بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

همریختی‌های فشرده روی جبرهای لیپ‌شیتس از توابع مشتق‌پذیر

توسط
آسیه شادمهری مطلق

استاد راهنما
دکتر مرتضی ابطحی ایوری

استاد مشاور
دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان

اسفندماه ۱۳۹۰

به نام خدا

همریختی‌های فشرده روی جبرهای لیپ‌شیتس از توابع مشتق‌پذیر

توسط

آسیه شادمهری مطلق

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **خوب**

دکتر مرتضی ابطحی ایوری استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر طاهر قاسمی هنری استاد ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم تهران (داور اول)

دکتر علی تقوی استادیار ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

به پاس

تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی.

عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران

بهترین پشتیبان است.

قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان

به شجاعت می گراید.

محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

و دعاهای نجیبانه شان که قوت قلب و باارزش ترین سرمایه زندگیست.

سپاسگزاری

سپاس مخصوص پروردگاری است که می خوانیمش، از تاریکی های پندار، برون‌مان آرد. به روشنایی فهم، بزرگیمان بخشد. درب های رحمتش را بر رویمان بگشاید و گنجینه های دانشش را فرارویمان بگستراند.

اکنون که به لطف یکتای بی همتا موفق به اتمام این مقطع تحصیلی گشته‌ام، از کلیه عزیزانی که در این مسیر یاریم نمودند تشکر می نمایم.

در آغاز، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا می ستایمشان و از این دو وجود مقدس که یگانه آموزگارانی هستند که برایم، زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند و در حضورشان لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام زیبایی‌های زندگیم را تجربه نمودم، سپاسگزاری می نمایم.

لازم می دانم مراتب سپاس و قدردانی خود را خدمت استاد راهنمای گرانقدرم دکتر مرتضی ابطحی که رهنمودهای ایشان در نگارش این پایان نامه مؤثر بوده است، ابراز نمایم. صمیمانه از استاد مشاور فرزانه‌ام، دکتر غلامرضا عباسپور که در زمان تحصیل از چشمه جوشان دانش و اخلاق والاایشان بهره‌مند گشته‌ام، تشکر می نمایم. از اساتید بزرگوار دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر علی تقوی که زحمت مطالعه و بازخوانی این پایان نامه را جهت داوری بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اساتید دانشکده ریاضی که در این مدت افتخار شاگردیشان را داشتم، همچنین از استاد و سرور گرامی دکتر نیما قلعه قدردانی می نمایم.

آسیه شادمهری مطلق

اسفندماه ۹۰

چکیده

همریختی‌های فشرده روی جبرهای لیپ‌شیتس از توابع مشتق‌پذیر

به وسیله‌ی:
آسیه شادمهری مطلق

فرض کنیم X یک مجموعه فشرده و کامل در صفحه مختلط باشد و $0 < \alpha \leq 1$. جبر لیپ‌شیتس از مرتبه α که با $\mathrm{Lip}(X, \alpha)$ نمایش می‌دهیم، جبر همه توابع مختلط مقدار f روی X باشرط

$$p_\alpha(f) = \sup\Big\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^\alpha} : z, w \in X, z \neq w \Big\} < \infty.$$

می‌باشد. جبر همه توابع مختلط مقدار f روی X که مشتقات آن از هر مرتبه‌ای موجود است و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f^{(n)} \in \mathrm{Lip}(X, \alpha)$ را با $\mathrm{Lip}^\infty(X, \alpha)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم (M_n) یک دنباله از اعداد مثبت باشد به طوری که در شرایط $M_0 = 1$ و $\frac{M_{n+m}}{M_n M_m} \geq \frac{(n+m)!}{n!m!}$، برای هر m و n صدق کند. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Lip}(X, M, \alpha) = \Big\{ f \in \mathrm{Lip}^\infty(X, \alpha) : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}\|_\alpha}{M_k} < \infty \Big\},$$

که در آن $\|f\|_\alpha = \|f\|_X + p_\alpha(f)$ است.

هرگاه $\mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ و $\mathrm{Lip}(Y, M, \alpha)$ جبرهای تابعی طبیعی باشند، برای هر همریختی ناصفر $T : \mathrm{Lip}(X, M, \alpha) \to \mathrm{Lip}(Y, M, \alpha)$ یک نگاشت $\varphi : Y \to X$ موجود است، به طوری‌که $Tf = f \circ \varphi$. در این پایان‌نامه همریختی های بین این نوع جبرهای لیپ‌شیتس را مطالعه می کنیم و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آنها φ یک همریختی از $\mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ به $\mathrm{Lip}(Y, M, \alpha)$ القا کند، بخصوص شرایط لازم و

کافی را برای این‌که درونریختی‌های القا شده فشرده باشند را بررسی می‌کنیم و سپس به مشخص سازی طیف درونریختی‌های فشرده از جبرهای $\mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ می‌پردازیم.
واژه‌های کلیدی: درونریختی‌های فشرده، جبرهای لیپ‌شیتس، طیف، جبرهای باناخ طبیعی.
رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46J10 و 46J15 .

فهرست مطالب

پیشگفتار

جبرهای لیپ‌شیتس از توابع مشتق‌پذیر روی مجموعه‌های فشرده و کامل X در صفحه مختلط برای اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط هنری و ماهیار ارائه شد [۱۷]. در این پایان نامه به بررسی همریختی‌های فشرده بین این نوع جبرهای لیپ‌شیتس می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا جبرهای لیپ‌شیتس را معرفی می‌کنیم و شرایطی را که این جبرها، کامل و همچنین طبیعی باشند، بیان می‌نماییم. سپس به بررسی همریختی‌ها روی جبرهای لیپ‌شیتس پرداخته و شرایط لازم و کافی را برای این‌که همریختی‌ها فشرده باشند، بیان می‌نماییم.

این پایان نامه شامل ۴ فصل است.

در فصل اول، مفاهیم مقدماتی نظیر توپولوژی، فضاهای باناخ، جبرهای باناخ و فضای ایده‌آل ماکسیمال برای یک جبر (تابعی) باناخ را یادآوری می‌کنیم.

فصل دوم شامل سه بخش می‌باشد: در بخش اول، عملگرهای فشرده روی فضاهای باناخ را معرفی و برخی قضیه های مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در بخش دوم، ابتدا همریختی ها روی جبرهای تابعی را معرفی می‌نماییم، سپس قضیه مشخص سازی همریختی های فشرده روی جبرهای تابعی را بیان و اثبات می‌نماییم.

هرگاه A و B جبر تابعی باناخ با فضای ایده آل ماکسیمال $\mathcal{M}(A)$ و $\mathcal{M}(B)$ باشند، همریختی $T : A \to B$ را القا شده توسط نگاشت $\varphi : \mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$ گوییم هرگاه

$$\widehat{Tf} = \hat{f} \circ \varphi \qquad (f \in A).$$

در حالتی که A و B جبرهای تابعی باناخ طبیعی باشند، همریختی القا شده $T : A \to B$ که در رابطه بالا صدق کند، به صورت زیر می‌باشد.

$$Tf = f \circ \varphi \qquad (f \in A).$$

($\mathcal{M}(A)$ فضای ایده‌آل ماکسیمال A است.) و چنان‌چه $A = B$ نگاشت T درونریختی القا شده توسط φ نامیده می‌شود. در بخش سوم، جبر نرم‌دار $D^{۱}(X)$ را روی مجموعه فشرده و کامل X معرفی نموده و برای یک جبر تابعی طبیعی B که $B \subseteq D^{۱}(X)$ طیف درونریختی‌های فشرده $T : B \longrightarrow B$ را بررسی می‌کنیم.

فصل سوم شامل سه بخش می‌باشد: در بخش اول، ابتدا X را یک مجموعه فشرده و کامل در صفحه مختلط در نظر می‌گیریم، سپس به معرفی جبر تابعی $D^n(X)$ متشکل از همه توابع مختلط مقدار روی X که دارای مشتق مرتبه n ام پیوسته روی X است، می‌پردازیم و شرایطی را بیان می‌کنیم که $D^n(X)$ تحت نرمش کامل است. سپس برای یک دنباله جبری $M = (M_n)$ جبر $D(X, M)$ متشکل از توابع بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$D(X, M) = \Big\{ f \in D^{\infty}(X) : \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}\|_X}{M_n} < \infty \Big\}.$$

در بخش دوم، ابتدا جبرهای لیپ‌شیتس از توابع مشتق‌پذیر $\mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ را روی مجموعه فشرده و کامل X تعریف کرده سپس به ارائه برخی زیرجبرهای آن پرداخته، شرایط کامل بودن و همچنین طبیعی بودن این جبرهای لیپ‌شیتس را بیان می‌نماییم. در بخش سوم، شرایط کافی را برای این که نگاشت $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک همریختی $T : \mathrm{Lip}(Y, M, \alpha) \to \mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ القا کند، بیان می‌کنیم.

فصل چهارم شامل چهار بخش می‌باشد: در بخش اول، شرط کافی برای این‌که نگاشت $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک درونریختی فشرده مانند $T : \mathrm{Lip}(X, M, \alpha) \to \mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ را وقتی $X = [۰, ۱]$ القا کند، بیان می‌کنیم. در بخش دوم، درحالتی که X یک مجموعه کلی باشد، شرط کافی برای این‌که $\varphi : X \longrightarrow X$ یک درونریختی فشرده مانند $T : \mathrm{Lip}(X, M, \alpha) \to \mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ را القا کند، بیان می‌کنیم.

در بخش سوم، عکس مسأله را در حالتی که X گوی واحد بسته یا دایره واحد باشد، بررسی می‌کنیم. یعنی بررسی می‌کنیم اگر $M = (M_n)$ یک دنباله غیرتحلیلی، $۰ < \alpha < ۱$ و درونریختی فشرده $T : \mathrm{Lip}(X, M, \alpha) \to \mathrm{Lip}(X, M, \alpha)$ توسط خودنگاشت $\varphi : X \to X$ القا شده باشد، آنگاه $|\varphi'(z)| < ۱$ هرگاه حداقل یکی از شرایط مورد نظر را داشته باشد.

در بخش چهارم، وقتی که X یک مجموعه منظم یکنواخت و جبرهای لیپ‌شیتس طبیعی باشند، به بررسی طیف درونریختی های فشرده روی جبرهای لیپ‌شیتس می‌پردازیم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی ذیل تدوین شده است.

H. Mahyar, Compact endomorphisms of infinitely differentiable Lipschitz algabras, Rocky Mountain Journal of Mathematics. 39, (2009), 193-217.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به بیان مطالب مقدماتی و پایه‌ای می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که انتظار می‌رود خواننده با این مطالب آشنایی داشته باشد از بیان اثبات‌ها و جزئیات خودداری می‌کنیم. این مطالب برگرفته از منابع [۷]، [۱۵]، [۱۶]، [۲۴] و [۲۷] می‌باشد.

نمادگذاری. در سراسر این پایان‌نامه خط حقیقی را با $\mathbb{R}$ و صفحه مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه قرار می‌دهیم

$$\mathbb{I} = [0, 1], \qquad \mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \qquad \mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

۱.۱ فضاهای توپولوژیک و فضاهای متری

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. یک توپولوژی روی X خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند τ است که به آنها مجموعه‌های باز می‌گوییم و دارای خواص زیر می‌باشد:

۱. $\emptyset, X \in \tau$.

۲. τ تحت اجتماع دلخواه بسته است به این معنی که اگر $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ یک خانواده از مجموعه‌ها در τ باشد آنگاه $\bigcup U_\alpha \in \tau$.

۳. τ تحت اشتراک متناهی بسته است به این معنی که اگر $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

مجموعه X مجهز به توپولوژی τ را یک فضای توپولوژیک می‌گوییم و آن را با (X, τ) نمایش می‌دهیم. زیر مجموعه A از X یک مجموعه بسته نام دارد، هرگاه $X \setminus A$ باز باشد.

معمولا دو فضای توپولوژیک از لحاظ ضعیف یا قوی بودن یک توپولوژی نسبت به دیگری مورد توجه می‌باشد. اگر τ و τ' دو توپولوژی روی X باشد، گوییم τ' ضعیف‌تر از τ است، هرگاه $\tau' \subset \tau$. در این‌حالت τ را قوی‌تر از τ' می‌نامیم.

همان‌طور که بیان شد عناصر یک فضای توپولوژیک مجموعه های بازند. گوییم $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ یک پایه فضای توپولوژیک (X, τ) است، هرگاه

۱. به ازای هر $x \in X$ حداقل یک عضو $B \in \mathfrak{B}$ موجود باشد به طوری که $x \in B$.

۲. اگر $B_۱, B_۲ \in \mathfrak{B}$ و $x \in B_۱ \cap B_۲$ باشد، آن‌گاه عضوی از پایه مانند $B_۳$ وجود دارد به طوری‌که $x \in B_۳$ و $B_۳ \subset B_۱ \cap B_۲$.

در قضیه‌ی زیر رابطه بین یک توپولوژی و پایه این توپولوژی بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱. *[24, Lemma 2.13.1] فرض کنیم $\mathfrak{B}$ یک پایه برای توپولوژی τ در X باشد. در این‌صورت τ برابر گردایه تمام اجتماع های اعضای $\mathfrak{B}$ است. یعنی $U \in \tau$ اگر و تنها اگر U اجتماعی از اعضای پایه $\mathfrak{B}$ باشد.*

فرض کنیم X یک مجموعه و خانواده $\mathcal{G}$ از زیر مجموعه‌های X چنان باشد که $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G = X$. اگر $\mathfrak{B}$ خانواده متشکل از همه اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathcal{G}$ باشد، آن‌گاه $\mathfrak{B}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهد. در این‌حالت به $\mathcal{G}$ یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی X گویند.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. هر مجموعه باز شامل x یک همسایگی x نام دارد. اگر $A \subset X$ باشد، گوییم x یک نقطه درونی A است، هرگاه A شامل یک همسایگی از x باشد. مجموعه همه نقاط درونی A را با A° نشان می‌دهیم و می‌توان ثابت کرد A° بزرگترین زیر مجموعه باز A است. گوییم x نقطه انباشتگی A است اگر برای هر همسایگی U از x مجموعه $A \cap U \setminus \{x\}$ ناتهی باشد. اجتماع A با نقاط انباشتگی A را با $\overline{A}$ نشان می‌دهیم و به آن بستار A گوییم. ثابت می‌شود $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A است.

دنباله $\{x_j\}$ در فضای توپولوژیک مانند X به $x \in X$ همگراست $(x_j \to x)$، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x عددی مانند J موجود باشد به طوری که به ازای هر $j > J$ ، $x_j \in U$.

یادآوری می‌کنیم مجموعه $\mathcal{I}$ یک مجموعه جهت‌دار است، هرگاه مجهز به یک رابطه‌ی دوتایی مانند $\leq$ باشد، به طوری‌که

۱. به ازای هر $\alpha \in \mathcal{I}$، $\alpha \leq \alpha$.

۲. اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آن‌گاه $\alpha \leq \gamma$.

۳. به ازای هر α,β از $\mathcal{I}$ عضوی مانند γ از $\mathcal{I}$ وجود داردبه طوری‌که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

یک تور در مجموعه X نگاشتی مانند $\alpha \mapsto x_\alpha$ از یک مجموعه‌ی جهت‌دار مانند $\mathcal{I}$ بتوی X است. اگر $\mathcal{I}$ معلوم باشد، چنین نگاشتی را با $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ یا $\{x_\alpha\}$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم $\{x_\alpha\}$ با $\mathcal{I}$ اندیس‌گذاری شده است.

فضاهای توپولوژیک برای معرفی مفهوم پیوستگی بسیار مناسب می‌باشد. گوییم نگاشت f از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y پیوسته است، هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز مانند V در Y، مجموعه $f^{-1}(V)$ در X باز باشد. اگر $x \in X$ باشد، f در x پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به طوری که $f(U) \subset V$. به طور معادل، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$، $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x باشد. طبق گزاره‌های ۴.۸ و ۴.۹ از مرجع [۱۴] نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در هر $x \in X$ پیوسته باشد. چنانچه توپولوژی روی Y با خانواده‌ای از مجموعه‌ها مانند $\mathcal{G}$ تولید شود، آن‌گاه $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $V \in \mathcal{G}$، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

توپولوژی ضعیف. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و $\{(Y_\alpha,\tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. فرض کنیم برای هر $\alpha \in \mathcal{I}$، $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ یک تابع باشد و $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in I\}$. کوچک‌ترین (ضعیف‌ترین) توپولوژی روی X که $f_\alpha \in \mathcal{F}$ پیوسته باشد، به توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\mathcal{F}$ معروف است و به آن $\mathcal{F}$ -توپولوژی گویند. در واقع $\mathcal{F}$ -توپولوژی روی X همان توپولوژی تولید شده توسط گردایه زیر از زیر مجموعه های X است.

$$\mathcal{A} = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}\}.$$

مهمترین مثال از این ساختار، توپولوژی حاصلضربی روی حاصلضرب دکارتی فضاهای توپولوژیک است. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، توپولوژی حاصلضربی روی $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{I}} X_\alpha$ توپولوژی ضعیف تولید شده توسط نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ است.

اکنون به بیان مفهوم فشردگی در فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $K \subset X$. خانواده $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ از زیر مجموعه های باز X یک پوشش باز برای K تشکیل می‌دهد اگر $K \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. گوییم $\mathcal{G}$ دارای یک زیر پوشش متناهی برای K است، اگر وجود داشته باشد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathcal{I}$ به طوری که $K \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$. گوییم مجموعه K در X فشرده است، هرگاه هر پوشش باز برای K دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

قضیه زیر شرط معادل برای فشردگی K را بیان می‌کند. ابتدا یادآوری می‌کنیم خانواده $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ از زیر مجموعه های X دارای خاصیت اشتراک متناهی است، هرگاه برای هر تعداد متناهی اندیس $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{I}$ داشته باشیم

$$F_{\alpha_۱} \cap F_{\alpha_۲} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset.$$

قضیه ۲.۱.۱. *[24, Theorem 3.26.9] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، در این‌صورت X فشرده است، اگر و تنها اگر برای هر خانواده $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ از زیر مجموعه های بسته X که در خاصیت اشتراک متناهی صدق می‌کند، داشته باشیم $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$.*

یکی دیگر از مفاهیمی که در فضاهای توپولوژیکی بیان می‌شود و مورد استفاده ما نیز می‌باشد، مفهوم همبندی است. فضای توپولوژیکی (X, τ) را همبند گوییم، هرگاه نتوان دو زیرمجموعه بسته ناتهی جدا از هم در آن یافت به طوری که اجتماع آنها برابر با X باشد. همچنین بزرگترین زیر مجموعه همبند در فضای توپولوژیک A را مولفه همبند گویند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، زیرمجموعه $K \subset X$ را محدب گوییم، هرگاه

$$tK + (۱ - t)K \subset K, \qquad (t \in [۰, ۱]).$$

به عبارت دیگر

$$tx + (۱ - t)y \in K, \qquad (t \in [۰, ۱], x, y \in K).$$

تعریف ۴.۱.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای هاسدورف [۱] گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $x_۱, x_۲$ مجموعه های جدا از هم مانند $U_۱, U_۲$ به ترتیب شامل $x_۱, x_۲$ موجود باشد.

دسته‌ای مهم از فضاهای هاسدروف، فضاهای متری هستند. یادآوری می‌کنیم یک متر روی مجموعه غیر تهی X تابعی است مانند $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ که برای هر $x, y, z \in X$ در خواص زیر صدق کند:

۱. $d(x, y) \geqslant ۰$ و $d(x, y) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۲. $d(x, y) = d(y, x)$.

۳. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ که به آن نامساوی مثلثی گویند.

---

[۱] Hausdorff Space

مجموعه X مجهز به متر d را یک فضای متری می‌نامیم و آن را با (X,d) نشان می‌دهیم. به عنوان مثال فرض کنیم $X=\mathbb{R}^n$. در این صورت $\mathbb{R}^n$ مجهز به متر اقلیدسی

$$d(x,y)=\sqrt{(x_۱-y_۱)^۲+\cdots+(x_n-y_n)^۲}$$

یک فضای متری می باشد.

همان طور که گفتیم هر فضای متری (X,d) یک فضای توپولوژیک است به این ترتیب که زیر مجموعه U از X باز است، اگر برای هر $a\in U$ عدد مثبت r یافت شود به طوری که

$$B(a,r)=\{x\in X:d(a,x)<r\}\subset U.$$

فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در X باشد. گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا به $x\in X$ است، هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$، عددی طبیعی مانند $n_۰$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$n\geq n_۰\Longrightarrow d(x_n,x)<\varepsilon.$$

در این صورت می‌نویسیم $x_n\longrightarrow x$ یا $x=\lim x_n$. به علاوه دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را کوشی نامیم ، هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$ وجود داشته باشد $n_۰\in\mathbb{N}$ به قسمی که

$$m,n\geq n_۰\Longrightarrow d(x_m,x_n)<\varepsilon.$$

به آسانی می‌توان دید هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است اما عکس این مطلب درست نیست، یعنی فضاهای متری وجود دارد که دنباله‌های کوشی در آن همگرا نیستند.

فضای متریک (X,d) کامل نامیده می‌شود، هرگاه هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x\in X$ همگرا باشد. به عنوان مثال $\mathbb{R}^n$ مجهز به متر اقلیدسی یک فضای متری کامل است، در حالی که بازه $X=(۰,۱)$ مجهز به متر $d(x,y)=|x-y|$ فضای متری کامل نیست. مثلا $\{\frac{۱}{n}\}$ یک دنباله کوشی در $(۰,۱)$ است که در آن همگرا نیست.

۲.۱ آنالیز مختلط

در این بخش به بیان تعاریف و قضایایی از مباحث آنالیز مختلط که در فصل‌های سوم و چهارم مورد نیاز می‌باشد، می‌پردازیم. در این پایان‌نامه صفحه مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. زیر مجموعه‌ی D از صفحه مختلط یک دامنه نام دارد، اگر D باز و همبند باشد. ثابت می‌شود در هر دامنه D هر دو نقطه از D به وسیله‌ی پاره خط‌های واقع در D و موازی محورهای مختصات قابل اتصال می‌باشد. به

عنوان مثال هر گوی باز در صفحه یک دامنه است، نیم صفحه بالایی و پایینی صفحه مختلط هر کدام یک دامنه تشکیل می‌دهد. به عنوان مثالی از یک مجموعه باز که دامنه نیست، می‌توان به صفحه مختلط $\mathbb{C}$ بدون خط حقیقی (یعنی $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) اشاره کرد.

فرض کنیم D یک دامنه و $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع باشد. گوییم تابع f در نقطه $z_\circ \in D$ مشتق‌پذیر است، هرگاه

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \tag{۱.۱}$$

موجود باشد. در این‌صورت $f'(z_\circ)$ را مشتق f در $z_\circ$ گوییم. چنانچه مشتق تابع $f(z)$ در هر نقطه از دامنه D موجود باشد، گوییم f بر D مشتق‌پذیر است. چنانچه f بر D مشتق‌پذیر و $f'(z)$ بر D پیوسته باشد، گوییم f بر D تحلیلی است. البته ثابت می‌شود هرگاه f بر D مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f از هر مرتبه بر D مشتق پذیر است و بنابراین شرط پیوستگی f' در تعریف تابع تحلیلی شرط اضافی است (قضیه کوشی-گورسا [۲]).

در قضیه تیلور ثابت می‌شود اگر f بر قرص باز $D = \{ z : |z - z_\circ| < \rho\}$ تحلیلی باشد، در این‌صورت f دارای نمایش سری توانی

$$f(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k (z - z_\circ)^k \qquad (|z - z_\circ| < R) \tag{۲.۱}$$

می‌باشد، که در آن

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_\circ)}{k!}, \qquad (k \geq \circ).$$

در این باره به صفحه ۱۴۴ مرجع [۱۵] مراجعه کنید.

فرض کنیم D یک دامنه در $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک مسیر هموار در D یک تابع $\gamma : [a, b] \to D$ است به طوری که $\gamma' : [a, b] \to D$ موجود و پیوسته باشد. هرگاه γ یک مسیر هموار در D باشد و $f : D \to \mathbb{C}$ پیوسته باشد، انتگرال مسیری f روی γ به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \tag{۳.۱}$$

هرگاه D یک دامنه کران‌دار در صفحه مختلط باشد، گوییم D دارای مرز تکه‌ای هموار است، هرگاه ∂D (مرز D) اجتماع تعداد متناهی مسیرهموار باشد.

---
[۲] Cauchy-Goursat Theorem

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه کوشی [۳]). *[15, p.110] فرض کنیم D یک دامنه کران‌دار با مرز تکه‌ای هموار ∂D باشد. هرگاه f یک تابع تحلیلی بر $D \cup \partial D$ باشد، آن گاه*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = ۰. \tag{۴.۱}$$

قضیه ۲.۲.۱ (فرمول انتگرال کوشی [۴]). *[15, p.113] فرض کنیم D یک دامنه کران‌دار با مرز تکه‌ای هموار ∂D باشد. هرگاه f یک تابع تحلیلی بر $D \cup \partial D$ باشد، آن‌گاه*

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw, \qquad (z \in D). \tag{۵.۱}$$

اهمیت فرمول انتگرال کوشی آنجا است که بیان می‌کند می‌توان مقادیر تابع تحلیلی f در نقاط درونی D را توسط مقادیر f بر مرز D تعیین کرد. یعنی اگر ضابطه f بر ∂D معلوم باشد، آن‌گاه مقادیر f درنقاط درون D قابل محاسبه است. حال از طرفین رابطه (۵.۱) نسبت به z مشتق‌گیری می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$، نتیجه می‌شود

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{۲\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+۱}}dw. \tag{۶.۱}$$

از فرمول اخیر می‌توان استفاده کرد و تخمینی برای $|f^{(n)}(z)|$ بدست آورد.

قضیه ۳.۲.۱ (تخمین کوشی [۵]). *[15, p.118] فرض کنیم $f(z)$ بر قرص بسته $D = \{z : |z - z_۰| \leq \rho\}$ تحلیلی باشد. اگر برای $|z - z_۰| = \rho$ داشته باشیم $|f(z)| \leq M$، آن‌گاه*

$$\left|f^{(m)}(z_۰)\right| \leq \frac{m!}{\rho^m}M, \qquad (m \geq ۰). \tag{۷.۱}$$

به عنوان نتیجه‌ای از تخمین کوشی می‌توان قضیه زیر را که معروف به قضیه لیوویل [۶] است و کاربرد فراوانی در آنالیز مختلط و جبرهای باناخ مختلط دارد، اثبات نمود.

قضیه ۴.۲.۱ (قضیه لیوویل). *[15, p.118] هرگاه تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی و کراندار باشد، آن‌گاه f تابع ثابت است.*

---

[۳] Cauchy Theorem

[۴] Cauchy Integral Formula

[۵] Cauchy's Estimate

[۶] Liouville's Theorem

۳.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی و فضاهای باناخ

فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. همچنین فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک هم باشد. در این صورت گوییم τ یک توپولوژی برداری روی X است و گوییم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیکی است اگر

۱. تک نقطه‌ها در (X,τ) بسته باشد. یعنی برای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ نسبت به توپولوژی τ یک مجموعه بسته باشد.

۲. عمل جمع برداری $X \times X \longrightarrow X$ که $(x,y) \longmapsto x+y$ پیوسته باشد.

۳. عمل ضرب اسکالر $\mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ که $(\alpha,x) \longmapsto \alpha x$ پیوسته باشد.

دسته‌ای مهم از فضاهای برداری توپولوژیک فضاهای نرم‌دار می‌باشد. ابتدا یادآوری می‌کنیم یک نرم روی فضای برداری X تابعی است مانند $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ که برای هر $x,y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صادق باشد.

۱. $x = ۰$ اگر و فقط اگر $\|x\| = ۰$

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۳. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد آنگاه به $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار می‌گوییم.

نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری X و Y را یک عملگر خطی گوییم اگر

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \qquad (x,y \in X, \alpha \in \mathbb{C}).$$

چنانچه $T : X \to \mathbb{C}$ یک عملگر خطی باشد به T یک تابعک خطی روی X گوییم.

حال فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant ۱\}.$$

گوییم T کراندار است اگر $\|T\| < \infty$. در این حالت می‌توان مشاهده کرد:

$$\|T\| = \inf\{M > ۰ : \|Tx\| \leq M\|x\|, \quad (x \in X)\} = \sup\Big\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq ۰\Big\}. \qquad (۸.۱)$$

گزاره ۱.۳.۱. *[8, Proposition III.2.1] فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. آن‌گاه شرایط زیر باهم معادلند:*

۱. *T پیوسته است.*

۲. *T در یک نقطه از X پیوسته است.*

۳. *T در $X \ni ۰$ پیوسته است.*

۴. *T کران‌دار است.*

در ادامه به معرفی بیشتر فضاهای باناخ، که در بحث آنالیز تابعی از اهمیت بالایی برخوردار است، می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم چنانچه $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد متر القا شده توسط نرم $\|\cdot\|$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X).$$

تعریف ۲.۳.۱. فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای باناخ می‌نامیم، هرگاه $\|\cdot\|$ یک نرم کامل روی X باشد، یعنی هر دنباله کوشی نسبت به متر $d(x, y) = \|x - y\|$ یک دنباله همگرا در X باشد.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که فضای برداری X مجهز به نرم های مختلف باشد. گوییم دو نرم $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ روی فضای برداری X معادلند، هرگاه اعداد m و M موجود باشد به طوری که

$$m\|x\|_۱ \leq \|x\|_۲ \leq M\|x\|_۱ \qquad (x \in X).$$

در این‌صورت $(X, \|\cdot\|_۱)$ یک فضای باناخ است، اگر و تنها اگر $(X, \|\cdot\|_۲)$ یک فضای باناخ باشد.

مثال ۳.۳.۱. قرار می دهیم $X = \mathbb{R}^n$. در این صورت X یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{R}$ است که در آن جمع برداری و ضرب اسکالر به صورت مؤلفه ای انجام می شود. نرم های متعددی روی X تعریف می شود که از مهمترین آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد:
فرض کنیم $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_۱ &= |x_۱| + \cdots + |x_n|, \\ \|\mathbf{x}\|_۲ &= \big(|x_۱|^۲ + \cdots + |x_n|^۲\big)^{۱/۲}, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max\big(|x_۱|, \ldots, |x_n|\big). \end{aligned}$$