

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد

دانشکده فیزیک

گروه اتمی و مولکولی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

فیزیک اتمی و مولکولی

حالت‌های همدوس غیرخطی تعمیم یافته و ویژگی‌های
غیر کلاسیکی آنها

استاد راهنما: دکتر محمد کاظم توسلی

استاد مشاور: دکتر محسن حاتمی

پژوهش و نگارش: حمیده کارگریان

بهمن ماه ۱۳۸۸

تقديم به:

پدر و مادر عزيزم

قدردانی و تشکر

پس از حمد و سپاس پروردگار متعال که بدون عنایت او هیچ توفیقی دست‌یافتنی نیست، بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب از گرانمایگانی که در این راه مرا همیاری و ارشاد نمودند قدردانی کنم به ویژه از استاد گرانقدر و مهربانم جناب آقای دکتر محمد کاظم توسلی به خاطر راهنمایی‌های دلسوزانه‌اشان در کلیه مراحل انجام این پژوهش، همچنین پی‌گیری مداوم و صبورانه برای هر چه بهتر بودن این پایان‌نامه تشکر و قدردانی دارم. از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر محسن حاتمی به خاطر همراهی‌اشان و ارشادهای سودمندشان کمال امتنان را دارم.

از آقای دکتر مالک باقری که داوری خارجی این پژوهش را بر عهده داشتند، همچنین پیشنهادات ارزشمند ایشان که باعث منسجم‌تر شدن پایان‌نامه شد تشکر فراوان می‌نمایم. از آقای دکتر عباس بهجت استاد گرامی که از وجود ارزشمندشان بهره بردم و داوری داخلی این پژوهش را به‌عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کلیه اساتید بزرگوار دانشکده فیزیک به خاطر زحماتی که در طول دوره تحصیلی‌ام متقبل شدند تشکر و قدردانی می‌نمایم. لازم است از آقای دکتر هوشمند که در تهیه این مجموعه با استفاده از نرم‌افزار تک‌مرا یاری رساندند صمیمانه تشکر کنم.

همچنین از آقای غلامرضا هنرآسا به‌خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌اشان سپاس‌گزاری می‌نمایم. از همه دوستان که به نوعی مرا یاری کردند صمیمانه تشکر می‌کنم. در پایان از خانواده عزیزم که مشوق و پشتیبان من در تمام مراحل زندگی و تحصیلم بوده‌اند تشکر می‌کنم و از خداوند برای آنان سلامتی و هر آنچه خیر و نیکی است و بهترین‌ها را آرزومندم.

چکیده

در این پژوهش ابتدا حالت‌های همدوس و چلانده را به عنوان مجموعه‌ی مهمی از حالت‌های کوانتومی معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. سپس به معرفی تعمیم‌های صورت گرفته روی حالت‌های همدوس پرداخته شده است. به‌ویژه صورت‌بندی کلی حالت‌های همدوس غیرخطی که در پژوهش‌های اخیر در اپتیک کوانتومی از اهمیت به‌سزایی برخوردارند را مطرح کرده هم‌چنین چند ویژگی این دسته از حالت‌ها را نیز بررسی نموده‌ایم. روش‌های تولید حالت‌های زوج و فرد را معرفی و حالت‌های زوج و فرد متناظر با این حالت‌ها را بنا کرده‌ایم. سپس با طرح اشکالی که به حالت‌های همدوس غیرخطی با تابع غیرخطیت $f(n)$ در حالت کلی وارد است به اعمال تغییرهایی جدید روی جبر عملگر نابودی پرداخته‌ایم که موضوع اصلی این تحقیق است. به دنبال آن صورت‌بندی کلی حالت‌های متناظر با این عملگرها را از طریق رابطه‌ی ویژه‌مقداری مربوطه به‌دست آورده‌ایم. بدیهی است که این صورت‌بندی در حالت‌های خاص باید به حالت‌های همدوس استاندارد و حالت‌های همدوس غیرخطی منجر شود. حالت‌های زوج و فرد متناظر با این حالت‌ها را به همان دو روشی که در مورد حالت‌های همدوس غیرخطی ذکر کرده‌ایم، بنا نموده‌ایم و صورت‌بندی کلی این حالت‌ها را نیز ارائه کرده‌ایم. هدف اصلی این پژوهش ایجاد حالت‌هایی با در نظر گرفتن تابع غیرخطیت $f(H)$ که H هامیلتونی سامانه است و هم‌چنین تولید حالت‌های همدوس متناظر با این تغییرشکل است که ویژگی‌های غیرکلاسیکی از خود بروز دهند. برای تحقق فیزیکی صورت‌بندی‌های ارائه شده آن را بر روی تعدادی از سامانه‌های فیزیکی با توابع غیرخطی معین یا سامانه‌های کوانتومی حل‌پذیر با طیف گسسته به کار برده‌ایم. در نهایت معیارهایی که مبین ماهیت غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده هستند را با محاسبه‌ی چلانده‌ی مرتبه‌ی اول و دوم، رسم خطوط کنتور تابع توزیع Q ، تابع توزیع ویگنر، پارامتر مندل مرتبه‌ی اول و دوم و پارامتر A_3 مورد بررسی قرار داده‌ایم.

فهرست مندرجات

۱	معرفی حالت‌های همدوس	۱
۲	مقدمه	۱.۱
۳	کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد	۲.۱
۴	بسط میدان بر حسب مدهای ارتعاشی یک تشدیدکننده	۱.۲.۱
۵	کوانتش	۲.۲.۱
۶	حالت‌های عددی	۳.۲.۱
۸	حالت‌های همدوس استاندارد و ویژگی‌های آن‌ها	۳.۱
۱۳	برهم‌نهی حالت‌های همدوس استاندارد	۴.۱
۱۴	مدل ساده‌ای برای حالت‌های همدوس	۵.۱
۱۵	حالت‌های همدوس چلانده	۶.۱
۱۶	مدل ساده‌ای برای تولید حالت‌های همدوس چلانده	۷.۱
۱۷	مثالی از نمایش حالت‌های همدوس و چلانده	۱.۷.۱
۲۰	معرفی انواع تعمیم‌های حالت‌های همدوس	۲
۲۱	مقدمه	۱.۲
۲۱	تعمیم مبتنی بر نظریه‌ی گروه	۲.۲
۲۲	حالت‌های همدوس گروه $SU(1, 1)$	۱.۲.۲
۲۵	تعمیم جبری	۳.۲
۲۵	معرفی حالت‌های همدوس غیرخطی	۱.۳.۲

۲۷	ویژگی‌های حالت‌های همدوس غیرخطی	۲.۳.۲
۲۷	حالت‌های زوج و فرد متناظر با حالت‌های همدوس غیرخطی	۳.۳.۲
۳۰	ارتباط حالت‌های همدوس غیرخطی و گروه $SU(1, 1)$	۴.۳.۲
۳۱	تعمیم دینامیکی	۴.۲
۳۴	پتانسیل متقارن پوشل-تلا	۱.۴.۲
۳۵	تعمیم‌های دیگر حالت‌های همدوس	۵.۲
۳۵	حالت‌های همدوس KPS	۱.۵.۲
۳۸	حالت‌های همدوس گاز-یو-کلاودر GK	۲.۵.۲
۴۴	۳ معرفی معیارهای تشخیص غیر کلاسیکی بودن حالت‌های کوانتومی	
۴۵	مقدمه	۱.۳
۴۵	تابع توزیع P	۲.۳
۴۸	رابطه‌ای برای تابع توزیع P	۱.۲.۳
۴۹	ارتباط تابع P با ویژگی غیر کلاسیکی	۲.۲.۳
۴۹	مثال‌هایی از تابع P برای حالت‌های مختلف میدان	۳.۲.۳
۵۲	تابع توزیع ویگنر	۳.۳
۵۳	تابع ویگنر برای حالت‌های همدوس غیرخطی	۱.۳.۳
۵۵	تابع توزیع Q	۴.۳
		۵۶
۵۸	چلانندی	۵.۳
۵۹	ارتباط چلانندی با تابع توزیع P	۱.۵.۳
۵۹	ذکر دو مثال برای چلانندی	۲.۵.۳
۶۱	دترمینان d_N	۶.۳
۶۲	مثال‌هایی از زیرمجموعه‌های دترمینان d_N	۱.۶.۳
۶۵	پارامتر مندل	۷.۳
۶۷	ارتباط پارامتر مندل با تابع توزیع P	۱.۷.۳

۶۸	پارامتر A_3	۸.۳
۷۰	بررسی مبنای پارامتر A_3	۱.۸.۳

۴ معرفی حالت‌های همدوس غیر خطی تعمیم یافته جدید و حالت‌های همدوس

۷۱	زوج و فرد متناظر	
۷۲	مقدمه	۱.۴
۷۳	تعمیم حالت‌های همدوس غیر خطی	۲.۴
۷۳	تعمیم مرتبط با تغییر جبر $a \rightarrow \mathcal{A} = aF(A^\dagger A)$	۱.۲.۴
۷۵	تعمیم مرتبط با تغییر جبر $a \rightarrow \mathbb{A} = AF(A^\dagger A)$	۲.۲.۴
۷۶	حالت‌های زوج و فرد متناظر با حالت‌های همدوس غیر خطی معرفی شده	۳.۴
	حالت‌های همدوس تعمیم یافته زوج و فرد: ترکیب‌های خطی	۱.۳.۴
۷۶	حالت‌های $ \alpha, H\rangle$ و $ \alpha, g\rangle$	
	حالت‌های همدوس تعمیم یافته زوج و فرد: ویژه حالت‌های	۲.۳.۴
۷۷	عملگرهای $F(H)a^\dagger$ و $g(n)a^\dagger$	
۷۹	تحقق‌های فیزیکی حالت‌های همدوس غیر خطی معرفی شده	۴.۴
۸۰	پتانسیل پوشل-تلر	۱.۴.۴
۸۹	نوسانگر تغییر شکل یافته‌ی q	۲.۴.۴
۹۶	اتم‌های هیدروژن-مانند	۳.۴.۴
۱۰۳	حالت‌های همدوس $SU(1, 1)$	۴.۴.۴
۱۰۹	حالت‌های فوتون-افزوده	۵.۴.۴
۱۱۶	نتایج محاسبات عددی برای حالت‌های زوج و فرد معرفی شده	۵.۴
۱۱۸	حالت‌های زوج و فرد متناظر با پتانسیل پوشل-تلر	۱.۵.۴
۱۲۳	حالت‌های زوج و فرد متناظر با حالت‌های $SU(1, 1)$	۲.۵.۴
۱۲۸	نتیجه‌گیری	۶.۴

۱۳۰	محاسبات	۱.۵
۱۳۰	روابط عدم قطعیت برای حالت‌های همدوس غیرخطی	۱.۱.۵
	روابط عدم قطعیت برای حالت‌های زوج و فرد متناظر با	۲.۱.۵
۱۳۱	حالت‌های همدوس غیرخطی	
۱۳۲	اثبات روابط (۱۰.۲.۳) و (۱۱.۲.۳)	۳.۱.۵
	حل انتگرال موجود در زیربخش (۱.۳.۳) برای به‌دست‌آوردن	۴.۱.۵
۱۳۳	$C(z, z^*)$	
۱۳۴	ارتباط میان توابع توزیع در یک شکل دیفرانسیلی	۲.۵
۱۳۶		مراجع

فصل ۱

معرفی حالت‌های همدوس

۱.۱ مقدمه

حالت‌های غیرکلاسیکی میدان تابشی در پژوهش‌های اخیر در زمینه‌ی مکانیک کوانتومی و به‌ویژه در اپتیک کوانتومی از جایگاه خاصی برخوردار است. هر چند به لحاظ تاریخی سابقه‌ی این‌گونه تحقیقات را می‌توان به دوران ظهور مکانیک کوانتومی نسبت داد ولی بحث جدی، اساسی و در گستره‌ی وسیع روی این حالت‌ها در حقیقت از اوایل دهه‌ی ۶۰ میلادی آغاز شد. مفهوم حالت‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در سال ۱۹۲۶ هنگام بررسی دسته‌ای از حالت‌های مکانیک کوانتومی که رفتاری شبه‌کلاسیک دارند مطرح گردید [۴۰]. این حالت‌ها توسط وی برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده به‌عنوان بسته‌موج‌هایی که تحولشان همانند یک ذره‌ی کلاسیکی در یک پتانسیل درجه دوم است، معرفی شده‌اند. اما شکل‌گیری نظریه‌ی حالت‌های همدوس در سال ۱۹۶۳ توسط کلاودر [۲۲]، گلاوبر [۱۷] و سودارشان [۴۲] در زمینه‌ی توصیف کوانتومی پرتوهای همدوس که از نور لیزر گسیل می‌شوند انجام گرفت. از آن به بعد حالت‌های همدوس تقریباً در اغلب زمینه‌های فیزیک کوانتومی ظاهر شدند که از آن جمله می‌توان به اپتیک کوانتومی، فیزیک اتمی، فیزیک هسته‌ای، ماده چگال و الکترودینامیک کوانتومی اشاره کرد. به دلیل گستردگی کاربرد این حالت‌ها می‌توان گفت "حالت‌های همدوس زبان سرشتی نظریه‌ی کوانتومی‌اند". در قلب مباحث مربوط به اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس قرار دارند و اهمیت این حالت‌ها نیز دقیقاً به خاطر تعمیم‌هایی از آن‌هاست که توانایی آن‌ها در بروز و ظهور ویژگی‌های غیرکلاسیکی میدان تابشی به اثبات رسیده است. این مفاهیم ضمن ایفای نقش اساسی در درک عمیق‌تر مبانی مکانیک کوانتومی، در زمینه‌های کاربردی همانند نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی [۳۶]، اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق [۱۱] (مانند آشکارسازی امواج گرانشی) و ... نیز حائز اهمیت به‌سزایی هستند.

۲.۱ کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد

به منظور کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی مناسب است که با توصیف کلاسیکی میدان شروع کنیم که بر معادلات ماکسول بنا شده است. این معادلات بردارهای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \vec{E} و \vec{H} را به ترتیب با بردارهای القایی و جابه‌جایی \vec{D} و \vec{B} مرتبط می‌سازد. این معادلات به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4.2.1)$$

که در آنها داریم:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (5.2.1)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (6.2.1)$$

ϵ_0 و μ_0 به ترتیب گذردهی خلأ و نفوذپذیری مغناطیسی هستند و $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ که c سرعت نور در خلأ است. حال با گرفتن کرل از طرفین رابطه‌ی (۲.۲.۱) و استفاده از روابط (۱.۲.۱)، (۴.۲.۱)، (۵.۲.۱) و (۶.۲.۱)، در نهایت برای $\vec{E}(\vec{r}, t)$ و دور از چشمه‌های بار به معادله‌ی موج زیر خواهیم رسید:

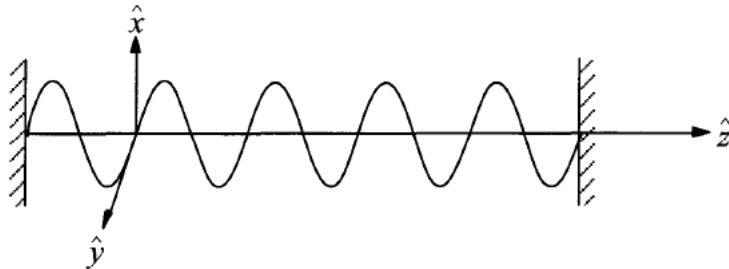
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7.2.1)$$

که در به‌دست آوردن معادله‌ی موج بالا از رابطه‌ی زیر نیز بهره گرفته‌ایم

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

۱.۲.۱ بسط میدان بر حسب مدهای ارتعاشی یک تشدیدکننده

ابتدا مطابق شکل (۱.۲.۱) یک میدان الکتریکی که وابستگی فضایی مناسبی برای یک کاواک به طول L داشته باشد را در نظر می‌گیریم. بدین منظور میدان الکتریکی که به‌طور خطی در



شکل ۱.۲.۱: میدان الکترومغناطیسی با بسامد ν داخل یک کاواک به طول L .

جهت x پلاریزه شده را در نظر گرفته و آن را بر حسب مدهای نرمال کاواک به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \quad (۸.۲.۱)$$

که در آن دامنه‌ی مد نرمال با بعد طول است و $k_j = j\pi/L$ با $j = ۱, ۲, ۳, \dots$

$$A_j = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

در این جا $\nu_j = j\pi c/L$ ویژه‌بسامد کاواک، $V = LA$ حجم کاواک، A سطح مقطع عرضی تشدیدکننده‌ی نوری و m_j یک ثابت با بعد جرم است. ثابت m_j فقط برای برقرار کردن شباهت و سپس فراهم کردن امکان مقایسه بین مسأله‌ی دینامیکی یک تک مد میدان الکترومغناطیسی با نوسانگر هماهنگ ساده لحاظ شده است. موج الکترومغناطیسی یک موج عرضی است و می‌توانیم مؤلفه‌ی y میدان مغناطیسی H را به‌دست آوریم. برای این کار روابط (۸.۲.۱) و (۱.۲.۱) مفید هستند و نتیجه عبارت است از:

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z) \quad (۹.۲.۱)$$

از طرفی در فیزیک کلاسیک برای محاسبه‌ی انرژی کل میدان الکترومغناطیسی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) \quad (10.2.1)$$

که در آن انتگرال روی تمام حجم کاواک گرفته می‌شود. در ادامه با جایگذاری روابط (8.2.1) و (9.2.1) به ترتیب برای E_x و H_y در رابطه‌ی (10.2.1) به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi} \sum_j (m_j v_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \left(m_j v_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right) \\ &= \sum_j H_j \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

که $p_j = m_j \dot{q}_j$ تکانه‌ی کانونیک مربوط به مد j ام است. معادله‌ی (11.2.1) بیانگر این است که انرژی کل میدان تابشی می‌تواند به‌عنوان مجموع انرژی نوسانگرهای مستقل در نظر گرفته شود. بنابراین هر مد میدان به‌طور دینامیکی معادل با یک نوسانگر هماهنگ مکانیکی است. از این‌جاست که اهمیت و جایگاه نوسانگر هماهنگ به‌عنوان یک سامانه‌ی کوانتومی در مدل‌سازی تابش الکترومغناطیسی پدیدار می‌شود.

2.2.1 کوانتش

حال هامیلتونی نوسانگر هماهنگ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2) \quad (12.2.1)$$

در این‌جا جرم و بسامد نوسانگر را برابر با واحد در نظر گرفته‌ایم. q و p متغیرهای کلاسیکی میدان و به ترتیب بیانگر مکان و تکانه هستند. از این پس قرار می‌دهیم: $q \doteq x$. مفهوم کوانتش به بیان ساده تبدیل متغیرهای کلاسیکی میدان به عملگرهای میدان و تکانه و از آن‌جا تعریف عملگرهای آفرینش و نابودی، به ترتیب a و a^\dagger است. به‌منظور کوانتش هامیلتونی موجود، در مرحله‌ی اول مؤلفه‌های x و p را به‌صورت عملگرهایی در نظر می‌گیریم که با فرض

$\hbar = 1$ رابطه‌ی جابه‌جایی $[x, p] = i$ را برآورده می‌کنند. حال که شکل مسأله از کلاسیکی به کوانتومی تبدیل شد مناسب است برای کوانتس کامل هامیلتونی از تبدیل‌های کانونیک زیر استفاده نمائیم:

$$a = \frac{x + ip}{\sqrt{2}} \quad (13.2.1)$$

$$a^\dagger = \frac{x - ip}{\sqrt{2}} \quad (14.2.1)$$

این دو عملگر غیرهرمیتی رابطه‌ی جابه‌جایی $[a, a^\dagger] = \hat{I}$ را برآورده می‌کنند. در نهایت هامیلتونی (13.2.1) با در نظر گرفتن تبدیل‌های بالا به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (15.2.1)$$

و لذا رابطه‌ی (11.2.1) که بیانگر انرژی میدان تابشی است را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H = \sum_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \quad (16.2.1)$$

3.2.1 حالت‌های عددی

ویژه‌های هامیلتونی H (رابطه‌ی (15.2.1)) با کت $|n\rangle$ نمایش داده می‌شوند. این کت‌ها حالت‌های عددی نامیده می‌شوند و برای آن‌ها $n = 0, 1, 2, \dots$ می‌باشد. لذا رابطه‌ی ویژه‌مقداری زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} H |n\rangle &= \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= E_n |n\rangle \end{aligned} \quad (17.2.1)$$

کنش عملگرهای a و a^\dagger روی کت حالت $|n\rangle$ در روابط زیر آمده است

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (18.2.1)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (19.2.1)$$

برای کنش عملگر a روی پایین‌ترین حالت که با کت خلاً $|\circ\rangle$ نمایش داده می‌شود داریم:

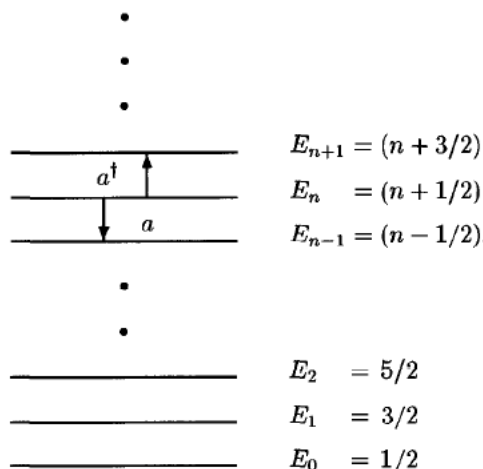
$$a|\circ\rangle = 0 \quad (20.2.1)$$

عملگرهای a و a^\dagger ، به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش نامیده می‌شوند که دلیل آن، نوع کنش این عملگرها روی حالت‌های عددی است.

اگر رابطه‌ی ویژه‌مقداری (17.2.1) را برای حالت خلاً که همان حالت پایه‌ی نوسانگر است بازنویسی کنیم و در آن از رابطه‌ی (20.2.1) استفاده نماییم به رابطه‌ای به شکل زیر خواهیم رسید:

$$H|\circ\rangle = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)|\circ\rangle = \frac{1}{2}|\circ\rangle \quad (21.2.1)$$

آنچه از این رابطه برمی‌آید این است که انرژی حالت پایه‌ی نوسانگر که انرژی نقطه‌ی صفر نیز نامیده می‌شود $E_0 = \frac{1}{2}$ خواهد بود و به‌طور مشابه با استفاده از رابطه‌ی ویژه‌مقداری (17.2.1) و کمک گرفتن از روابط (18.2.1) و (19.2.1) برای انرژی حالت n ام نوسانگر رابطه‌ای به‌صورت $E_n = n + \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. شکل ترازهای هم‌فاصله انرژی نوسانگر (پیامد خطی بودن سامانه) نیز در شکل (2.2.1) نشان داده شده است.



شکل 2.2.1 : ترازهای انرژی نوسانگر به فاصله‌ی 1.

به‌عنوان نتیجه‌ی دیگری از روابط مربوط به کنش عملگرهای آفرینش و نابودی روی حالت‌های عددی خواهیم داشت:

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \quad (22.2.1)$$

این رابطه‌ی ویژه‌مقداری بیان می‌کند که حالت‌های عددی علاوه بر اینکه ویژه‌حالت هامیلتونی H هستند می‌توانند به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر تعداد $n = a^\dagger a$ نیز در نظر گرفته شوند. به‌منظور به‌دست آوردن شکل نهایی حالت‌های عددی با استفاده از رابطه‌ی (19.2.1) به‌دست خواهیم آورد

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (23.2.1)$$

از ویژگی‌های دیگر حالت‌های عددی می‌توان موارد زیر را نام برد:

(1) حالت‌های عددی که حالت‌های فوک¹ نیز نامیده می‌شوند یک مجموعه‌ی کامل را تشکیل می‌دهند. ویژگی کامل بودن برای این حالت‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I} \quad (24.2.1)$$

(2) قضیه بسط: هر حالت دلخواه مانند $|\psi\rangle$ را می‌توان به‌صورت برهم‌نهی از حالت‌های عددی $|n\rangle$ به‌صورت یک سری نامتناهی نمایش داد:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (25.2.1)$$

توجه داریم که این دو ویژگی به‌همراه تعامد ویژه‌کت‌ها $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ و نیز حقیقی بودن ویژه‌مقادیر هامیلتونی H ناشی از هرمیتی بودن هامیلتونی نوسانگر هماهنگ است.

۳.۱ حالت‌های همدوس استاندارد و ویژگی‌های آن‌ها

در ادامه ضمن معرفی حالت‌های همدوس استاندارد به معرفی ویژگی‌های مهم آن‌ها خواهیم پرداخت.

¹Fock

۱) حالت‌هایی که ویژه حالت عملگر نابودی‌اند.

همان‌گونه که قبلاً بیان شد حالت همدوس در ابتدا توسط شردینگر به‌عنوان بسته‌موجی که تحرکش همانند یک ذره‌ی کلاسیکی در پتانسیل نوسانگر هماهنگ است، در نظر گرفته شد. این بیان برای حالت‌های همدوس معادل با در نظر گرفتن این حالت‌ها به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی a با ویژه‌مقدار α با رابطه‌ی ویژه‌مقداری زیر است [۲۸]:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (۲۶.۳.۱)$$

این ویژه‌حالت‌ها، "حالت‌های همدوس استاندارد" یا "حالت‌های همدوس کانونیک" برای نوسانگر هماهنگ نامیده می‌شوند. با بسط این ویژه‌حالت‌ها بر حسب حالت‌های عددی با توجه به رابطه‌ی (۲۵.۲.۱)، جایگذاری در رابطه‌ی (۲۶.۳.۱) و سپس بهنجارش آن‌ها خواهیم داشت:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (۲۷.۳.۱)$$

۲) حالت‌های همدوس را می‌توان به‌عنوان حالت جابه‌جا شده‌ی نوسانگر هماهنگ در نظر گرفت.

علاوه‌براین با استفاده از رابطه‌ی (۲۳.۲.۱) می‌توانیم شکل دیگری برای حالت‌های همدوس استاندارد به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (۲۸.۳.۱)$$

با توجه به لم بیکر-هاسدورف^۱ اگر برای دو عملگر A و B رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0 \quad (۲۹.۳.۱)$$

رابطه‌ی عملگری زیر را داریم:

$$e^{A+B} = e^{[A,B]/2} e^B e^A \quad (۳۰.۳.۱)$$

بنابراین به‌راحتی می‌توان دید که حالت‌های همدوس را می‌توان از کنش عملگر یکانی

جابه‌جایی $D(\alpha)$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (۳۱.۳.۱)$$

^۱Baker-Hausdorff

روی حالت زمینه‌ی نوسانگر هماهنگ نیز به دست آورد. در واقع با توجه به لم (۳۰.۳.۱) می‌توان عملگر جابه‌جایی $D(\alpha)$ که در رابطه‌ی (۳۱.۳.۱) بیان شده است را با در نظر گرفتن $A = \alpha a^\dagger$ و $B = -\alpha^* a$ به صورت زیر نوشت:

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \quad (32.3.1)$$

بنابراین واضح است که $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$ عملگر $D(\alpha)$ یک عملگر یکانی است و داریم:

$$D^\dagger(\alpha) = [D(\alpha)]^{-1} = D(-\alpha) \quad (33.3.1)$$

موارد اول و دوم بیانگر دو روش برای به دست آوردن شکل صریح نهایی حالت‌های همدوس استاندارد قلمداد می‌شوند.

۳) حالت‌های همدوس نامساوی هایزنبرگ را اشباع می‌کنند.

عدم قطعیت در مؤلفه‌ی مکان به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (34.3.1)$$

و یک تعریف مشابه برای عدم قطعیت در تکانه خواهیم داشت. برای حالت‌های همدوس استاندارد نوسانگر هماهنگ عدم قطعیت در مؤلفه‌ی x با استفاده از رابطه‌ی (۳۴.۳.۱) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} (\Delta x) &= \sqrt{\langle \alpha | \left(\frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^2 | \alpha \rangle - \left(\langle \alpha | \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i} | \alpha \rangle \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (35.3.1)$$

به طور مشابه برای عدم قطعیت در مؤلفه‌ی p برای این حالت‌ها نیز خواهیم داشت:

$$(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (36.3.1)$$

بنابراین حاصلضرب عدم قطعیت در مکان و تکانه برای این حالت‌ها برابر با $\frac{1}{2}$ خواهد شد. از طرف دیگر از رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ داریم:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2} \quad (37.3.1)$$

بدین ترتیب حالت‌های همدوس نامساوی هایزنبرگ را اشباع می‌کنند و دارای کمترین عدم قطعیتی هستند که توسط رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ برای حالت‌های کوانتومی مجاز شمرده شده است. این یکی از مهمترین ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد است. یادآور می‌شویم که حالت پایه‌ی نوسانگر هماهنگ (خلاً میدان) نیز دارای این ویژگی است.

(۴) حالت‌های همدوس از توزیع پواسونی پیروی می‌کنند.

ابتدا یادآور می‌شویم که میانگین تعداد فوتون‌ها در پایه‌ی حالت همدوس $|\alpha\rangle$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \langle \alpha | n | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (38.3.1)$$

تابع توزیع فوتونی برای این حالت‌ها با $p(n)$ نمایش داده می‌شود که بیانگر احتمال پیدا کردن n فوتون در حالت همدوس $|\alpha\rangle$ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} p(n) \equiv \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle &= \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \\ &= \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \end{aligned} \quad (39.3.1)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ی بالا از (۲۷.۳.۱) و (۳۸.۳.۱) استفاده کرده‌ایم. تابع توزیع حالت‌های همدوس در رابطه‌ی (۳۹.۳.۱) یک توزیع پواسونی است.

(۵) حالت‌های همدوس رابطه‌ی تفکیک همانی را برآورده می‌کنند.

حالت‌های همدوس یک مجموعه‌ی کامل را تشکیل می‌دهند. برای نشان دادن این موضوع ابتدا انتگرال زیر را با $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ و تعریف $d^2\alpha \doteq |\alpha| d|\alpha| d\theta$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \int (\alpha^*)^n \alpha^m e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha &= \int_0^\infty |\alpha|^{n+m+1} e^{-|\alpha|^2} d|\alpha| \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \pi n! \delta_{nm} \end{aligned} \quad (40.3.1)$$

این انتگرال روی تمام صفحه‌ی مختلط گرفته شده است. حال با کمک گرفتن از انتگرال بالا و استفاده از شکل حالت‌های همدوس (۲۷.۳.۱) رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{I} \quad (41.3.1)$$