چکیده

فرض می‌کنیم R یک حلقه نوتری باشد، و فرض می‌کنیم $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشد که ۱ $= dim\frac{R}{\underline{a}}$ و M، را $R-$مدولی متناهی قرار می‌دهیم. آنگاه، هم‌متناهی بودن و بعضی دیگر از خصوصیات مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H_{\underline{a}}^{i}(M)$ رابررسی می‌کنیم. برای یک ایده‌آل دلخواه $\underline{a}$ و $R-$مدول دلخواه M که متناهی فرض نمی‌شود، مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی را مشخص می‌کنیم. و همچنین، مجموعه اول‌های هم‌وابسته مدول‌های کوهمولوژی موضعی روی حلقه‌های موضعی را توصیف خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی:کوهمولوژی موضعی ، مدول‌های هم‌متناهی ، مدول‌های هم‌متناهی ضعیف ، اول‌های هم‌وابسته

فهرست مندرجات

مقدمه

i—امین تابع‌گون کوهمولوژی موضعی وابسته به $\underline{a}$، که با $H^i_{\underline{a}}(-)$ نشان می‌دهیم، تابع‌گونی است که بر R—مدول‌هایی که R حلقه‌ای جابجایی و نوتری باشد، اثر می‌کند. اگر $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشد، برای هر عدد صحیح نامنفی i، i—امین کوهمولوژی موضعی M وابسته به $\underline{a}$، چنین تعریف می‌شود:

$$H^i_{\underline{a}}(M) \ := \ \varinjlim_{n\in N} Ext^i_R(\frac{R}{\underline{a}^n}, M).$$

این تابع‌گون کاربرد فراوانی در جبر جابجایی و هندسه جبری دارد. و این مسئله باعث شده که مطالعات فراوانی روی آن صورت بگیرد. از خاصیت‌های این تابع‌گون می‌توان به هم‌متناهی بودن اشاره کرد. گروتندیک [۱] حدس زیر را مطرح کرده است:

برای هرایده‌آل $\underline{a}$ و هر R—مدول متناهی M، $Hom_R(\frac{R}{\underline{a}}, H^n_{\underline{a}}(M))$ برای هر n متناهی است.

هارتشورن [۲] با مثالی نشان داد که این حدس در کل درست نیست، و این سوال را مطرح کرد:

اگر $\underline{a}$ ایده‌آل و M، R—مدولی متناهی باشد، در چه صورتی $Ext^i_R(\frac{R}{\underline{a}}, H^j_{\underline{a}}(M))$ برای هر i و j متناهی است؟

پاسخ به این سوال هارتشورن را بر آن داشت که مدول‌های $\underline{a}$—هم‌متناهی را تعریف کند. او همچنین نشان داد که اگر (R, M) حلقه موضعی منظم کامل و M، R—مدولی متناهی باشد، آنگاه $H^i_{\underline{a}}(M)$، در دو حالت $\underline{a}$—هم‌متناهی است:

۱) اگر $\underline{a}$ ایده‌آل اصلی غیر صفر باشد.

۱ $Grothendieck$

۲ $Hartshorne$

۲) اگر $\underline{a}$ ایده‌آل اول با بعد ۱ $= \dim \frac{R}{\underline{a}}$ باشد.

هونیکه[۳] و که[۴] ثابت کردند که اگر R حوزه موضعی کامل گرنشتاین و $\underline{a}$ ایده‌آلی از آن باشد که ۱ $= dim\frac{R}{\underline{a}}$، آنگاه برای هر i و هر R–مدول با تولید متناهی M، $H^i_{\underline{a}}(M)$، $\underline{a}$–هم‌متناهی است.

دلفینو[۵] جایگزین‌هایی را برای فرض گرنشتاین بودن بیان کرد.

و یوشیدا[۶] و دلفینو و مارلی[۷]، شرط (۲) قضیه هارتشورن را به همه ایده‌آل‌های $\underline{a}$ از حلقه موضعی دلخواه که از بعد ۱ هستند، تعمیم دادند و شرط کامل بودن را از آن حذف کردند. در این رساله، ما برآنیم که با حذف شرط موضعی بودن از قضیه هارتشورن، توصیفی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی $\underline{a}$–هم‌متناهی، وقتی که $\underline{a}$ ایده‌آل ۱–بعد در حلقه غیرموضعی R است را ارائه دهیم. این رساله از چهار فصل تشکیل شده است:

در فصل اول، مقدمات مورد نیاز از جبر تعویض‌پذیر و جبر همولوژیک را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، مدول‌های کوهمولوژی موضعی و مدول‌های هم‌متناهی را تعریف کرده و بعضی از ویژگی‌های آنها را مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم، در شرایط خاصی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی $\underline{a}$ـهم‌متناهی را توصیف می‌کنیم.

و در فصل چهارم، به معرفی مدول‌های هم‌متناهی ضعیف می‌پردازیم. لازم به ذکر است که مقالات اصلی که در این رساله مورد استفاده قرار گرفته‌اند، مقالات [۱] و [۲] هستند.

۳ $Huneke$

۴ Koh

۵ $Delfino$

۶ $Yoshida$

۷ $Marley$

فصل ۱

پیش نیازها

۱—۱ نکات مقدماتی

در سراسر این رساله، R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است و تمام مدول‌ها، R—مدول یکانی هستند.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M یک R—مدول، N و L، زیرمدول‌هایی از M، و $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشند. در این صورت:

۱) $(N :_R L) = \{r \in R \mid \forall x \in L \ , \ rx \in N\}.$

۲) $(N :_M \underline{a}) = \{r \in M \mid \forall x \in \underline{a} \ , \ rx \in N\}.$

۳) $Ann_R(M) = \{r \in R \mid \forall x \in M \ , \ rx = \circ\}.$

۴) اگر $Ann_R(M) = 0$، گوییم M یک R—مدول وفادار است.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنیم S، یک زیرمجموعه بسته ضربی از R، و $\underline{a}$، ایده‌آلی با تولید متناهی از R، و N زیرمدولی از M باشد. آنگاه:

$$(S^{-1}N :_{S^{-1}M} S^{-1}\underline{a}) = S^{-1}(N :_M \underline{a}).$$

لم ۳.۱.۱

۱) فرض کنید R حلقه تعویض‌پذیر نوتری و S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت، حلقه کسرهای R نسبت به S، یعنی $S^{-1}R$، نیز نوتری است.

۲) اگر M، R—مدولی نوتری باشد، آنگاه $S^{-1}M$، $S^{-1}R$—مدول نوتری است.

۳) اگر M، R—مدولی آرتینی باشد، آنگاه $S^{-1}M$، $S^{-1}R$—مدول آرتینی است.

اثبات:

۱) مراجعه شود به لم ۳.۸ از مرجع [۱۹].

۲) مراجعه شود به تمرین ۱۱.۹ از مرجع [۱۹].

۳) مراجعه شود به تمرین ۱۱.۹ از مرجع [۱۹].

لم ۴.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت:

$$\frac{R}{\underline{a}} \otimes_R M \cong \frac{M}{\underline{a}M}.$$

اثبات: رجوع شود به نتیجه ۱.۲.۲۶ از مرجع [۱۰].

گزاره ۵.۱.۱ اگر $M_1, \ldots, M_n$ که $n \in N$ و $n \geq 2$، مدول‌هایی روی حلقه تعویض‌پذیر R باشند، آنگاه دنباله

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n}(M_i) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=2}^{n}(M_i) \longrightarrow 0$$

دقیق است.

در این دنباله f نگاشت یک به یک طبیعی است و به ازای هر $(m_1, \ldots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$،

$$g((m_1, \ldots, m_n)) = (m_2, \ldots, m_n).$$

تعریف ۶.۱.۱ مدول M را $R-$مدول یکدست نامیم هرگاه برای هر رشته دقیق از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها مانند

$$\cdots \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \cdots$$

رشته

$$\cdots \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow \cdots$$

نیز دقیق باشد.

تعریف ۷.۱.۱ اگر R و S دو حلقه و $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ها باشد به نحوی که S، $R-$مدولی یکدست باشد، آنگاه f را یک همریختی یکدست نامیم و گوییم S، یک $R-$جبر یکدست است.

گزاره ۸.۱.۱ فرض کنیم S، یک زیرمجموعه بسته ضربی از R، و M یک $R-$مدول باشد، آنگاه

$$S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M.$$

نتیجه ۹.۱.۱ حلقه $S^{-1}R$ یک $R-$مدول یکدست است.

تعریف ۱۰.۱.۱ مدول را ساده گوییم هرگاه هیچ زیرمدولی جز $< 0 >$ و خودش نداشته باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید N مدولی روی حلقه تعویض‌پذیر R باشد. آنگاه مدول N

ساده است فقط و فقط اگر $\underline{m} \in Max(R)$ وجود داشته باشد که

$$\frac{R}{\underline{m}} \cong N.$$

اثبات: رجوع شود به لم ۳۲.۷ از مرجع [۱۹].

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم L و M، دو R−مدول باشند که $M \subset L$؛ L را توسیع اساسی M گوییم اگر برای هر زیرمدول غیر صفر N از L داشته باشیم $N \cap M \neq 0$.

گزاره ۱۳.۱.۱ اگر برای هر $i \in \Omega$، N_i و M_i، R−مدول‌هایی باشند که $N_i \subset M_i$، آنگاه برای هر $i \in \Omega$، M_i توسیع اساسی N_i است فقط و فقط اگر $\bigoplus_{i\in\Omega} M_i$ توسیع اساسی $\bigoplus_{i\in\Omega} N_i$ باشد.

اثبات: $(\Rightarrow)$ $l \in \Omega$ را دلخواه فرض می‌کنیم، و فرض می‌کنیم $K_l \neq 0$ زیرمدول دلخواهی از M_l باشد، و زیرمدول $\bigoplus_{i\in\Omega} L_i \neq 0$ از $\bigoplus_{i\in\Omega} M_i$ را به نحوی قرار می‌دهیم که $L_l = K_l$؛ و برای هر $j \neq l$، $L_j = 0$.

با توجه به اینکه $\bigoplus_{i\in\Omega} M_i$ توسیع اساسی $\bigoplus_{i\in\Omega} N_i$ است، داریم

$$(\bigoplus_{i\in\Omega} L_i) \cap (\bigoplus_{i\in\Omega} N_i) \neq 0.$$

بنابراین

$$.\bigoplus_{i\in\Omega}(L_i \cap N_i) \neq 0$$

طبق تعریف، برای هر $j \neq l$، چون $L_j = 0$، پس $L_i \cap N_i = 0$. در نتیجه،

$$.L_l \cap N_l \neq 0$$

لذا، M_l توسیع اساسی L_l است.

حال، با توجه به دلخواه بودن l، حکم ثابت است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $\bigoplus_{i\in\Omega} K_i \neq 0$ زیرمدول دلخواهی از $\bigoplus_{i\in\Omega} M_i$ باشد. لذا، $l \in \Omega$ای وجود دارد که $K_l \neq 0$ و $K_l \subseteq M_l$ است.

با توجه به فرض M_l توسیع اساسی N_l است. در نتیجه از تعریف توسیع اساسی داریم $K_l \cap N_l \neq 0$.

پس

$$(\bigoplus_{i\in\Omega} K_i) \cap (\bigoplus_{i\in\Omega} N_i) \neq 0$$

و بنابراین $\bigoplus M_i$ توسیع اساسی $\bigoplus N_i$ است.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم E مدولی انژکتیو باشد که $M \subset E$؛ و E، توسیع اساسی M باشد. E را پوش انژکتیو M نامیم و با $\mathrm{E(M)}$ نشان می‌دهیم.

واضح است که اگر E' و E پوش انژکتیو M باشند، آنگاه $\mathrm{E} \cong \mathrm{E}'$.

قضیه ۱۵.۱.۱ اگر R حلقه نوتری باشد و $\underline{\mathrm{p}} \in Spec(R)$، آنگاه

۱) $\mathrm{E}(\frac{\mathrm{R}}{\underline{\mathrm{p}}})$ تجزیه‌ناپذیر است.

۲) هر $R-$مدول انژکتیو تجزیه‌ناپذیر برای $\underline{\mathrm{p}} \in Spec(R)$ای به شکل $\mathrm{E}(\dfrac{\mathrm{R}}{\underline{\mathrm{p}}})$ است.

اثبات: مراجعه شود به قضیه ۱۸.۴ از مرجع [۱۶].

قضیه ۱۶.۱.۱ برای مدول‌های روی حلقه نوتری R داریم:

۱) هر جمع مستقیم از هر تعداد از مدول‌های انژکتیو، انژکتیو است.

۲) هر مدول انژکتیو را می‌توانیم به صورت جمع مستقیم مدول‌های انژکتیو تجزیه‌ناپذیر بنویسیم.

۳) جمع مستقیم قسمت (۲)، منحصر به فرد است.

اثبات: مراجعه شود به قضیه ۱۸.۵ از مرجع [۱۶].

تعریف ۱۷.۱.۱ اگر $\underline{\mathrm{a}}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد، آنگاه ایده‌آل اول $\underline{\mathrm{p}}$ از R را ایده‌آل اول مینیمال $\underline{\mathrm{a}}$ گوییم در صورتی که اگر ایده‌آل اول دیگری مانند $\underline{\mathrm{p}}'$ وجود داشته باشد که $\underline{\mathrm{a}} \subseteq \underline{\mathrm{p}}' \subseteq \underline{\mathrm{p}}$، آنگاه $\underline{\mathrm{p}} = \underline{\mathrm{p}}'$.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم $\underline{\mathrm{a}}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد. پوش $\underline{\mathrm{a}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V(\underline{\mathrm{a}}) = \{\underline{\mathrm{p}} \in Spec(R) \mid \underline{\mathrm{a}} \subseteq \underline{\mathrm{p}}\}.$$

قضیه و تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم $\underline{a}$ ایده‌آل سره حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت،

$$V(\underline{a}) := \{\underline{p} \in Spec(R) \ : \ \underline{a} \subseteq \underline{p}\}$$

حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطه شمولیت دارد. عضوهای مینیمال $V(\underline{a})$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال $\underline{a}$ یا ایده‌آل‌های اول مینیمال شامل $\underline{a}$ می‌نامیم. مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال $\underline{a}$ را با $Min(\underline{a})$ نشان می‌دهیم.

اثبات: رجوع شود به تعریف و قضیه ۵۲.۳ از مرجع [۱۹].

نتیجه ۲۰.۱.۱ اگر R ناصفر باشد، ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل صفر R، همان ایده‌آل‌های اول مینیمال R هستند.

اثبات: با توجه به تعریف و قضیه فوق، بدیهی است.

گزاره ۲۱.۱.۱

۱) اگر ایده‌آل $\underline{a}$ از R مشمول در ایده‌آل اول $\underline{p}$ از R باشد، آنگاه $\underline{p}$ شامل یک ایده‌آل اول مینیمال از $\underline{a}$ می‌باشد.

۲) هر ایده‌آل واقعی حداقل یک ایده‌آل اول مینیمال دارد.

۲۲.۱.۱ (قضیه اجتناب از ایده‌آل اول)

۱) فرض کنیم $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n$ ایده‌آل‌های اولی از حلقه R باشند. اگر $\underline{a}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد به طوری که $\underline{a} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \underline{p}_i$، آنگاه $1 \leq i \leq n$ موجود است که $\underline{a} \subseteq \underline{p}_i$.

۲) فرض کنیم $\underline{p}$ ایده‌آلی اول و $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر $\bigcap_{i=1}^{n} \underline{a}_i \subseteq \underline{p}$، آنگاه $1 \leq i \leq n$ موجود است که $\underline{a}_i \subseteq \underline{p}$. به ویژه، اگر $\bigcap_{i=1}^{n} \underline{a}_i = \underline{p}$، آنگاه برای iای، $\underline{a}_i = \underline{p}$.

اثبات: مراجعه شود به قضیه ۱۱.۱ از مرجع [۳].

لم ۲۳.۱.۱ فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری و $\underline{p}$، ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل سره $\underline{a}$ از R باشد. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد که $\underline{p} \cap S = \emptyset$. در این صورت $S^{-1}\underline{p}$، ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل $S^{-1}\underline{a}$ از حلقه $S^{-1}R$ است.

اثبات: رجوع شود به لم ۱.۱۵ از مرجع [۱۹].

تعریف ۲۴.۱.۱ حلقه R را کامل گوییم هرگاه همریختی گروهی طبیعی

$$\varphi : R \longrightarrow R$$

$$\varphi(r) \;=\; (r+\underline{\mathrm{a}}^i)_{i\in N}$$

یک یکریختی باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ مجموعه جزئی مرتب $(\underline{\mathrm{a}}, \leq)$ را جهت‌دار یا مستقیم گوییم هرگاه برای هر i و j دلخواه از $\underline{\mathrm{a}}$، $k \in \underline{\mathrm{a}}$ یافت شود که $i \geq k$ و $j \geq k$.

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنیم $(\underline{\mathrm{a}}, \leq)$ مجموعه‌ای مستقیم باشد. گردایه $\{M_i\}_{i\in\underline{\mathrm{a}}}$ از R—مدول‌ها به همراه خانواده R—همریختی‌های $\{\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j\}_{i\leq j}$ یک دستگاه مستقیم نامیده می‌شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) به ازای هر $i \in \underline{\mathrm{a}}$، μ_{ii} نگاشت همانی روی M_i باشد.

۲) برای هر $i, j, k \in \underline{\mathrm{a}}$ باشرط $i \leq j \leq k$ داشته باشیم $\mu_{ik} \;=\; \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$.

دستگاه مستقیم فوق را با $M \;=\; \{M_i, \mu_{ij}\}_{i,j\in\underline{\mathrm{a}}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم $M \;=\; \{M_i, \mu_{ij}\}_{i,j\in\underline{\mathrm{a}}}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه مستقیم $(\underline{\mathrm{a}}, \leq)$ باشد. حد مستقیم این دستگاه که با $\varinjlim_{i\in\underline{\mathrm{a}}} M_i$ نشان داده می‌شود برابر است با R—مدول M به همراه خانواده R—همریختی‌های $\{\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j\}_{i\leq j}$، به طوری که برای هر $i, j \in \underline{\mathrm{a}}$ که $i \leq j$، داشته

باشیم

$$\mu_i \ = \ \mu_j \circ \mu_{ij}$$

و برای هر خانواده دیگری مانند $\{N, h_i\}_{i\in \underline{a}}$ که دارای خاصیت فوق می‌باشد، $R-$همریختی یکتای $f : M \longrightarrow N$ موجود است به طوری که برای هر $i \in N$،

$$f \circ \mu_i \ = \ h_i.$$

به آسانی ثابت می‌شود که f یک یکریختی است. در واقع، حد مستقیم تحت یکریختی یکتاست.

نکته ۲۸.۱.۱ دستگاه معکوس از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها و حد معکوس آن نیز به طور مشابه تعریف می‌گردد.

۱—۲ $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم M مدولی از حلقه R باشد. تکیه‌گاه M را با $Supp_R(M)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) \ = \ \{\underline{p} \in Spec(R) \mid M_{\underline{p}} \neq 0\}.$$

گزاره ۲.۲.۱ برای R−مدول دلخواه M، گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) اگر M با تولید متناهی باشد

$$Supp_R(M) = \{\underline{p} \in Spec(R) \mid \exists \quad 0 \neq m \in M \quad s.t. \quad (0 :_R m) \subset \underline{p}\}.$$

۲) $M \neq 0$ فقط و فقط اگر $Supp_R(M) \neq \emptyset$.

۳) $Supp_R(\frac{R}{\underline{a}}) = V(Ann_R(\frac{R}{\underline{a}}))$.

۴) اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و دنباله

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

دنباله دقیقی از R−مدول‌ها و R−هم‌ریختی‌ها باشد، آنگاه

$$Supp_R(M) = Supp_R(M') \cup Supp_R(M'').$$

۵) اگر $M = \sum M_i$، آنگاه $Supp_R(M) = \sum Supp_R(M_i)$.

۶) اگر N و M، R−مدول‌هایی با تولید متناهی باشند، آنگاه

$$Supp_R(M \otimes_R N) = Supp_R(M) \cap Supp_R(N).$$

۷) اگر M، R—مدول با تولید متناهی و $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشد، آنگاه

$$Supp_R(\frac{M}{\underline{a}M}) \ = \ V(\underline{a} + Ann_R(M)).$$

اثبات: رجوع شود به تمرین ۱۹ فصل ۳ از مرجع [۳].

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم M مدولی از حلقه R باشد. بعد کرول $M \neq 0$ را با $dim_R(M)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$dim_R(M) \ = \ sup\{n \geq 0 \mid \exists \quad \underline{p}_0 \subset \underline{p}_1 \subset \cdots \subset \underline{p}_n \quad s.t. \quad \underline{p}_i \in Supp_R(M)\}$$

گزاره ۴.۲.۱ اگر M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

$$.dim(M) \ = \ dim(\frac{R}{Ann_R(M)})$$

اثبات: رجوع شود به تمرین ۱۹ فصل ۳ از مرجع [۳].

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم M مدولی از حلقه R باشد. $Ass_R(M)$ را مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به M می‌نامیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$Ass_R(M) \ = \ \{\underline{p} \in Spec(R) \mid \exists \quad 0 \neq m \in M \quad s.t. \quad (0 :_R m) \ = \ \underline{p}\}.$$

گزاره ۶.۲.۱ فرض کنیم M مدولی از حلقه نوتری R باشد. در این صورت:

۱) $M \ = \ 0 \Longleftrightarrow Ass_R(M) \ = \ \emptyset$.

۲) اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و دنباله $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$، دنباله دقیقی از R—مدول‌ها و R—هم‌ریختی‌ها باشد، آنگاه

$$Ass_R(M) \subset Ass_R(M') \cup Ass_R(M'').$$

۳) به ازای هر ایده‌آل اول $\underline{p}$ از حلقه R، $Ass_R(\frac{R}{\underline{p}}) \ = \ \underline{p}$.

۴) اگر M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

$(i$ $Ass_R(M)$ متناهی است.

$(ii$ مجموعه عناصر مینیمال دو مجموعه $Supp_R(M)$ و $Ass_R(M)$ یکسانند.

۵) اگر M یک R—مدول آرتینی باشد، آنگاه $Ass_R(M) \ = \ Supp_R(M)$.

همچنین این مجموعه شامل تعداد متناهی ایده‌آل ماکزیمال R است.

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M، یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد.در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

۱) $dim(M) = 0$.

۲) $\frac{R}{Ann(R)}$ آرتینی است.

۳) M طول متناهی دارد.

۴) هر $\underline{p} \in Ass_R(M)$ یک ایده‌آل ماکزیمال از R است.

۵) هر $\underline{p} \in Supp_R(M)$ یک ایده‌آل ماکزیمال از R است.

اثبات: بدیهی است.

قضیه ۸.۲.۱ $\underline{a} \in Ass(M)$ فقط و فقط اگر زیرمدولی از M مانند N وجود داشته باشد که

$$N \cong \frac{R}{\underline{a}}.$$

اثبات: رجوع شود به صفحه ۲۰۰ از مرجع [۳].

گزاره ۹.۲.۱ اگر R، حلقه‌ای نوتری و $Z_R(M)$ مجموعه عناصری از R باشند که روی