \in S$، در این صورت

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳}, \qquad (|z| = r < ۱).$$

برای هر $z \in U$ و $z \neq ۰$، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دوران مناسبی از تابع کوبه باشد.

برهان. به مرجع [۵] قضیه ۲.۵ مراجعه کنید.

قضیه ۱۰.۲ (قضیه رشد [۲۱]) برای هر $f \in S$،

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲}, \qquad (|z| = r < ۱)$$

برای هر $z \in U$ و $z \neq ۰$، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دوران مناسبی از تابع کوبه باشد.

برهان. به مرجع [۵] قضیه ۲.٦ مراجعه کنید.

قضیه ۱۱.۲ برای هر $f \in S$،

$$\frac{۱-r}{۱+r} \leq \frac{zf'(z)}{f(z)} \leq \frac{۱+r}{۱-r}, \qquad (|z| = r < ۱).$$

برهان. به مرجع [۵] قضیه ۲.۷ مراجعه کنید.

[۲۰] Distoration theorem

[۲۱] Growth theorem

قضیه ۱۲.۲ (قضیه بایبرباخ [۲۲]) اگر $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$، آنگاه برای هر n،

$$|a_n| \leq n.$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دورانی از تابع کوبه باشد.

برهان. به مرجع [۲۱] قضیه ۱۴.۱۴ مراجعه کنید.

۱.۲ توابع محدب و نزدیک به محدب و ستاره گون

تعریف ۱۳.۲ دامنه D را نسبت به نقطه‌ی $z_۰ \in D$ ستاره گون [۲۳] گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه‌ی D را به $z_۰$ وصل می کند کاملاً در D قرار گیرد.

تعریف ۱۴.۲ تابع $f \in \mathcal{S}$ را ستاره گون (نسبت به مبدا) گوییم هرگاه قرص واحد باز U با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $z_۰ = ۰$ ستاره گون است.

این زیر رده از $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^*$ نمایش می دهیم.

لم ۱۵.۲ فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به $\mathcal{S}^*$ باشد. در این صورت به ازای هر n که $n = ۲, ۳, ...$،

$$|a_n| \leq n.$$

نامساوی اکید به ازای هر n برقرار است مگر آنکه f دورانی از تابع کوبه باشد.

برهان. به مرجع [۵] قضیه ۲.۱۴ مراجعه کنید.

قضیه ۱۶.۲ فرض کنیم $f \in \mathcal{S}$، آنگاه $f \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰, \qquad (z \in U).$$

[۲۲] Bieberbach theorem

[۲۳] Starlike

برهان. به مرجع [۲۱] قضیه ۲.۱۰ مراجعه کنید.

مثال ۱۷.۲ تابع کوبه ... + $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 +$ یک تابع ستاره گون است ؛ زیرا

$$Re\{z\frac{k'(z)}{k(z)}\} = Re\{\frac{1+z}{1-z}\}$$

از آنجاییکه تبدیل موبیوس $w = \frac{1+z}{1-z}$ قرص واحد را بر نیم صفحه‌ی سمت راست تصویر می کند لذا $Re\frac{1+z}{1-z} > 0$.

تعریف ۱۸.۲ فرض کنیم $f \in S$، گوییم تابع f ستاره گون از مرتبه α $(0 \leq \alpha < 1)$ است هرگاه

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \alpha, \qquad (z \in U).$$

مجموعه‌ی این توابع را با $S^*(\alpha)$ نمایش می دهیم.

تذکر ۱۹.۲ طبق تعریف داریم $S^* = S^*(0)$.

مثال ۲۰.۲ تابع $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}}$ ستاره گون از مرتبه α است ؛ زیرا

$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} = Re\{\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\} > \alpha$$

برای این منظور تبدیل موبیوس $w = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$z = \frac{w-1}{w+(1-2\alpha)}$$

از آنجاییکه $|z| < 1$ لذا:

$$|w-1| < |w+(1-2\alpha)|.$$

حال با فرض $w = u + iv$ داریم:

$$|(u-1)+iv|^2 < |u+(1-2\alpha)+iv|^2 \quad ,$$

$$(u-1)^2+v^2<[u+(1-2\alpha)]^2+v^2 \quad ,$$
$$u(1-\alpha)>\alpha(1-\alpha)$$

چون $0 \leq \alpha < 1$ پس $Rew = u > \alpha$.

تعریف ۲۱.۲ دامنه‌ی D را محدب[۲۴] گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه‌ی D را به هم وصل می کند دقیقاً داخل D قرار گیرد.

تعریف ۲۲.۲ تابع $f \in S$ را محدب گوییم اگر قرص واحد باز U با $f(z)$ بر یک دامنه‌ی محدب نگاشته شود.

این زیررده از S را با K نمایش می دهیم.

لم ۲۳.۲ فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به K باشد. در این صورت

$$|a_n| \leq 1, \qquad n=2,3,...$$

نامساوی اکید به ازای هر n برقرار است مگر آنکه f دورانی از تابع $l(z)=\frac{z}{1-z}$ باشد.

برهان. به مرجع [۵] ص. ۴۵ مراجعه کنید.

قضیه ۲۴.۲ فرض کنیم $f \in S$، در این صورت $f \in K$ اگر و تنها اگر

$$Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0, \qquad (z \in U).$$

برهان به مرجع [۵] قضیه‌ی ۲.۱۱ مراجعه کنید.

تعریف ۲۵.۲ گوییم تابع $f \in S$ محدب از مرتبه‌ی $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$ است هرگاه

$$Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>\alpha, \qquad (z \in U).$$

مجموعه‌ی این توابع را با $K(\alpha)$ نمایش می دهیم.

---
[۲۴] Convex