بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

# تأثیر نیروی آنتروپی و جفت‌شدگی گرانشی متغیر بر تکینگی‌های کیهانشناسی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

**مریم آقائی ابچویه**

استاد راهنما

**دکتر بهروز میرزا**

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک خانم مریم آقائی ابچویه

تحت عنوان

# تأثیر نیروی آنتروپی و جفت‌شدگی گرانشی متغیر بر تکینگی های کیهانشناسی

در تاریخ ۱۳۹۰/۱۱/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

| | |
|---|---|
| ۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتر بهروز میرزا |
| ۲ - استاد مشاور پایان‌نامه | دکتر احمد شیرزاد |
| ۳- استاد مدعو | دکتر علی مهدی‌فر |
| ۴ - استاد ممتحن داخلی | دکتر رضا خسروی |
| سرپرست تحصیلات تکمیلی | دکتر فرهاد شهبازی |

## سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر بهروز میرزا، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از جناب آقای دکتر احمد شیرزاد که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

همه ی آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

# فهرست مطالب

## چکیده

در این مطالعه بعد از معرفی نسبیت خاص و بحث کوتاهی در مورد نسبیت عام به بررسی فیزیکی آینده‌ی کیهان می‌پردازیم. با حل معادله‌ی اینشتین برای یک عالم تابع متریک فریمن- روبرتسون- واکر که تانسور انرژی تکانه‌ی شاره‌ی کامل برای آن نوشته می‌شود، نشان می‌دهیم معادلات فریدمن به دست می‌آید. نتایج این محاسبات در حالتی معتبرند که فقط نسبیت عام را برای توصیف گرانش در نظر گرفته باشیم. ولی عوامل فیزیکی دیگری هستند که اگر آنها را هم در نظر بگیریم، نتایج قدری متفاوت خواهد بود. آنچه در بررسی کیهان اهمیت دارد رفتار فشار، چگالی انرژی، عامل مقیاس و پارامتر هابل است. آنچه از معادلات فریدمن برای این پارامترها به دست می‌آید نشان می‌دهد که با توجه به انبساط شتاب‌دار عالم، ممکن است جهان با یک تکینگی خاتمه یابد. بعضی فیزیکدانان اثرات نابهنجاری همدیس و ویسکوزیته‌ی توده‌ای ماده را بررسی کرده‌اند. نتایج بررسی‌های آن‌ها نشان داده است ویسکوزیته‌ی توده‌ای ماده نوع تکینگی‌ها را تغییر نمی‌دهد، اما نابهنجاری همدیس تکینگی نوع دوم را به تکینگی نوع سوم تبدیل می‌کند. ما در اینجا تأثیر نیروی آنتروپی را بررسی می‌کنیم. نیروی آنتروپی باعث اضافه شدن دو جمله به معادلات فریدمن می‌شود که به دلیل اثرات سطحی ایجاد می‌شوند. اضافه شدن این جملات باعث تغییر رفتار فشار یا چگالی انرژی در تکینگی نوع دوم می‌شود. مقدار ثوابت موجود در روابط مشخص می‌کند که فشار محدود خواهد شد و تکینگی نوع دوم به تکینگی بسیار شبیه به تکینگی نوع چهارم تبدیل خواهد شد یا چگالی انرژی نامحدود می‌شود و شرایطی شبیه به تکینگی نوع سوم ایجاد می‌گردد. سپس تأثیر تغییر جفت شدگی گرانشی در طول زمان را بر تکینگی‌ها محاسبه کرده‌ایم. در این حالت ضریب جفت شدگی گرانشی را تابعی از چگالی انرژی در نظر می‌گیرند. تأثیر این عامل باز هم بر تکینگی نوع دوم است، به طوری‌که با کاهش جفت شدگی گرانش تکینگی نوع دوم به حالتی بسیار شبیه به نوع چهارم تبدیل خواهد شد و در بقیه‌ی انواع تکینگی‌ها تغییر ضریب جفت شدگی فقط بر زمان تحول عالم مؤثر خواهد بود. در مرحله‌ی بعدی تأثیر همزمان این دو عامل را در نظر گرفتیم. در این صورت تکینگی نوع اول ظاهراً تغییری نمی‌کند و تکینگی نوع دوم هم به حالتی بسیار شبیه به تکینگی نوع سوم تبدیل می‌شود. در نهایت پارامتر هابل مؤثر را تعریف کرده‌ایم. با تعریف پارامتر هابل مؤثر و استفاده از آن در محاسبات مشاهده می‌شود تکینگی نوع اول که با در نظر گرفتن تأثیر همزمان نیروی آنتروپی و ضریب جفت شدگی گرانشی ظاهراً تغییر نکرده بود در، به تکینگی نوع سوم و تکینگی نوع دوم هم به تکینگی نوع سوم تبدیل شده اند.

**کلمات کلیدی:**

*کیهان‌شناسی، تکینگی، نیروی آنتروپی، ضریب جفت شدگی گرانشی متغیر.*

# فصل ۱

## مقدمه

زمانی علم فیزیک قادر بود بیشتر نتایج آزمایشات انجام شده به جز چند آزمایش محدود را پاسخ گو باشد. ولی تلاش برای توضیح همان چند پدیده باعث یک دگرگونی عظیم در علم فیزیک شد. تابش جسم سیاه، اثر فوتوالکتریک و مثال‌هایی از این قبیل پایه و اساسی شد برای معرفی مکانیک کوانتومی که قادر بود در ابعاد خیلی کوچک پدیده‌ها را توضیح دهد و در عین حال در حد کلاسیک با مشاهدات روزمره سازگار بود. ثابت بودن سرعت نور برای ناظرهای مختلف هم منجر به معرفی نسبیت خاص و پس از آن نسبیت عام شد که در ابعاد خیلی بزرگ مورد استفاده است. حضور این شاخه‌های جدید در فیزیک مسائلی را مطرح کرد که تا قبل از آن امکان پاسخگویی به آن‌ها قابل تصور نبود. معرفی نسبیت عام ( که به موجب آن فضا-زمان می‌تواند خمیده باشد و خمیدگی فضا-زمان ناشی از اثر گرانش است) باعث شد دیدگاه نظری ما در ابعاد کیهانی گسترش یابد. یکی از مواردی که در این زمینه بسیار مورد توجه است، ابتدا و انتهای زمانی عالم است. تابش زمینه‌ی کیهانی یکی از منابعی است که اطلاعاتی در مورد چگونگی ابتدای عالم و نظریات تورمی به فیزیکدانان می‌دهد. برای بررسی آینده‌ی عالم داشتن اطلاعاتی در مورد ابتدای آن لازم است آنچه در باره‌ی انفجار بزرگ و لحظات بعد از آن می‌دانیم بسیار مفیدند و به درک ما از آینده‌ی عالم کمک می‌کنند. یکی از موضوعاتی که امروزه بسیار مورد مطالعه قرار دارد امکان وجود یک تکینگی در پایان عمر عالم است.

تکینگی‌ها شرایط و انواع گوناگونی دارند که رخ دادن هر یک را می‌توان بررسی کرد. اما این امکان هم وجود دارد که عوامل فیزیکی وجود داشته باشند که تا کنون در نظر گرفته نشده‌اند، و با در نظر گرفتن آن‌ها تکینگی‌ها ازبین بروند یا حداقل ضعیف‌تر شوند. در این پایان‌نامه به مطالب زیر می‌پردازیم.

در فصل دوم به طور مختصر نسبیت خاص و عام را معرفی می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن متریک فریدمن- روبرتسون- واکر به عنوان توصیف کننده‌ی خمش عالم معادلات حرکت در عالم را معرفی نموده و مدل‌های مختلف کیهانشناسی را بررسی می‌کنیم. در انتها بحث کوتاهی هم پیرامون افق‌ها خواهیم داشت.

در فصل سوم به معرفی انواع مختلف تکینگی‌ها می‌پردازیم و شرایط مختلف پارامتر هابل، عامل مقیاس، فشار و چگالی انرژی را برای هر یک بیان خواهیم کرد. در آخرین بخش این فصل مطالبی در مورد میزان شدت هر تکینگی بیان خواهد گردید.

در فصل چهارم به عنوان نمونه به بررسی نابهنجاری همدیس بر تکینگی نوع دوم می‌پردازیم و مشاهده می‌کنیم که این عامل باعث می‌شود تا تکینگی نوع دوم به نوع اول یا سوم تبدیل شود.

در فصل پنجم نشان می‌دهیم که استفاده از اصل هولوگرافی به اضافه شدن یک جمله‌ی سطحی به کنش اینشتین می‌انجامد و شتابی را ایجاد می‌کند که مربوط به نیروی آنتروپی است. این نیروی آنتروپی باعث می‌شود جملات تصحیحی به معادلات فریدمن اضافه شود که باعث تغییر نوع تکینگی‌ها می‌شود.

در فصل ششم عامل دیگری را بررسی می‌کنیم. در این فصل فرض می‌کنیم ثابت گرانش نیوتن $G$، ثابت نباشد بلکه وابسته به یک مقیاس انرژی باشد. با این فرض معادلات فریدمن تغییر می‌کنند. با بررسی توابع عامل مقیاس فصل سوم در این شرایط جدید نتایج متفاوتی به دست می‌آید. در بخش‌های بعدی ابتدا اثر نیروی آنتروپی و جفت‌شدگی گرانشی متغیر را توأماً بررسی می‌کنیم و سپس در همین حالت یک پارامتر هابل مؤثر معرفی می‌نماییم که با آن می‌توان دوگان معادلات قبلی را فرمول‌بندی کرد.

# فصل ۲

# مدل‌های کیهان‌شناسی

## ۱.۲ مقدمه

معرفی نسبیت خاص و بعد از آن نسبیت عام اینشتین تحولی در علم فیزیک و بخصوص کیهان‌شناسی ایجاد کرد. کیهان‌شناسی جدید با کمک نسبیت عام اینشتین فرمول‌بندی شده است. با حل معادله‌ی اینشتین ($T_{\mu\nu} = 8\pi G_{\mu\nu}$) می‌توان معادلاتی را برای تحول عالم به دست آورد. برای حل معادله‌ی اینشتین ابتدا باید متریک فضا زمان را معرفی نمود، سپس با تانسور خمش به دست آمده از آن مولفه‌های ($G_{\mu\nu}$) را به دست آورد. نتیجه‌ی این محاسبات تانسور انرژی- تکانه ($T_{\mu\nu}$) است، که مولفه‌های آن شامل چگالی انرژی و فشار است. رفتار چگالی انرژی و فشار کیهان در زمان‌های مختلف، در واقع شرایط فیزیکی عالم را بیان می‌کند. پس با بررسی رفتار فشار و چگالی انرژی ممکن است بتوان رفتارهای آینده‌ی عالم را توصیف کرد.

### ۱.۱.۲ نسبیت

فضا و زمان جزو کمیت‌های اساسی در فیزیک هستند، که می توانند به طور نسبی یا مطلق تعریف شوند [۱]. متناسب با مطلق یا نسبی تعریف کردن مکان و زمان معادلات مربوط به مکانیک نیوتونی، نسبیت خاص و یا نسبیت عام به دست می آید. اطلاعات مربوط به این سه دسته را می‌توان به شکلی که در جدول (۱.۱.۲)

| نظریه | مکان | سرعت | زمان | شتاب‌دار بودن یا نبودن حرکت |
|---|---|---|---|---|
| نیوتونی | نسبی | نسبی | مطلق | مطلق |
| نسبیت خاص | نسبی | نسبی | نسبی | مطلق |
| نسبیت عام | نسبی | نسبی | نسبی | نسبی |

خلاصه کرد [۲].

## نسبیت خاص

در مکانیک نیوتونی زمان از سه مؤلفه‌ی مکانی هندسه‌ی اقلیدسی کاملاً جدا قرار می‌گیرد. در این حالت مکان یک متحرک به صورت نسبی در مقایسه با سایر اجسام اندازه‌گیری می‌شود، اما زمان برای همه‌ی اجسام کاملاً مطلق است، یعنی مستقل از دستگاه مختصات اندازه‌گیری می‌شود. ولی در نسبیت خاص این تعریف از زمان وجود ندارد، بلکه در این حالت زمان هم مانند یکی از مختصات مکانی در نظر گرفته می‌شود. پس به جای $(t, x, y, z)$ مختصات به صورت $x^a = (x^۰, x^۱, x^۲, x^۳) = (t, x, y, z)$ است. فاصله‌ی بین دو نقطه در این مختصات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^۲ = dt^۲ - dx^۲ - dy^۲ - dz^۲. \qquad (۱.۲)$$

با این تعریف متریک فضا-زمان تخت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta_{ab} \equiv diag(۱, -۱, -۱, -۱), \qquad (۲.۲)$$

و متریک مینکوفسکی نامیده می‌شود. اساس نسبیت خاص در تبدیلات لورنتس است و $ds^۲$ به صورتی تعریف شده است که تحت تبدیلات لورنتس ناوردا بماند.

تبدیلات لورنتس باعث ایجاد انقباض در طول و اتساع در زمان می‌شود. اما نکته این است که در نسبیت خاص فقط با دستگاه‌های لخت مواجهیم که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند. اصول موضوعه‌ی نسبیت خاص به صورت زیر بیان شده‌اند [۱]:

۱. قوانین فیزیک در تمام دستگاه‌های لخت یکسان هستند. هیچ دستگاه لخت مرجحی وجود ندارد.

۲. در فضای تهی مقدار سرعت نور در تمام دستگاه‌های لخت یکسان و برابر $c$ است.

برای چنین سیستمی می‌توان چاربردار نیرو و چاربردار تکانه تعریف کرد و انرژی جنبشی را به دست آورد. اما همچنان محدودیت ثابت بودن سرعت‌ها و تخت بودن فضا-زمان وجود دارد.

### نسبیت عام

در فضا-زمان تخت تمام مخروط‌های نوری می‌توانند با هم موازی باشند، چون پرتوهای نوری که در ابتدا با هم موازی بوده‌اند می‌توانند تا ابد موازی بمانند. اما در فضا-زمان‌های خمیده اینطور نیست. طبق نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین میدان‌های گرانشی با خمیدگی فضا-زمان داده می‌شوند. میدان‌های گرانشی اشیاء پر جرم علاوه بر مسیر اشیای دیگر مسیر نور را هم خمیده می‌کند. تجربه‌ی یک فضای خمیده را زمانی می‌بینیم که بخواهیم یک پوسته‌ی کروی یا یک رویه‌ی زین‌اسبی را روی یک صفحه‌ی تخت پهن کنیم [۳]. کره چون انحنای مثبت دارد در تصویر آن روی صفحه گاف‌هایی وجود دارد، اما در زین‌اسبی چون انحنای منفی دارد در تصویر آن روی صفحه همپوشانی وجود خواهد داشت. از طرفی هندسه‌ی فضاهای خمیده هم با فضای تخت تفاوت دارند. مثلاً در کره که می‌توان آن را مدل ایده‌آلی از زمین دانست، دایره‌های عظیمه‌ای وجود دارند که محل برخورد رویه با صفحاتی هستند که از مرکز کره می‌گذرند. روی این رویه دایره‌های عظیمه مشابه خط راست هستند چون:

۱. روی سطح کره این دایره‌های عظیمه خم‌های کوتاهترین فاصله بین هر دو نقطه هستند.

۲. دایره‌های عظیمه خم‌هایی هستند که اگر کسی از یک نقطه روی کره در جهت معینی شروع به حرکت کند و بدون انحراف به حرکت ادامه دهد به دست می‌آیند.

در هر فضایی به خم‌هایی که این دو خاصیت را دارند *ژئودزیک* می‌گوییم. دیده می‌شود که در این فضاها مفهوم متعارف توازی از بین می‌رود. اگر باز به کره نگاه کنیم دو دایره‌ی عظیمه که در ابتدا عمود بر استوا هستند در قطب به هم می‌رسند. تصور یک فضا-زمان (چهار بعدی) خمیده مشکل‌تر است، اما می‌توان در چهاربعد هم ژئودزیک‌ها را به همین ترتیب تعریف کرد و اثرات مشابه با سه بعد دیده می‌شود. در نسبیت عام فرض می‌شود که *قوانین فیزیک از نظر تمام ناظرها، بدون توجه به چگونگی حرکت آنها یکسان است.* این فرض به کمک اصل هم‌ارزی نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین را معرفی می‌کند.

### اصل هم ارزی

جرم لختی یک شیء از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$F = m_I a \tag{۳.۲}$$

که نیروی وارد بر جسم را با شتاب حاصل از آن مربوط می‌کند. از طرف دیگر جرم گرانشی $m_G$ در معادله‌ی گرانشی نیوتون صدق می‌کند:

$$F = \frac{Gm_G M}{r^۲} \qquad (۴.۲)$$

ویژگی اساسی گرانش این است که جرم گرانشی و جرم لختی هر شیء یکسان است. بنابراین می‌توان اصل هم‌ارزی را به صورت زیر بیان کرد [۳]:

*هیچ راهی برای تشخیص اثرهای ناشی از یک میدان گرانشی*
*یکنواخت و یک شتاب ثابت بر روی یک ناظر وجود ندارد.*

با این اصل می‌توان فضا-زمان‌های خمیده‌ی فیزیکی را بررسی کرد. این گونه فضا-زمان‌ها متریکی متفاوت از متریک مینکوفسکی دارند که بعضی از آن‌ها بر حسب مورد معرفی می‌شوند.

### ۲.۱.۲ معادله اینشتین و تانسور انرژی- تکانه

در گرانش نیوتونی چگونگی تأثیر نیروی گرانش بر ماده‌ای با چگالی $(\rho)$ با معادله‌ی پواسون داده می‌شود:

$$\nabla^۲ \phi = ۴\pi G\rho. \qquad (۵.۲)$$

در سمت راست این رابطه چگالی جرم در ناحیه‌ی مورد نظر و در سمت چپ مشتق دوم پتانسیل گرانشی وجود دارد. در این قسمت به تعمیم رابطه‌ی (۵.۲) در نسبیت عام می‌پردازیم . این رابطه در نسبیت به طور کلی همین شکل را خواهد داشت. از نسبیت خاص می‌دانیم که جرم و انرژی با هم هم ارزند. پس باید این ایده را در نظریه‌ی جدید وارد کرد و در نظر بگیریم که همه‌ی شکل‌های جرم-انرژی می‌تواند چشمه‌ی میدان گرانشی باشد. این کار را با توصیف تانسور انرژی-تکانه $T_{ab}$ که کلی‌تر از چگالی انرژی است، می‌توان انجام داد. $T_{ab}$ می‌تواند جایگزین سمت راست معادله‌ی (۵.۲) باشد. از طرف دیگر سمت چپ این معادله شامل مشتق دوم پتانسیل است. در نسبیت متریک نقش پتانسیل گرانشی را دارد و نماد کریستوفل و تانسور خمش ریمان با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{۱}{۲} g^{ad} \left( \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} \right), \qquad (۶.۲)$$

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}. \tag{۷.۲}$$

تانسور خمش مشتق دوم متریک را در خود دارد. بنابراین اگر بخواهیم متریک را به عنوان پتانسیل گرانشی در نظر بگیریم باید در سمت چپ رابطه‌ی تعمیم یافته‌ی $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ رد تانسور خمش را داشته باشیم، چون در معادله‌ی (۵.۲) رد رابطه‌ی $\nabla_i\nabla_j\phi$ وجود دارد. رد تانسور خمش تانسور ریچی [1] را به دست می‌دهد. بنابراین رابطه (۵.۲) به شکل $R_{ab} \propto T_{ab}$ در می آید. در این رابطه این نکته اهمیت دارد که تانسور انرژی-تکانه از اصل پایستگی انرژی پیروی می‌کند یعنی:

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \tag{۸.۲}$$

بنابراین در سمت چپ نمی‌توان تنها $R_{ab}$ را داشت، چون $\nabla_b R_{ab} \neq 0$. در اتحاد بیانچی [2] می‌بینیم که:

$$\nabla_b R^{ab} = \frac{1}{2} g^{ab}\nabla_a R, \tag{۹.۲}$$

که $R$ اسکالر ریچی [3] ست. بنابراین اگر در سمت چپ از تانسور اینشتین استفاده شود که به صورت زیر است، پایستگی انرژی برقرار می‌ماند.

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \tag{۱۰.۲}$$

در نتیجه معادله‌ی اینشتین به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}. \tag{۱۱.۲}$$

[1] Ricci tensor

[2] Bianchi identity

[3] Ricci scalar

اگر چگالی انرژی خلأ در جهان را در نظر بگیریم ثابت کیهان‌شناسی، $\Lambda$ در معادله اینشتین وارد می‌شود:

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = 8\pi G T_{ab}. \tag{۱۲.۲}$$

در تانسور انرژی-تکانه درایه‌ها معانی مشخصی دارند. به طور مشخص $T_{ab}$ شار مؤلفه‌ی $a$ام تکانه است که از سطحی می‌گذرد که با $x^b$ ثابت تعریف شده است. بنابراین:
اولین مؤلفه $T^{tt}$ معرف چگالی انرژی است. چون اگر چاربردار تکانه را به صورت $p^\mu = (E, \overrightarrow{p})$ داشته باشیم با تعریف بالا از تانسور انرژی-تکانه، $T^{tt}$ نمایانگر $p^0$ یا به عبارتی انرژی است که از سطحی در زمان ثابت می‌گذرد. این همان چگالی انرژی است، اما در نسبیت جرم و انرژی هم‌ارزند پس می‌توان چگالی جرم-انرژی را با $\rho$ نمایش داد.
چگالی تکانه یعنی *تکانه در حجم واحد* . مؤلفه‌های بعدی تانسور انرژی تکانه که $T^{it}$ ها هستند چگالی تکانه $(\pi)$ را نشان می‌دهند. پس:

$$\pi^i = T^{it}. \tag{۱۳.۲}$$

به بیان دیگر $T^{it}$ تکانه‌ای است که از سطحی در زمان ثابت می‌گذرد. از طرفی چون تانسور انرژی-تکانه متقارن است $T^{it}$ برابر $T^{ti}$ است و شار انرژی را نمایش می‌هد که از سطح $x^i$ ثابت می‌گذرد.
آخرین قسمت تانسور انرژی تکانه بخش فضایی آن است. مؤلفه‌های این بخش شار نیروی عبوری از واحد سطح را نشان می‌دهند که همان تنش[۱] است. به عنوان مثال $T^{ij}$ مولفه‌ی $i$ ام نیرو در واحد سطح است (همان تنش)که از سطحی با بردار نرمال $e_j$ می‌گذرد [۴]. اگر بخواهیم تانسور انرژی-تکانه را برای شاره‌ی کامل بنویسیم باید مؤلفه‌های آن را از رابطه‌ی زیر به دست آوریم [۲]:

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b - p g_{ab}, \tag{۱۴.۲}$$

که در آن $u_a$ و $u_b$ سرعت‌هایی هستند که در دستگاه همراه اندازه‌گیری می‌شوند.

[۱] Stress

### معادلات فریدمن

اگر عالم را با یک شاره‌ی ایده‌آل فرمول بندی کنیم، ذرات این شاره کهکشان‌ها و خوشه‌ها هستند. به این شاره چگالی میانگین $\rho$ و فشار $P$ نسبت می‌دهیم. شاره‌ی ایده‌آل شاره‌ای است که رسانش گرمایی و اصطکاک بین مولکولی[۱] ندارد. متریک عالم را متریک فریدمن-روبرتسون-واکر[۲] در نظر می‌گیریم:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1-kr^2}dr^2 - a^2(t)r^2d\theta^2 - a^2(t)r^2\sin^2\theta d\phi^2, \qquad (2.15)$$

که در آن $a(t)$ معیاری از اندازه‌ی شعاعی عالم است و آن را عامل مقیاس می‌گویند و $k$ نشان دهنده‌ی خمش فضا است.

باید به این نکته توجه کرد که در یک فضای سه بعدی که دارای خمش $K$ باشد ($K$ می‌تواند مثبت منفی یا صفر باشد) المان طول به صورت زیر به دست می‌آید [۲]:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2), \qquad (2.16)$$

بنابراین در فضا-زمان چهار بعدی داریم:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\phi^2)\Big). \qquad (2.17)$$

حال اگر در نظر بگیریم:

$$r = \frac{\overline{r}}{1+\frac{1}{4}K\overline{r}^2}, \qquad (2.18)$$

در این صورت معادله‌ی (۲.۱۷) به شکل زیر باز نویسی می‌شود:

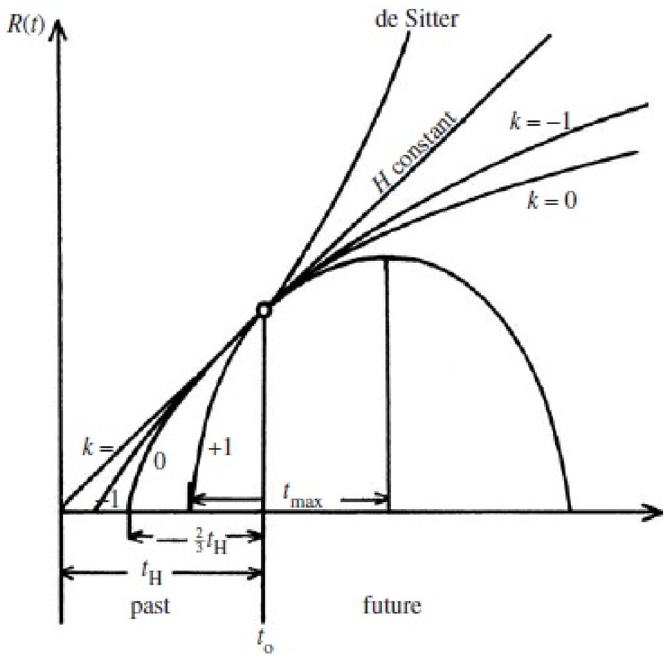
$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\frac{d\overline{r}^2 + \overline{r}^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)}{(1+\frac{1}{4}K\overline{r}^2)^2}. \qquad (2.19)$$

می‌خواهیم بزرگی $K$ در مختصه‌ی شعاعی و عامل مقیاس جذب شود، پس $k$ را به صورت $k = \frac{K}{|K|}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $k$ می‌تواند ۱+، ۱− یا صفر باشد. $k = -1$ نشان دهنده‌ی خمش منفی در فضا است و

---

[۱] Viscosity

[۲] Friedmann-Robertson-Walker




شکل ۱.۲: چگونگی تأثیر مقدار $k$ بر خمش فضا [۲]

عالمی با $k$ منفی عالم باز نامیده می‌شود. $k = ۰$ نشان دهنده‌ی عالمی است که فضای تخت دارد و نهایتاً $k = ۱$ عالمی را نشان می‌دهد که خمش مثبت دارد یا به عبارت دیگر بسته است. مثلاً یک کره دارای خمش مثبت است. با این تعریف برای $k$ باید تغییراتی هم در تعریف مختصه‌ی شعاعی و عامل مقیاس بدهیم:

$$r* = |K|^{\frac{۱}{۲}} r \tag{۲۰.۲}$$

$$a(t) = \frac{R(t)}{|K|^{\frac{۱}{۲}}}, \qquad K \neq ۰ \tag{۲۱.۲}$$

$$a(t) = R(t), \qquad K = ۰ \tag{۲۲.۲}$$

و بنابراین از رابطه‌ی (۱۷.۲):

$$ds^۲ = dt^۲ - a^۲(t)\Big(\frac{dr^۲}{۱ - kr^۲} + r^۲(d\theta^۲ + sin^۲\theta d\phi^۲)\Big). \tag{۲۳.۲}$$

که همان متریک فریدمن- روبرتسون- واکر است.

برای حل معادلات اینشتین باید مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان ($R_{ab}$) را محاسبه نمود. از رابطه‌ای که

برای خمش ($R^a_{bcd}$) معرفی شد:

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{r\theta r} &= \frac{\dot{a}^{2}+k}{a^{2}} \\ R^{r}_{\theta r\theta} &= \frac{\dot{a}^{2}+k}{a^{2}} \\ R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \frac{\dot{a}^{2}+k}{a^{2}} \\ R^{\phi}_{rr\phi} &= -\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}} \\ R^{t}_{\theta t\theta} = R^{t}_{\phi t\phi} = R^{t}_{rtr} &= \frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

از آنجا که :

$$R_{ab} = R^{c}_{acb} \tag{۲۵.۲}$$

و $c$ اندیس تکراری است که روی آن جمع بسته می‌شود. اسکالر ریچی نیز از رابطه‌ی $R = g^{ab}R_{ab}$ به دست می‌آید. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۰.۲) و حل معادله‌ی اینشتین با کمک روابط مربوط به خمش به معادلات زیر می‌رسیم [۵، ۶]:

$$\frac{3}{a^{2}}(k+\dot{a}^{2}) - \Lambda = 8\pi G\rho, \tag{۲۶.۲}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^{2}}(k+\dot{a}^{2}) - \Lambda = -8\pi Gp, \tag{۲۷.۲}$$

که در آنها $k$ همان معرف باز، بسته یا تخت بودن فضا است. از این دو معادله می‌توان به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{۲۸.۲}$$

دو معادله‌ی اول را معادلات فریدمن[۱] و معادله‌ی سوم را معادله‌ی پیوستگی نامیده‌اند.

[۱] Fridmann Equations