بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

عنوان :
آزمون فرض و آزمون نسبت احتمال دنباله ای فازی

استاد راهنما:
دکتر داود قزوینی نژاد

نگارش:
فاطمه سلطان خواه

اسفند ماه ۱۳۹۱

دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

نام دانشجو:
فاطمه سلطان خواه

تحت عنوان :

آزمون فرض و آزمون نسبت احتمال دنباله ای فازی

در تاریخ ۹۱/۱۲/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر داود قزوینی نژاد   با مرتبه‌ی علمی   استادیار   امضاء:

استاد داور   دکتر عبدالرضا سیاره   با مرتبه‌ی علمی   دانشیار   امضاء:

استاد داور   دکتر عبدالله جلیلیان   با مرتبه‌ی علمی   استادیار   امضاء:

خدایا

خلاء عظیم تنهایی را جز تو، که می تواند پر کند

و زخم عمیق غربت را جز تو، که می تواند مرهم گذاشت.

سپاس می گویم تو را که به قداست قلم قسم می خوری و رقاصان قلم به دست را برتر از عابدانت می دانی.

سپاس می گویم تو را به خاطر حضور عشق مادرم و پدر که عاشقانه دوستش دارم و می بوسم دستان خسته، اما پر امیدش را.

سپاس به خاطر تمام آنانی که فانوس را خورشید ساختند تا چشمان کم سوی من از روشنایی اندیشه هایشان نور را تنفس کند.

یاری رسانم باش تا راه را در این تاریکی گم نکنم.

اکنون که با لطف و یاری پروردگار انجام این رساله به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم از کلیه عزیزانی که در این راه مرا یاری نموده اند صمیمانه قدردانی نمایم. از جناب آقای دکتر داود قزوینی نژاد استاد عزیزم که با نظرات و پیشنهادات ارزنده و زحمات بی دریغشان در طی مراحل اجرا، تدوین و ارائه رساله مرا یاری نموده اند، صمیمانه قدردانی می نمایم. از پدر و مادرم که در کلیه مراحل تحصیل مشوق و راهنمای من بودند و با نور شمع وجودشان، روشنی بخش راهم گردیدند، خالصانه سپاسگذارم و بوسه بر دستان پر مهرشان می نهم که هر چه دارم از وجود پاک و مهربان آنهاست و به یکایک تارهای سپید مویشان هزاران دین دارم.

فاطمه سلطان خواه

کرمانشاه - اسفند ماه ۱۳۹۱

تقدیم

به

پدر و مادر عزیزم

چکیده

یکی از محدودیت های اساسی در استنباط آماری مواجه شدن با اطلاعاتی است که به صورت نادقیق و در حیطه مجموعه های فازی گزارش شده اند. از این رو مبانی آزمون فرضیه آماری با کمک تابع آزمون و بر حسب اطلاعات فازی (داده، پارامتر، متغیر تصادفی) با استفاده از تابع چگالی احتمالی است که برمبنای نوع اطلاعات فازی با تابع عضویت که در نظریه مجموعه های فازی تعریف شده اند، وزن دار می شوند، آنگاه به کمک لم نیمن –پیرسن بر پایه تابع چگالی وزن دار، تابع آزمون مورد نظر را ساخته و آزمون را انجام می دهند. در بسیاری از مسائل آماری نظیر بازرسی نمونه ای و مباحث کنترل کیفیت، لزومی به تعیین تعداد مشاهدات قبل آزمایش نیست، بلکه نتایج آزمایش، تعیین کننده حجم نمونه است، با طراحی نمونه گیری از مشاهدات فازی و ساختن یک قاعده یا تصمیم برای توقف نمونه گیری از طریق آزمون نسبت احتمال دنباله ای و لم نیمن –پیرسن تعمیم یافته بر مبنای تابع چگالی وزن دار، متوسط تعداد مشاهدات تا رسیدن به تصمیم قطعی (رد یا قبول فرضیه $H_\circ$)محاسبه می شود. در آزمون فرضیه با استفاده از مفهوم $\alpha-$ برش ها در نظریه مجموعه های فازی، اطلاعات مندرج در مسئله را بر حسب $\alpha-$ برش ها می سازند و با برآورد پارامترهای مورد آزمون، آماره آزمون فازی و ناحیه بحرانی فازی را محاسبه می کنند، آنگاه آزمون را در سطح معنی داری معلوم با یک سطح اعتبار مشخص انجام می دهند.

کلمات کلیدی: داده فازی، فرضیه فازی، آزمون فازی، لم نیمن پیرسن تعمیم یافته، $\alpha-$برش .

فهرست مطالب

پیشگفتار

آزمون فرضیه، یکی از مباحث پایه در آمار استنباطی می باشد. به طور کلی هدف از آزمون فرضیه های آماری این است که آیا ادعا یا نظریه ای درباره ویژگی جامعه یعنی پارامترهای آن، توسط اطلاعات به دست آمده از داده های نمونه تایید می شود یا نه ؟

مبنای آزمون فرضیه های آماری، در روش کلاسیک براین است که هم فرضیه و هم داده های در دسترس دقیق هستند. اما گاهی فرضیه های دقیق، غیر واقعی به نظر می رسند و مشاهدات ما مقادیر غیردقیق و تقریبی می باشند. در این صورت به کمک نظریه مجموعه های فازی راهکاری برای چنین محدودیت های ارائه می شود به این صورت که با تعریف تابع چگالی احتمالی که بر اساس نوع اطلاعات فازی مندرج در مسئله با تابع عضویت متناسب با داده ها یا پارامترهای فازی مورد بحث در مسئله وزن دار شده است و لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته بر اساس اطلاعات فازی، می توان تابع آزمون را تعریف کرد و در نهایت آزمون را انجام داد. از طرفی در بسیاری از مسائل آماری نظیر بازرسی نمونه ای و مباحث کنترل کیفیت، لزومی به تعیین تعداد مشاهدات قبل از آزمایش نیست، بلکه در عمل نتایج آزمایش، تعیین کننده حجم نمونه است، بنابراین با طراحی نمونه گیری بر اساس آزمون نسبت احتمال دنباله ای با کمک لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته بر پایه مجموعه های فازی، قاعده یا تصمیمی برای توقف مشاهدات را ساخته و حجم نمونه لازم برای رسیدن به یک تصمیم قطعی در مورد آزمون فرض مورد نظر، محاسبه می شود. بعلاوه با کمک مفهوم $\alpha-$ برش ها، اطلاعات فازی را که شامل داده های فازی یا پارامترهای فازی و یا هر دو آن ها می باشد، را به شکل $\alpha-$ برش ها ساخته و با استفاده از برآورد پارامتر مورد نظر، آماره آزمون فازی را می توان تعریف کرد، در این صورت آزمون در سطح معنی داری معین و با یک سطح اعتبار مشخص انجام می شود. دراین پایان نامه، فصل اول شامل مفاهیم اساسی نظریه مجموعه های فازی می باشد. در فصل دوم به بررسی برآورد بیز بر پایه داده های فازی و آزمون فرضیه های فازی بر اساس ملاک بیز و قاعده تصمیم می پردازیم. فصل سوم شامل آزمون فرضیه های فازی بر مبنای داده فازی و آماره آزمون فازی به فرم $\alpha-$ برش ها می باشد، در نهایت در فصل چهارم به مطالعه آزمون فرض و آزمون نسبت احتمال دنباله ای بر اساس لم نیمن – پیرسن تعمیم یافته بر مبنای تابع چگالی احتمال وزن دار، برای فرضیه های فازی ساده در برابر ساده می پردازیم.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\sim$ علامت مجموعه فازی

$\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی

$\tilde{X}^{(n)}$ مجموعه همه نمونه های تصادفی فازی

X_α^L $\alpha-$ برش پایینی متغیر فاز ی X

X_α^U $\alpha-$برش بالایی متغیر فازی X

$\tilde{A}$ مجموعه فازی A

$\tilde{A}_\alpha$ $\alpha-$برش مجموعه فازی A

$\delta(\tilde{X})$ برآوردگر فازی

δ_f^B برآوردگر بیز فازی

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی A

$\tilde{F}(\tilde{x})$ تابع توزیع متغیر فازی X

$F_\alpha^L(\tilde{x})$ $\alpha-$برش پایینی تابع توزیع متغیر تصادفی فازی X

$F_\alpha^U(\tilde{x})$ $\alpha-$ برش بالایی تابع توزیع متغیر تصادفی فازی X

$\tilde{E}(\tilde{X})$ امید ریاضی متغیر فازی X

$E_\alpha^L(\tilde{X})$ $\alpha-$برش پایینی امید ریاضی متغیر تصادفی فازی X

$E_\alpha^U(\tilde{X})$ $\alpha-$ برش بالایی امید ریاضی متغیر تصادفی فازی X

$P(\tilde{A})$ احتمال فازی مجموعه A

$\mu(\theta)$ تابع عضویت پارامتر فازی θ

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

"جهان خاکستری است اما علم سیاه و سفیداست. ما درباره صفرها و یک هاصحبت می کنیم اما حقیقت چیزی بین آنهاست. جملات و بیان های منطق سوری همگی به شکل درست یا نادرست، یک یا صفر هستند. اما بیان های مربوط به جهان واقعی متفاوتند. هر نوع بیان واقعیت یکسره درست یا نادرست نیست. حقیقت آنها چیزی بین درستی کامل و نادرستی کامل است. چیزی بین یک و صفر، یعنی مفهومی چندارزشی و یا خاکستری. حال فازی چیزی بین سیاه و سفید، یعنی خاکستری است".

نظریه مجموعه های فازی اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگر زاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه بر کلی آمریکا، با انتشار مقاله مجموعه های فازی به عرصه دانش معرفی شد و تا دهه ۱۹۷۰ مبانی نظریه مجموعه های فازی و منطق فازی شکل گرفت. منطق فازی نوعی از منطق شامل بی نهایت مقدار و در حقیقت یک ابتکار برای بیان رفتار مطلوب سیستم ها با استفاده از زبان روزمره. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است در مقابل منطق گسسته کلاسیکی که در آن گزاره ها فقط دو ارزش درست یا نادرست دارند و به آن منطق باینری یا منطق صفر و یک می گویند.

در واقع نظریه مجموعه های فازی، نظریه ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، سیستم ها و متغیر هایی که نادقیق هستند، را صورت بندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. گسترش نظریه مجموعه های فازی و ارتباط آن با سایر علوم، از جمله علم آمار و نظریه آمار حائز اهمیت می باشد. نظریه آمار و نظریه مجموعه های فازی، هر دو برای مطالعه الگوها و سیستم های عدم قطعیت وضع شده اند، اولی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت آماری منسوب به پیشامدهای تصادفی و دومی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت امکانی که ناشی از ابهام و نادقیق بودن می باشد. این دو نظریه نه متناقض یکدیگرند و نه یکی، دیگری را شامل می شود. اما این باعث نمی شود که نتوان در یک مسئله از هر دو روش استفاده کرد.

در واقع منظور از آمار فازی، استفاده از روش های فازی در مباحث گوناگون علم آمار است. که در یک تقسیم بندی به صورت زیر می باشد:

۱-تعمیم مدل های کلاسیک به مدل های فازی. برای نمونه می توان به مدل هایی اشاره کرد که در آنها مشاهدات نادقیق مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرند. در این موارد چنانچه داده های نادقیق به داده های دقیق تبدیل شوند، آنگاه مدل اصلی به یک مدل معمولی آماری تقلیل می یابد.

۲-استفاده از روش های فازی به جای روش های آماری. برای نمونه می توان به مواردی اشاره کرد که احساس می شود عدم اطمینان حاکم بر مدل از نوع امکانی است نه از نوع احتمالی. مثلا در یک مدل رگرسیونی ممکن است خطای مدل به عدم اطمینان ناشی از مبهم بودن و منعطف بودن ارتباط بین متغیر های سیستم بازگردد و نه به عدم اطمینان منسوب به خطای تصادفی .

۳- بکارگیری توام روش های فازی و روشهای آماری. در مدل هایی که هر دو نوع عدم قطعیت چه احتمال و چه امکانی در آنها وجود دارند، مثلا در مسئله برآورد یک پارامتر مجهول از یک توزیع احتمال، ممکن است با مشاهدات نادقیق نمونه مواجه شویم. در این حالت می توان مشاهدات نادقیق را با مجموعه های فازی صورت بندی کرد و آنگاه از آنها در استنباط درباره پارامتر مجهول استفاده کرد.

تعمیم های یک مدل آماری

یک مدل آماری را می توان از چهار جنبه تعمیم داد:
۱–متغیرهای تصادفی مدل را به صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفت.
۲–متغیر ها به صورت معمولی فرض شوند، اما مشاهدات مربوط به آنها مشاهدات نادقیق باشند.
۳–متغیرها و مشاهدات معمولی باشند، اما پارامترهای مدل فازی فرض شوند.
۴–متغیر ها، مشاهدات مربوط به متغیرها و پارامترهای مدل اصلی، همگی معمولی باشند، اما متغیرها یا فرض ها یا توابع مرتبط با مدل مانند تابع زیان، تابع تصمیم، فرض مورد آزمون و ... منعطف و نادقیق باشند.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه معمولی یا کلاسیک، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را داشته باشد، عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن باشد، عضو مجموعه نیست. مثلا اگر مجموعه مربوط به طول قد انسانها $X = [۰, ۲۰۰]$باشد و p ویژگی بلندتر از ۱۸۰ سانتی متر را در نظر بگیریم، آنگاه p یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانند A را تعریف می کند که عبارت است از انسان هایی با قد بلندتر از $۱۸۰cm$.حال اگر بخواهیم در مورد انسان های بلند قد گفتگو کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سروکار داریم. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت افراد در گردایه ای از انسان های بلند قد قطعی و مشخص نیست. آیا یک فرد با $۱۷۸cm$ بلند قد محسوب می شود؟ با $۱۸۰cm$ چطور؟
بیشتر مسائلی که در زندگی روز مره با آن سرو کار داریم در واقع مفاهیم نادقیقی هستند و به صورت مجموعه هایی با کران های تقریبی می باشند. مثلا لامپ هایی با طول عمر زیاد، ضریب هوشی پایین، نرخ تورم بالا، فشار خون بسیار بالا و ... . نظریه مجموعه های فازی در واقع تعمیمی از نظریه مجموعه های کلاسیک است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان هاست.

تعریف ۲.۲.۱. تابع نشانگر هر زیر مجموعه دلخواه A از یک مجموعه مرجع X تابعی است به فرم

$$I_A(x) : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$$

می باشد که به صورت زیر می توان نمایش داد:

$$I_A(x) : \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \in A^c \end{cases}$$

برای $x \in X$ در منطق کلاسیک عدم عضویت عنصر به مجموعه با عدد صفر و عضویت به مجموعه با عدد یک نمایش داده می شود اما در منطق فازی تابع نشانگر هر عددی را از بازه $[۰, ۱]$ اختیار می کند. در این صورت در مجموعه مربوط به افراد بلند قد، به مقادیر کوچک طول قد اعداد نزدیک صفر و به مقادیر بزرگ اعداد نزدیک یک را نسبت می دهیم. در واقع به جای آنکه بگوییم یک شخص با طول قد $۱۸۰cm$ بلند قد می باشد، می گوییم وی با درجه مثلا ۰/۷ بلند قد محسوب می شود.

تعریف ۳.۲.۱. اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به $[۰, ۱]$ توسعه دهیم به تابعی می رسیم که به x از X عددی را در بازه ی $[۰, ۱]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت A می گوییم و آن را با $\mu_A(x)$ یا به اختصار با $A(x)$

نمایش می دهیم . اینک A دیگر یک مجموعه کلاسیک نیست، بلکه یک مجموعه فازی است که با$\tilde{A}$ نمایش می دهیم با تابع عضویت،

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \longrightarrow [0,1]$$

مجموعه فازی بر روی کل فضای X یک مجموعه از جفت های $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ می باشد به صورت:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1] \subseteq R\}$$

که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را درجه عضویت عنصر x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ گویند. این درجه بین کران های صفر و یک از اعداد حقیقی قرار می گیرد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

یعنی x به مجموعه فازی تعلق ندارد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

یعنی x به مجموعه فازی تعلق دارد. اگر تابع عضویت تنها مقادیر $\{0,1\}$ را تولید کند دیگر مجموعه ما فازی نیست، حتمی است.
فرض کنید $X = \{1,2,3,...,7\}$. می خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق کوچک را داشته باشند. برای مدل سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت مجموعه فازی که بستگی به نظر تصمیم گیرنده دارد ،را انتخاب کنیم .مثلا یک تابع عضویت برای مدل سازی مفهوم فوق این گونه است

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0/9 & x = 2 \\ 0/7 & x = 3 \\ 0/5 & x = 4 \\ 0/3 & x = 5 \\ 0/1 & x = 6 \\ 0 & x = 7 \end{cases}$$

برای مثال $\mu_{\tilde{A}}(3) = 0/7$ بدین معنی است که از نظر تصمیم گیرنده عدد ۳ به اندازه ۰/۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد.

1.2.1 مفاهیم بسط مجموعه های فازی

تعریف ٤.٢.١. فرض کنید دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ وجود دارند در این صورت

$$\tilde{A} = \tilde{B} \quad iff \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in X$$

اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ متمم $\tilde{A}$ را با $\bar{\tilde{A}}$ نمایش می دهیم با تابع عضویت

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad \forall x \in X$$

تعریف ٥.٢.١. اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت یک مجموعه فازی با توابع عضویتی به شکل

زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max\,[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X$$

و

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min\,[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X$$

تعریف ۶.۲.۱. الف: ضرب جبری دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$(\tilde{A}.\tilde{B})(x) = \tilde{A}(x)\tilde{B}(x), \qquad x \in X$$

ب: جمع جبری یا احتمالی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$(\tilde{A}+\tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x)\tilde{B}(x), \qquad x \in X$$

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید $X = [۰, \infty]$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ می باشد بر حسب ساعت. اگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیانگر طول عمر کم و $\tilde{B}$ بیانگر طول عمر حدودا ۱۰۰۰ ساعت با توابع عضویت زیر باشند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{۱۵۰۰-x}{۱۵۰۰} & x < ۱۵۰۰ \\ ۰ & x \geq ۱۵۰۰ \end{cases}$$

و

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-۸۰۰}{۱۲۰۰} & ۸۰۰ \leq x < ۱۰۰۰ \\ \frac{۱۲۰۰-x}{۱۲۰۰} & ۱۰۰۰ \leq x < ۱۲۰۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

در نتیجه ،

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{۱۵۰۰-x}{۱۵۰۰} & ۰ \leq x < ۸۸۲/۴ \\ \frac{x-۸۰۰}{۲۰۰} & ۸۸۲/۴ \leq x < ۱۰۰۰ \\ \frac{۱۲۰۰-x}{۲۰۰} & ۱۰۰۰ \leq x < ۱۵۰۰ \\ \frac{۱۵۰۰-x}{۱۵۰۰} & ۱۱۵۳/۸ \leq x < ۱۵۰۰ \\ ۰ & ۱۵۰۰ \leq x < ۱۵۰۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

می باشد.

افراز فازی

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X یک مجموع مرجع باشد و $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$ برای هر $\tilde{A}_i$ که $(\tilde{A}_i \neq X, \emptyset)$ مجموعه های فازی از X باشند،به قسمی که برای هر $x \in X$ ، $\sum_{i=۱}^{n} A_i(x) = ۱$ باشد، یعنی در شرط تعامد صدق کند. در این صورت می گوییم مجموعه های فازی $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$ یک افراز فازی برای X تشکیل می دهند.

۲.۲.۱ α− برش ها

تعریف ۹.۲.۱. مجموعه همه اعضایی از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α به طوری که $0 \leq \alpha \leq 1$ می باشد، α− برش $\tilde{A}$ یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$ می گوییم و آن را با نماد $\tilde{A}_\alpha$ نشان می دهیم. بدیهی است که $\tilde{A}_\alpha$ خود یک مجموعه غیر فازی به صورت زیر می باشد:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

هرگاه نامساوی بالا به صورت اکیدا باشد،α− برش $\tilde{A}$ را α− برشی قوی می نامیم.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, ...\}$ مجموع مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\tilde{A} = \{\frac{1}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4}\}$$

در این صورت چند α− برش A عبارتند از

$$\tilde{A}_{0/2} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \tilde{A}_{0/6} = \{0, 1, 2\} \quad \tilde{A}_{0/85} = \{0\}$$

قضیه ۱۱.۲.۱. الف : خانواده $\{(\tilde{A}_\alpha \mid \alpha \in [0, 1])\}$ یکنواست، یعنی

$$\forall 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1 \quad \Longrightarrow \tilde{A}_\beta \subseteq \tilde{A}_\alpha$$

ب :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A}_\beta \subseteq \tilde{A}_\alpha \quad \alpha \in [0, 1]$$

ج:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha \quad (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha$$

اتحاد تجزیه

قضیه ۱۲.۲.۱. هر مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ را می توان بر حسب مجموعه های تراز آن تجزیه کرد به طوری که ،

$$A = \cup_\alpha \alpha \tilde{A}_\alpha \qquad \alpha \in [0, 1]$$

که در برخی متون از جمله کلیر و یان در [1] (۱۹۹۵) به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = sup_{0 \leq \alpha \leq 1}\{\alpha : x \in \tilde{A}\alpha\}$$
$$= sup_{0 \leq \alpha \leq 1}\{\alpha : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$
$$= sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{\tilde{A}_\alpha}(x)$$

که در آن $I_{\tilde{A}_\alpha}(x)$ تابع نشانگر مجموعه تراز $\tilde{A}_\alpha$ می باشد. از اتحاد تجزیه نه تنها برای تجزیه یک مجموعه فازی به دنباله ای از مجموعه های معمولی می توان استفاده کرد، بلکه بر عکس برای ترکیب دنباله ای از مجموعه های معمولی و بدست

[1] Klir and Yuan

آوردن یک مجموعه فازی نیز می توان استفاده نمود.

مجموعه فازی محدب

مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب می گویند اگر $\tilde{A}_\alpha$ به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ محدب باشد.به طور معادل می توان گفت $\tilde{A}$، یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)) \qquad \lambda \in [0,1]$$

۳.۲.۱ اصل گسترش

اصل گسترش یکی از اصول اساسی نظریه مجموعه های فازی و ابزاری مناسب برای تعمیم مفاهیم و ساختارهای ریاضیات کلاسیک به ریاضیات فازی است. این اصل توسط زاده [۲](۱۹۷۵) معرفی شد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید f تابعی به صورت $f : X \longrightarrow Y$ باشد، در این صورت به هر x متعلق به X نقطه ای از Y را نسبت می دهد. اگر بخواهیم f را طوری گسترش دهیم که بجای اثر بر یک نقطه از X بر زیر مجموعه فازی از X عمل کند، انتظار داریم که $f(\tilde{A})$ یعنی حاصل عمل f بر مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، دیگر تنها یک نقطه از Y نباشد بلکه زیر مجموعه فازی از Y مانند $\tilde{B}$ باشد. این حقیقت را اصل گسترش می گویند. طبق این اصل مجموعه فازی $\tilde{B}$ اینگونه تعریف می شود.

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x), x \in X\}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = sup_{x=f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

یکی از کاربرد های اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع، تفریق و ضرب برای اعدادی که اعداد فازی نامیده می شوند که در ادامه مطلب تعریف می کنیم.

مثال ۱۴.۲.۱. فرض کنید $X = Y = Z$ و $f : X \longrightarrow Y$ با ضابطه $f(x) = 2x$ تعریف شود. اگر A مجموعه اعداد فرد مثبت باشد، یعنی $A = \{1, 3, 5, ...\}$ ، آنگاه

$$f(A) = \{f(a) \in Y \mid a \in A\} = \{2, 6, 10, 14, ...\}$$

اکنون فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر اعداد تقریبا ۵ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A} = \{\frac{0/4}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/4}{7}\}$$

آنگاه طبق اصل توسیع

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{\frac{0/4}{6}, \frac{0/7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/4}{14}\}$$

حالت کلی اصل توسیع

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید $X_1, X_2 ..., X_n$ n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times X_2 ... \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آنها باشد. همچنین $(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n)$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, ..., X_n$ باشند. به علاوه $y = f(x_1, ..., x_n)$ یک نگاشت

[۲] Zadeh

از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ به صورت مجموع فازی $\tilde{B}$ از Y با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$\tilde{B}(y) = f(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n)(y)$$
$$= \begin{cases} sup_{y=f(x_1,...,x_n)} min\{\tilde{A}_1(x_1), ..., \tilde{A}_1(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

۴.۲.۱ انواع توابع عضویت

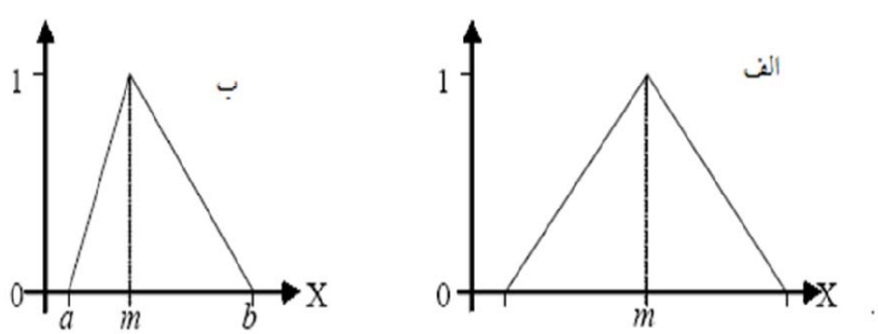
تعریف ۱۶.۲.۱. بر حسب توابع عضویت، انواع متفاوتی از مجموعه های فازی بدست می آید. زاده (۱۹۶۲) یک سری از توابع عضویت را پیشنهاد کرد که می توان آن را در دو گروه تقسیم بندی کرد الف: دسته ای که بر اساس خط های مستقیم ساخته می شود.
ب: دسته ای که به فرم های نرمال یا منحنی وار هستند.

توابع عضویت مثلثی

تعریف ۱۷.۲.۱. تابع عضویت مثلثی شکل، یک تابع به شکل زیر می باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & x \in (a, m] \\ \frac{b-x}{b-m} & x \in (m, b] \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

که در آن a حد پایین،b حد بالا و m را نما یا مقدار متوسط معرفی می کنیم که $a < m < b$ می باشد. اگر مقدار پهنا یعنی $b - m$ با $m - a$ مساوی باشند آن را مثلثی متقارن می گوییم. شکل الف، یک تابع عضویت مثلثی متقارن و شکل ب یک تابع عضویت مثلثی غیر متقارن را نشان می دهد.



شکل ۱.۱: نمودار تابع عضویت مثلثی

۵.۲.۱ اعداد فازی

مجموعه فازی $\tilde{N}$ از R را یک عدد فازی می گوییم، هرگاه

الف: تک نمایی باشد، یعنی یک و دقیقا یک $x_\circ \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_\circ)=1$

ب: $\alpha-$ برش های $\tilde{N}$ برای هر $\alpha \in (0,1]$ به صورت بازه های بسته باشند.

مثال ۱۸.۲.۱. مجموعه فازی L با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می توان L را یک مدل برای عدد فازی " تقریبا صفر " تعبیر کرد.

$$L(x)=1-\mid x\mid \qquad -1\leq x\leq 1$$

اعداد فازی LR

تعریف ۱۹.۲.۱. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد،

$$N(x)=\begin{cases} L(\frac{m-x}{a}) & x\leq m \\ R(\frac{x-m}{b}) & x>m \end{cases}$$

که در آن L و R توابع غیر نزولی از R^+ به $[0,1]$ می باشند که $L(0)=R(0)=1$. در این صورت عدد فازی LR را با نماد

$$N(m,a,b)_{LR}$$

نشان می دهیم که m نما و a و b پهنای چپ و راست N هستند. توابع رایج برای L و مشابها R عبارتند از

$$L(x)=max\{0,1-\mid x\mid^p\}$$

$$L(x)=1-\mid x\mid^p$$

$$L(x)=\frac{1}{1+\mid x\mid^p}$$

که $p>0$ می باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. اگر در عدد فازی LR، $L=R$ آنگاه

الف: N را یک عدد فازی مثلثی می گوییم و با نماد $N(m,a,b)_T$ نشان می دهیم اگر L را به فرم $L(x)=max\{0,1-\mid x\mid\}$ تعریف کنیم.

ب: N را یک عدد فازی نرمال می گوییم و با $N(m,a,b)_N$ نمایش می دهیم، اگر $L(x)=exp(-x^2)$ باشد.

ج: N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N(m,a,b)_P$ نشان می دهیم اگر $L(x)=max\{0,1-x^2\}$ باشد.

د: برای هر عدد فازی N اگر $a=b$ باشد آنگاه N را یک عدد فازی متقارن می نامیم و با نماد $N=(m,a)_T$ نشان می دهیم.

فرض کنید N یک عدد فازی متقارن LR و $L(x)=R(x)=exp(-x^2)$ و $m=0$ و $a=b=1$، در این صورت

$$N(x)=\begin{cases} L(\frac{0-x}{1})=exp(-x^2) & x\leq 0 \\ R(\frac{x-0}{1})=exp(-x^2) & x>0 \end{cases}$$

می باشد، یعنی $x\in R$ است.