دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

حاصل‌ضرب‌های تانسوری و حفظ حدها برای سیستم‌ها روی تکواره‌ها

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

لیلا کاروند

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به ساحت مقدس صاحب الزمان (عج):

و تقدیم به:

پدرم

مادرم

و همسرم

سپاسگزاری:

حمد و سپاس سزاوار پروردگاری است عزوجل که زبان از مدح و حمد ایشان عاجز است. پروردگاری که توفیق نوشیدن جرعه‌ای از دریای علم را نصیب این حقیر سعید نمود. و سلام و صلوات بر صفی عالمین محمد مصطفی (ص) و سلام بر علی دروازه شهر علم.

و سپاس از تمامی آموزگاران دوران تحصیلم از ابتدا تا به حال که همواره مستفیض از محضر ایشان بودم.

تقدیر و تشکر از آقای دکتر گلچین که راهنمایی این پروژه بر عهده ایشان بود.

و سپاس ویژه از اساتید دانشگاه سیستان و بلوچستان که شاگردی از محضرشان همواره باعث افتخار بنده بود.

از عزیزانم بابا درویش ، مادر، محسن، امید، فاطمه و زهرا صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که همواره باعث دلگرمی و امید من بوده‌اند و موفقیت روز افزون آنان را از خداوند منان خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی این موضوعات می‌پردازیم که تابعگون چه زمانی تمام حدها، حاصل‌ضرب‌ها و تمام حاصل‌ضرب‌های متناهی را حفظ می‌کند. این خواص را به ترتیب ابرهمواری، حاصل‌ضرب همواری و به طور متناهی حاصل‌ضرب همواری سیستم‌ها معرفی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

حدود سه دهه قبل، تحقیقاتی در این زمینه که برای تکواره S و سیستم راست A_S، تابعگون $A_S \otimes -$(از رسته سیستم‌های چپ به رسته مجموعه‌ها) حافظ عقب برها، برابرسازها و انواع متفاوتی از تکریختی‌ها باشد مورد توجه قرار گرفت. آنچه نظر محققین را به خود جلب نمود سیستم‌های هموار و به طور ضعیف هموار بودند. گرچه استنستروم [۱] در [۷] این موضوع را که تابعگون $A_S \otimes -$ حدهای دلخواه یا حدهای متناهی را حفظ کند مورد مطالعه قرار داد، اما در این زمینه نظریاتی منتشر نکرد. همچنین در آن زمان به بسیاری از سوالات مربوط به هنگامی‌که تابعگون $A_S \otimes -$ حاصل‌ضرب‌های دلخواه یا حاصل‌ضرب‌های متناهی را حفظ کند پاسخی داده نشد. در این پایان نامه به بررسی چنین موضوعاتی خواهیم پرداخت.

پایان نامه حاضر شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده‌ایم. در فصل دوم ارتباط سیستم حاصل‌ضرب هموار با سایر سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم به معرفی سیستم ابرهموار و قضایای مرتبط با آن می‌پردازیم.

---

[۱] B. Stenstrom

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل بعضی از تعاریف و پیش‌نیازهای لازم در فصل‌های آتی را ارائه می‌دهیم.

۱—۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه غیر تهی S همراه با یک عمل دوتایی شرکت پذیر را نیم‌گروه و در صورت داشتن عضو همانی ۱، تکواره می‌نامیم.

هر گاه نیم‌گروه S با حداقل دو عضو شامل عنصر ۰ باشد، به قسمی که به ازای هر $x \in S$، $0 = x0 = 0x$، دراین صورت گوئیم ۰ عضو صفر S است و S را نیم‌گروه صفردار می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. زیر مجموعه غیر تهی K از نیم گروه S را یک ایدآل چپ از S می‌گوئیم، هر گاه به ازای هر $a \in K$ و هر $s \in S$، $sa \in K$.

اگر $s \in S$، آنگاه کوچکترین ایدآل چپ S شامل s را ایدآل چپ اصلی تولید شده توسط s می‌نامیم که عبارتست از $Ss \cup \{s\}$. ایدآل راست (اصلی) نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. عضو $z \in S$ را یک صفر راست نیم‌گروه S می‌نامیم، هر گاه به ازای هر $s \in S$، $sz = z$.

هر گاه نیم‌گروه S دارای این خاصیت باشد که هر عضو آن صفر راست باشد دراین‌صورت می‌گوئیم S نیم‌گروه صفرراست است. صفر چپ و نیم‌گروه صفر چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. S را یک نیم‌گروه صفر گوئیم، هرگاه به ازای هر $s, t \in S$، $st = 0$.

تعریف ۴.۱.۱. عضو $s \in S$ را حذف پذیر راست می‌نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in S$، از $xs = ys$ بتوان نتیجه گرفت $x = y$.

به طور مشابه عضو حذف پذیر چپ نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. عضو e از نیم گروه S را خود توان می‌نامیم، هر گاه $e^{2} = e$.

مجموعه تمام عناصر خود توان S با نماد $E(S)$ نشان داده می‌شود. اگر $E(S) = S$، آنگاه S را نیم گروه خود توان یا یک باند می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. گروه عبارتست از یک تکواره مانند S که به ازای هر $s \in S$ عنصر منحصربه‌فرد s^{-1} در S موجود باشد به قسمی که، $s^{-1}s = ss^{-1} = 1$.

تعریف ۷.۱.۱. عضو s از نیم‌گروه S را نامتناوب گوئیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به قسمی که $s^{n} = s^{n+1}$.

نیم‌گروه S را نامتناوب گوئیم، هرگاه تمام عناصر آن نامتناوب باشند.

تعریف ۸.۱.۱. تکواره S را تاشونده راست(چپ) گوئیم، هرگاه به ازای هر $s, s' \in S$، $u \in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $su = s'u$ $(us = us')$.

تعریف ۱.۱.۹. تکواره S را برگشت پذیرراست گوئیم، هرگاه داشته باشیم

$$(\forall\ s,t\in S)\ (\exists\ u,v\in S),\ us=vt \quad (\forall\ s,t\in S,\ Ss\cap St\neq\emptyset).$$

به‌طور مشابه می‌توان برگشت پذیری چپ را تعریف نمود. تکواره‌های جابجایی، به‌وضوح تواماً برگشت پذیرراست و چپ می‌باشند.

۱ــ۲ همنهشتی‌ها و نیم‌گروه‌های خارج قسمتی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. هر زیر مجموعه ρ از حاصل‌ضرب دکارتی $S\times S$، یک رابطه دوتایی بر روی S نامیده می‌شود.

مجموعه تمام روابط دوتایی روی S با $B(S)$ نشان داده می‌شود. رابطه $\rho\in B(S)$:

(۱) بازتابی نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $x\in S$، $x\rho x$.

(۲) تقارنی گفته می‌شود، اگر $x\rho y$ نتیجه دهد $y\rho x$.

(۳) تعدی است، اگر $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد $x\rho z$.

رابطه‌ی که دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\rho\subseteq S\times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این صورت ρ رابطه همنهشتی راست روی S نامیده می‌شود، اگر

$$\forall\ s,l,t\in S,\quad s\rho l\Rightarrow (st)\rho(lt).$$

همنهشتی چپ است، اگر

$$\forall\ s, l, t \in S, \quad s\rho l \Rightarrow (ts)\rho(tl).$$

همنهشتی (دو طرفه) است، هرگاه هم همنهشتی راست و هم همنهشتی چپ باشد.

تعریف ۱.۲.۳. مجموعه $S/\rho = \{[a] : a \in S\}$ تحت عمل $[s][t] = [st]$ یک نیم‌گروه است، که آن را نیم‌گروه خارج قسمتی گوئیم. اگر S تکواره باشد، آنگاه S/ρ تکواره‌ای با عنصر همانی $[۱]_\rho$ خواهد بود.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $(S, .)$ و $(T, .)$ دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : S \to T$ همریختی نیم‌گروه‌ها است، هرگاه

$$\forall\ x, y \in S,\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به قسمی که ۱_S و ۱_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند، در این صورت $\phi : S \to T$ را همریختی تکواره‌ها گوئیم، هرگاه

$$\forall\ x, y \in S,\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(۱_S) = ۱_T.$$

اگر ϕ یک به یک باشد، آن را تکریختی و اگر پوشا باشد آن را بروریختی می‌نامیم. اگر ϕ یک به یک و پوشا باشد، آن را یکریختی و S و T را یکریخت گوئیم و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید ρ یک همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد. نگاشت کانونی زیر را پوشای کانونی گوئیم:

$$\pi : S \to S/\rho$$
$$x \mapsto [x]_\rho$$

۱–۳ مجموعه‌های مرتب جزئی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید P یک مجموعه باشد. یک ترتیب جزئی روی P، رابطه‌ی دوتایی "$\leqslant$" روی P است به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in P$:

(۱) $x \leqslant x$.

(۲) $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ نتیجه دهد $x = y$.

(۳) $x \leqslant y$ و $y \leqslant z$ نتیجه دهد $x \leqslant z$.

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، پادتقارنی و تعدی نامیده می‌شوند. مجموعه P مجهز به رابطه ترتیب جزئی یک مجموعه مرتب جزئی گفته می‌شود. عناصر $a, b \in P$ را مقایسه‌پذیر گویند، اگر $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ و می‌نویسیم $a \nparallel b$، در غیر این صورت مقایسه ناپذیر گوئیم و می‌نویسیم $a \parallel b$.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر به ازای هر $x, y \in P$، $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$(به این معنی که هر دو عنصر P مقایسه پذیر هستند)، آنگاه P یک زنجیر یا یک مجموعه مرتب کلی نامیده می‌شود.

تذکر ۱.۳.۳. رابطه ترتیب جزئی "$\leqslant$" روی مجموعه مرتب جزئی P سبب رابطه نامساوی اکید $(<)$ می‌شود، به این معنی که $x < y$ در P اگر و فقط اگر $x \leqslant y$ و $x \neq y$.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید X یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $w \in X$، یک عنصر ماکسیمال (مینیمال) از $(X, \leqslant)$ نامیده می‌شود، اگر برای $x \in X$، $w \leqslant x$ $(x \leqslant w)$ نتیجه دهد $x = w$.

تعریف ۱.۳.۵. مجموعه مرتب جزئی $(X, \leqslant)$ در شرط مینیمال صدق می‌کند، اگر هر زیرمجموعه ناتهی از X، عنصر مینیمال داشته باشد. در این صورت، گوئیم $(X, \leqslant)$، خوش تعریف است.

تعریف ۱.۳.۶. فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی X باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین برای Y گوئیم، هرگاه به ازای هر $y \in Y$، $c \leqslant y$.

اگر مجموعه کران‌های پایین Y ناتهی و دارای عضو ماکسیمم d باشد، آنگاه d را بزرگترین کران پایین یا اینفیمم برای Y می‌نامند که در صورت وجود، منحصر به فرد و به صورت $d = \wedge\{y \mid y \in Y\}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه کران بالا و کوچکترین کران بالا، برای یک زیرمجموعه ناتهی Y از یک مجموعه مرتب جزئی X تعریف می‌شود. کوچکترین کران بالا یا سوپریمم برای مجموعه Y به صورت $\vee\{y : y \in Y\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر به ازای هر $a,b \in X$، $a \wedge b$ موجود باشد، $(X,\leqslant)$ یک نیم مشبکه پایین است. به طور مشابه$(X,\leqslant)$ یک نیم مشبکه بالاست، اگر به ازای هر $a,b \in X$، $a \vee b$ موجود باشد.

اگر به ازای هر $a,b \in X$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ موجود باشند، $(X,\leqslant)$ را یک مشبکه و اگر برای هر زیرمجموعه S از X کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین وجود داشته باشد، $(X,\leqslant)$ یک مشبکه کامل نامیده می‌شود.

لم ۱.۳.۸(لم زرن [1])([۵]). اگر$(X,\leqslant)$، یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد به قسمی که هر زنجیر از عناصر X یک کران بالا در X داشته باشد، آنگاه X حداقل یک عنصر ماکسیمال دارد.

۱ــ۴ رسته

تعریف ۱.۴.۱. یک رسته C تشکیل شده از:

(۱) رده $\mathrm{Ob}\ \mathrm{C}$ متشکل از اعضایی که اشیاء C نامیده می‌شوند.

(۲) به‌ازای هر جفت مرتب (A,B) از اشیاء C مجموعه $Mor_C(A,B)$، که اعضای آن را ریخت‌های از A به B می‌نامیم نسبت داده می‌شود به قسمی که اگر $A \neq A'$ یا $B \neq B'$، آنگاه

[1] Zorn's Lemma

$Mor_C(A,B) \cap Mor_C(A',B') = \emptyset$.

(۳) ترکیب ریخت‌ها، یعنی به‌ازای هر سه‌تایی (A,B,C) از اشیاء در C، نگاشت

$$Mor_C(A,B) \times Mor_C(B,C) \to Mor_C(A,C)$$
$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

موجود است، به قسمی که

(a) این ترکیب شرکت پذیر است، یعنی برای اشیاء A، B، C و D در C و ریخت‌های $f \in Mor_C(A,B)$، $g \in Mor_C(B,C)$ و $h \in Mor_C(C,D)$ داشته باشیم $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(b) برای هر شیء $A \in Ob\ \mathrm{C}$ ریخت $id_A \in Mor_C(A,A)$، ریخت همانی A، موجود باشد به قسمی که به‌ازای هر $f \in Mor_C(A,B)$ و هر $B \in Ob\ \mathrm{C}$ داریم $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.

تعریف ۱.۴.۲. در رسته مجموعه‌ها که با Set نمایش داده می‌شود، اشیاء مجموعه‌ها، ریخت‌ها، توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی برای هر مجموعه X، همان تابع همانی روی X است.

تعریف ۱.۴.۳. رسته‌ای که اشیاء آن تشکیل یک مجموعه می‌دهند، رسته کوچک نامیده می‌شود. رسته‌ای که اشیاء آن متناهی باشند، رسته متناهی گوئیم.

مثال ۱.۴.۴. هر تکواره یک رسته کوچک است. در این رسته شیء را خود تکواره، ریخت‌ها را عناصر تکواره و ترکیب ریخت‌ها را همان عمل نیم‌گروه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۴.۵. رسته C را ملموس می‌نامیم، هر گاه تمام اشیاء آن مجموعه‌ها(باساختار)، ریخت‌های از A به B نگاشت‌های(حافظ ساختار) از A به B، ترکیب ریخت‌ها، همان ترکیب نگاشت‌ها و ریخت‌های همانی، همان نگاشت‌های همانی باشند.

تعریف ۱.۴.۶. ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته C را در نظر بگیرید، در این‌صورت

(۱) f را درون‌بر گوئیم، هرگاه معکوس پذیر راست باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ موجود باشد به قسمی که $fg = id_B$. در این حالت B درون‌بر A نامیده می‌شود.

(۲) f را هم درون‌بر گوئیم، هرگاه معکوس پذیر چپ باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ موجود باشد به قسمی که $gf = id_A$. در این صورت A هم درون‌بر B نامیده می‌شود.

(۳) f را یکریختی گوئیم، هرگاه درون بر و هم‌درون بر باشد. در این حالت گوئیم A و B یکریخت اند و $A \cong B$.

تعریف ۱.۴.۷. ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته C را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $k, h \in Mor_{\mathbf{C}}(C, A)$، در این صورت:

(۱) f را تکریختی نامیم، اگر حذف پذیر از چپ باشد، یعنی

$$f \circ k = f \circ h \Rightarrow k = h.$$

(۲) f را بروریختی نامیم، اگر حذف پذیر از راست باشد، یعنی

$$k \circ f = h \circ f \Rightarrow k = h.$$

(۳) f یکریختی نامیم اگر f هم تکریختی و هم برو‌ریختی باشد.

تعریف ۱.۴.۸. شیء U در رسته C، شیء ابتدایی گفته می‌شود، اگر به ازای هر شیء X از C مجموعه $Mor(U,X)$، تک عضوی باشد.

به طور مشابه U انتهایی نامیده می‌شود، اگر به ازای هر شیء X از C مجموعه $Mor(X,U)$، تک عضوی باشد.

اشیاء ابتدایی و انتهایی، اشیاء عمومی نامیده می‌شوند.

قضیه ۱.۴.۹([۵]). اشیاء عمومی در حد یکریختی، یکتا هستند.

تعریف ۱.۴.۱۰. نمودار زیر را جابه‌جایی گوئیم، هرگاه $\beta \circ \alpha = \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] & C \\
B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

همچنین مربع زیر تعویض پذیر است، اگر $fg = hk$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱.۴.۱۱. فرض کنید C و D دو رسته باشند. تابعگون همگون $F: \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ قانونی است که به هر شیء A در C، شیء $F(A)$ در D و به‌ازای هر ریخت $f : A \longrightarrow A'$ در C ریخت یکتای $F(f)$، $F(f) : F(A) \longrightarrow F(A')$ را نسبت می‌دهد به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) F حافظ همانی است، یعنی به ازای هر $A \in \mathrm{C}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(۲) F حافظ ترکیب است، یعنی به‌ازای هر $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{C}$، $f_1 \in Mor_C(A_1, A_2)$ و $f_2 \in Mor_C(A_2, A_3)$،

$$F(f_2 f_1) = F(f_2)F(f_1).$$

تعریف ۱.۴.۱۲. فرض کنید E ، D و C رسته باشند و $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ حاصل‌ضرب رسته‌های C و D باشد. در این صورت $F : \mathrm{C} \times \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{E}$ تابعگون دوتایی نامیده می‌شود. به طور مشابه تابعگون چندتایی تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۱۳. ریخت‌های $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$ در رسته C مفروضند. نمودار تعویض پذیر:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_{۱}"] \arrow[d, "p_{۲}"'] & B \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

$(P_{۱})$

یک عقب بر است، درصورتی که اگر نمودار زیر در C تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "p'_{۱}"] \arrow[d, "p'_{۲}"'] & B \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

آنگاه ریخت منحصربه‌فرد $\varphi : P' \longrightarrow P$ موجود باشد به قسمی که نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "p'_{۱}"] \arrow[ddr, "p'_{۲}"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_{۱}"'] \arrow[d, "p_{۲}"] & B \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

به طور مشابه، عقب بر چندتایی $(P,(p_i)_{i\in I})$ تعریف می‌شود.