



دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

حاصل ضرب‌های تانسوری و حفظ حدها برای
سیستم‌ها روی تکوارها

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

لیلا کاروند

بهمن ۱۳۹۰

تقديم به ساحت مقدس صاحب الزمان (عج):

و تقديم به:

پدرم

مادرم

و همسرم

سپاسگزاری:

حمد و سپاس سزاوار پروردگاری است عزوجل که زبان از مدح و حمد ایشان عاجز است. پروردگاری که توفیق نوشیدن جرعه‌ای از دریای علم را نصیب این حقیر سعید نمود. و سلام و صلوات بر صفی‌عالمین محمد مصطفی (ص) و سلام بر علی دروازه شهر علم.

و سپاس از تمامی آموزگاران دوران تحصیلم از ابتدا تا به حال که همواره مستفیض از محضر ایشان بودم.

تقدیر و تشکر از آقای دکتر گلچین که راهنمایی این پروژه بر عهده ایشان بود.

و سپاس ویژه از اساتید دانشگاه سیستان و بلوچستان که شاگردی از محضرشان همواره باعث افتخار بنده بود.

از عزیزانم بابا درویش ، مادر، محسن، امید، فاطمه و زهرا صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که همواره باعث دلگرمی و امید من بوده‌اند و موفقیت روز افزون آنان را از خداوند منان خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی این موضوعات می‌پردازیم که تابعگون چه زمانی تمام حدها، حاصل ضرب‌ها و تمام حاصل ضرب‌های متناهی را حفظ می‌کند. این خواص را به ترتیب ابرهمواری، حاصل ضرب همواری و به طور متناهی حاصل ضرب همواری سیستم‌ها معرفی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

۱	مقدمات و پیش‌نیازها	۱
۲	۱-۱ نیم‌گروه‌ها و تکاورها	۲
۴	۲-۱ هم‌نهشتی‌ها و نیم‌گروه‌های خارج قسمتی	۴
۶	۳-۱ مجموعه‌های مرتب جزئی	۶
۸	۴-۱ رشته	۸
۱۶	۵-۱ سیستم‌ها	۱۶

۲۵	۶-۱ حاصل ضرب تانسوری سیستم‌ها	
۲۷	۷-۱ همواری سیستم‌ها	
۳۳	سیستم‌های حاصل ضرب هموار	۲
۳۴	۱-۲ حد و منبع	
۴۴	۲-۲ پوشا و یک به یک بودن نگاشت کانونی φ	
۴۵	۳-۲ ارتباط سیستم‌های حاصل ضرب هموار با سیستم‌های دیگر	
۵۸	سیستم‌های ابرهموار	۳
۵۹	۱-۳ سیستم‌های ابرهموار و قضایای مرتبط با آن‌ها	
۶۹	۲-۳ نتیجه‌گیری و پیشنهاد	
۷۰	مراجع	A
۷۲	واژه‌نامه	B

پیشگفتار

حدود سه دهه قبل، تحقیقاتی در این زمینه که برای تکواریه S و سیستم راست A_S ، تابعگون $A_S \otimes$ (از رسته سیستم‌های چپ به رسته مجموعه‌ها) حافظ عقب برها، برابرسازها و انواع متفاوتی از تکریمتی‌ها باشد مورد توجه قرار گرفت. آنچه نظر محققین را به خود جلب نمود سیستم‌های هموار و به طور ضعیف هموار بودند. گرچه استنستروم^۱ در [۷] این موضوع را که تابعگون $A_S \otimes$ حدهای دلخواه یا حدهای متناهی را حفظ کند مورد مطالعه قرار داد، اما در این زمینه نظریاتی منتشر نکرد. همچنین در آن زمان به بسیاری از سوالات مربوط به هنگامی که تابعگون $A_S \otimes$ حاصل ضرب‌های دلخواه یا حاصل ضرب‌های متناهی را حفظ کند پاسخی داده نشد. در این پایان نامه به بررسی چنین موضوعاتی خواهیم پرداخت.

پایان نامه حاضر شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده‌ایم. در فصل دوم ارتباط سیستم حاصل ضرب هموار با سایر سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم به معرفی سیستم ابرهموار و قضایای مرتبط با آن می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

تعریف ۴.۱.۱. عضو $s \in S$ را حذف پذیر راست می نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in S$ از $xs = ys$ بتوان نتیجه گرفت $x = y$.

به طور مشابه عضو حذف پذیر چپ نیز تعریف می شود.

تعریف ۵.۱.۱. عضو e از نیم گروه S را خود توان می نامیم، هرگاه $e^2 = e$.

مجموعه تمام عناصر خود توان S با نماد $E(S)$ نشان داده می شود. اگر $E(S) = S$ ، آنگاه S را نیم گروه خود توان یا یک باند می نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. گروه عبارتست از یک تکواره مانند S که به ازای هر $s \in S$ عنصر

$$\text{منحصر به فرد } s^{-1} \text{ در } S \text{ موجود باشد به قسمی که، } s^{-1}s = ss^{-1} = 1.$$

تعریف ۷.۱.۱. عضو s از نیم گروه S را نامتناوب گوئیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود

$$\text{داشته باشد به قسمی که } s^n = s^{n+1}.$$

نیم گروه S را نامتناوب گوئیم، هرگاه تمام عناصر آن نامتناوب باشند.

تعریف ۸.۱.۱. تکواره S را تاشونده راست (چپ) گوئیم، هرگاه به ازای هر $s, s' \in S$

$$u \in S \text{ وجود داشته باشد به قسمی که } (us = us')su = s'u.$$

تعریف ۹.۱.۱. تکواره S را برگشت پذیر راست گوئیم، هرگاه داشته باشیم

$$(\forall s, t \in S) (\exists u, v \in S), us = vt \quad (\forall s, t \in S, Ss \cap St \neq \emptyset).$$

به طور مشابه می توان برگشت پذیری چپ را تعریف نمود. تکواره های جابجایی، به وضوح تواماً برگشت پذیر راست و چپ می باشند.

۲-۱ همنهشتی ها و نیم گروه های خارج قسمتی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S یک نیم گروه باشد. هر زیر مجموعه ρ از حاصل ضرب دکارتی $S \times S$ ، یک رابطه دوتایی بر روی S نامیده می شود.

مجموعه تمام روابط دوتایی روی S با $B(S)$ نشان داده می شود. رابطه $\rho \in B(S)$:

(۱) بازتابی نامیده می شود، اگر به ازای هر $x \in S$ $x\rho x$.

(۲) تقارنی گفته می شود، اگر $x\rho y$ نتیجه دهد $y\rho x$.

(۳) تعدی است، اگر $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد $x\rho z$.

رابطه ای که دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، رابطه هم ارزی نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم ارزی روی S باشد. در این صورت

ρ رابطه همنهشتی راست روی S نامیده می شود، اگر

$$\forall s, l, t \in S, \quad spl \Rightarrow (st)\rho(lt).$$

همنهشتی چپ است، اگر

$$\forall s, l, t \in S, \quad spl \Rightarrow (ts)\rho(tl).$$

همنهشتی (دو طرفه) است، هرگاه هم همنهشتی راست و هم همنهشتی چپ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه $S/\rho = \{[a] : a \in S\}$ تحت عمل $[s][t] = [st]$ یک نیم‌گروه است، که آن را نیم‌گروه خارج قسمتی گوئیم. اگر S تکواره باشد، آنگاه S/ρ تکواره‌ای با عنصر همانی $[1]_\rho$ خواهد بود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (S, \cdot) و (T, \cdot) دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : S \rightarrow T$ همریختی نیم‌گروه‌ها است، هرگاه

$$\forall x, y \in S, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به قسمی که 1_S و 1_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند، در این صورت $\phi : S \rightarrow T$ را همریختی تکواره‌ها گوئیم، هرگاه

$$\forall x, y \in S, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(1_S) = 1_T.$$

اگر ϕ یک به یک باشد، آن را تکریختی و اگر پوشا باشد آن را بروریختی می‌نامیم. اگر ϕ یک به یک و پوشا باشد، آن را یکریختی و S و T را یکریخت گوئیم و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید ρ یک همنهستی روی نیم‌گروه S باشد. نگاشت کانونی زیر را پوشای کانونی گوئیم:

$$\begin{aligned}\pi : S &\rightarrow S/\rho \\ x &\mapsto [x]_\rho\end{aligned}$$

۳-۱ مجموعه‌های مرتب جزئی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید P یک مجموعه باشد. یک ترتیب جزئی روی P ، رابطه‌ی دوتایی " \leq "

روی P است به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in P$:

$$(۱) \quad x \leq x$$

$$(۲) \quad x \leq y \text{ و } y \leq x \text{ نتیجه دهد } x = y$$

$$(۳) \quad x \leq y \text{ و } y \leq z \text{ نتیجه دهد } x \leq z$$

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، پادتقارنی و تعدی نامیده می‌شوند. مجموعه P مجهز به رابطه ترتیب جزئی

یک مجموعه مرتب جزئی گفته می‌شود. عناصر $a, b \in P$ را مقایسه‌پذیر گویند، اگر $a \leq b$ یا $b \leq a$ و

می‌نویسیم $a \parallel b$ ، در غیر این صورت مقایسه ناپذیر گوئیم و می‌نویسیم $a \not\parallel b$.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر به ازای هر

$x, y \in P$ یا $x \leq y$ یا $y \leq x$ (به این معنی که هر دو عنصر P مقایسه‌پذیر هستند)، آنگاه P یک زنجیر یا یک

مجموعه مرتب کلی نامیده می‌شود.

تذکر ۳.۳.۱. رابطه ترتیب جزئی " \leq " روی مجموعه مرتب جزئی P سبب رابطه نامساوی اکید ($<$) می‌شود، به این معنی که $x < y$ در P اگر و فقط اگر $x \leq y$ و $x \neq y$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $w \in X$ یک عنصر ماکسیمال (مینیمال) از (X, \leq) نامیده می‌شود، اگر برای $x \in X$ $(x \leq w)w \leq x$ نتیجه دهد $x = w$.

تعریف ۵.۳.۱. مجموعه مرتب جزئی (X, \leq) در شرط مینیمال صدق می‌کند، اگر هر زیرمجموعه ناتهی از X ، عنصر مینیمال داشته باشد. در این صورت، گوئیم (X, \leq) ، خوش تعریف است.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی X باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین برای Y گوئیم، هرگاه به ازای هر $y \in Y$ $c \leq y$.

اگر مجموعه کران‌های پایین Y ناتهی و دارای عضو ماکسیمم d باشد، آنگاه d را بزرگترین کران پایین یا اینفیمم برای Y می‌نامند که در صورت وجود، منحصر به فرد و به صورت $d = \wedge \{y \mid y \in Y\}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه کران بالا و کوچکترین کران بالا، برای یک زیرمجموعه ناتهی Y از یک مجموعه مرتب جزئی X تعریف می‌شود. کوچکترین کران بالا یا سوپریمم برای مجموعه Y به صورت $\vee \{y : y \in Y\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید (X, \leq) یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر به ازای هر $a, b \in X$ موجود باشد، $a \wedge b$ یک نیم شبکه پایین است. به طور مشابه (X, \leq) یک نیم شبکه بالاست، اگر به ازای هر $a, b \in X$ موجود باشد.

اگر به ازای هر $a, b \in X$ و $a \wedge b$ و $a \vee b$ موجود باشند، (X, \leq) را یک شبکه و اگر برای هر زیرمجموعه S از X کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین وجود داشته باشد، (X, \leq) یک شبکه کامل نامیده می‌شود.

لم ۸.۳.۱ (لم زرن^۱) $([5])$. اگر (X, \leq) ، یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد به قسمی که هر زنجیر از عناصر X یک کران بالا در X داشته باشد، آنگاه X حداقل یک عنصر ماکسیمال دارد.

۴-۱ رسته

تعریف ۱.۴.۱. یک رسته C تشکیل شده از:

(۱) رده $Ob C$ متشکل از اعضای که اشیاء C نامیده می‌شوند.

(۲) به ازای هر جفت مرتب (A, B) از اشیاء C مجموعه $Mor_C(A, B)$ ، که اعضای آن را

ریخت‌های از A به B می‌نامیم نسبت داده می‌شود به قسمی که اگر $A \neq A'$ یا $B \neq B'$ ، آنگاه

^۱Zorn's Lemma

$$Mor_C(A, B) \cap Mor_C(A', B') = \emptyset$$

(۳) ترکیب ریخت‌ها، یعنی به‌ازای هر سه‌تایی (A, B, C) از اشیاء در C ، نگاشت

$$Mor_C(A, B) \times Mor_C(B, C) \rightarrow Mor_C(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

موجود است، به قسمی که

(a) این ترکیب شرکت پذیر است، یعنی برای اشیاء A, B, C, D در C و ریخت‌های $f \in Mor_C(A, B)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ باشیم } h \in Mor_C(C, D) \text{ و } g \in Mor_C(B, C)$$

(b) برای هر شیء $A \in Ob C$ ریخت $id_A \in Mor_C(A, A)$ ریخت همانی A ، موجود باشد به قسمی که

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f \text{ داریم } B \in Ob C \text{ و هر } f \in Mor_C(A, B)$$

تعریف ۲.۴.۱. در رسته مجموعه‌ها که با Set نمایش داده می‌شود، اشیاء مجموعه‌ها،

ریخت‌ها، توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی برای هر مجموعه X ، همان

تابع همانی روی X است.

تعریف ۳.۴.۱. رسته‌ای که اشیاء آن تشکیل یک مجموعه می‌دهند، رسته کوچک

نامیده می‌شود. رسته‌ای که اشیاء آن متناهی باشند، رسته متناهی گوئیم.

مثال ۴.۴.۱. هر تکواره یک رسته کوچک است. در این رسته شیء را خود تکواره،

ریخت‌ها را عناصر تکواره و ترکیب ریخت‌ها را همان عمل نیم‌گروه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۴.۱. رسته C را ملموس می‌نامیم، هرگاه تمام اشیاء آن مجموعه‌ها (باساختار)، ریخت‌های از A به B نگاشت‌های (حافظ ساختار) از A به B ، ترکیب ریخت‌ها، همان ترکیب نگاشت‌ها و ریخت‌های همانی، همان نگاشت‌های همانی باشند.

تعریف ۶.۴.۱. ریخت $f: A \rightarrow B$ در رسته C را در نظر بگیرید، در این صورت

(۱) f را درون‌بر گوئیم، هرگاه معکوس پذیر راست باشد، یعنی $g \in \text{Mor}(B, A)$ موجود باشد به قسمی که $fg = id_B$. در این حالت B درون‌بر A نامیده می‌شود.

(۲) f را هم‌درون‌بر گوئیم، هرگاه معکوس پذیر چپ باشد، یعنی $g \in \text{Mor}(B, A)$ موجود باشد به قسمی که $gf = id_A$. در این صورت A هم‌درون‌بر B نامیده می‌شود.

(۳) f را یک‌ریختی گوئیم، هرگاه درون‌بر و هم‌درون‌بر باشد. در این حالت گوئیم A و B یک‌ریخت‌اند و $A \cong B$.

تعریف ۷.۴.۱. ریخت $f: A \rightarrow B$ در رسته C را در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$k, h \in \text{Mor}_C(C, A)$ در این صورت:

(۱) f را تک‌ریختی نامیم، اگر حذف پذیر از چپ باشد، یعنی

$$f \circ k = f \circ h \Rightarrow k = h.$$

(۲) f را بروریختی نامیم، اگر حذف پذیر از راست باشد، یعنی

$$k \circ f = h \circ f \Rightarrow k = h.$$

(۳) f یکریختی نامیم اگر f هم تکریختی و هم بروریختی باشد.

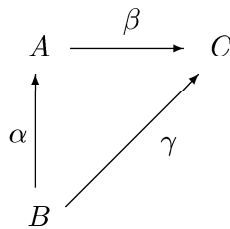
تعریف ۸.۴.۱. شیء U در رسته C ، شیء ابتدایی گفته می‌شود، اگر به ازای هر شیء X از C مجموعه $Mor(U, X)$ ، تک عضوی باشد.

به طور مشابه U انتهایی نامیده می‌شود، اگر به ازای هر شیء X از C مجموعه $Mor(X, U)$ ، تک عضوی باشد.

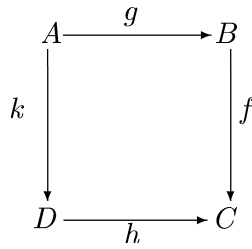
اشیاء ابتدایی و انتهایی، اشیاء عمومی نامیده می‌شوند.

قضیه ۹.۴.۱ ([۵]). اشیاء عمومی در حد یکریختی، یکتا هستند.

تعریف ۱۰.۴.۱. نمودار زیر را جابه‌جایی گوئیم، هرگاه $\beta \circ \alpha = \gamma$.



همچنین مربع زیر تعویض پذیر است، اگر $fg = hk$.



تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنید C و D دورسته باشند. تابعگون همگون $F: C \rightarrow D$ قانونی است

که به هر شیء A در C ، شیء $F(A)$ در D و به ازای هر ریخت $f: A \rightarrow A'$ در C ریخت یکتای $F(f)$ ،

$F(f): F(A) \rightarrow F(A')$ را نسبت می دهد به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

$$(1) \quad F(id_A) = id_{F(A)}, \quad A \in C \text{ هر به ازای}$$

(۲) F حافظ ترکیب است، یعنی به ازای هر $A_1, A_2, A_3 \in C$ ، $f_1 \in Mor_C(A_1, A_2)$ و

$$f_2 \in Mor_C(A_2, A_3)$$

$$F(f_2 f_1) = F(f_2) F(f_1).$$

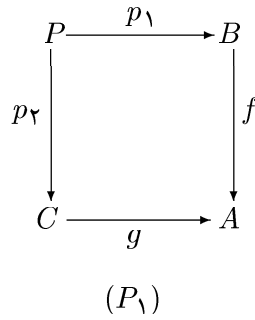
تعریف ۱۲.۴.۱. فرض کنید E ، D و C رسته باشند و $C \times D$ حاصل ضرب رسته های C و D

باشد. در این صورت $F: C \times D \rightarrow E$ تابعگون دوتایی نامیده می شود. به طور مشابه تابعگون چندتایی

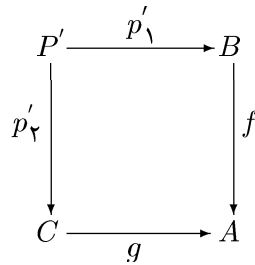
تعریف می شوند.

تعریف ۱۳.۴.۱. ریخت های $f: B \rightarrow A$ و $g: C \rightarrow A$ در رسته C مفروضند.

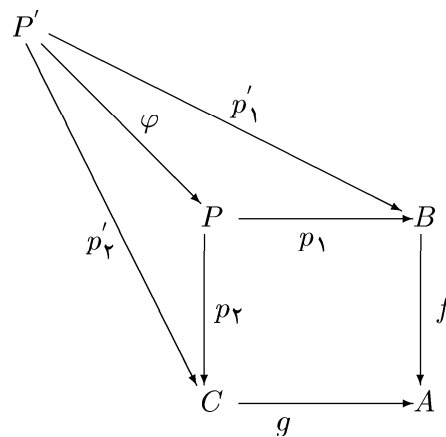
نمودار تعویض پذیر:



یک عقب بر است، در صورتی که اگر نمودار زیر در C تعویض پذیر باشد:



آنگاه ریخت منحصر به فرد $\varphi: P' \rightarrow P$ موجود باشد به قسمی که نمودار زیر تعویض پذیر باشد:



به طور مشابه، عقب بر چندتایی $(P, (p_i)_{i \in I})$ تعریف می شود.