بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز تهران شرق

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی(گرایش آنالیز عددی)

عنوان

بررسی روش هم‌محلی توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی غیرموضعی

تدوین

محیا کرمانی

استاد راهنما

دکتر فهیمه سلطانیان

استاد مشاور

دکتر مرتضی گرشاسبی

شهریور ۱۳۹۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز تهران شرق

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد: خانم محیا کرمانی

دانشجوی رشته ریاضی کاربردی(آنالیز عددی) به شماره دانشجویی: ۹۰۰۱۰۷۹۳۵

تحت عنوان:

بررسی روش هم محلی توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی غیر موضعی

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز شنبه مورخ: ۱۳۹۳/۰۶/۲۹ ساعت: ۱۵-۱۴ محل مرکز تهران شرق برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد... ۱۹/۲۵ به حروف ...نوزده و بیست و پنج صدم... و با درجه ارزشیابی... عالی ...مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	امضاء
۱	دکتر فهیمه سلطانیان	استاد راهنما	استادیار	
۲	دکترمرتضی گرشاسبی	استاد مشاور	استادیار	
۳	دکتر مریم شمس سولاری	استاد داور	استادیار	
۴	دکتر خدیجه احمدی آملی	نماینده علمی گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تهران، حکیمه (سازمان آب)، بلوار شهید بابائیان، پانزده متری شیرازی، پلاک ۳، دانشگاه پیام نور استان تهران، مرکز تهران شرق

گواهي اصالت، نشر و حقوق مادي و معنوي اثر

اينجانب محيا کرمانی دانشجوي ورودي سال ۱۳۹۰ مقطع کارشناسي ارشد رشته رياضی کاربردی (آناليز عددی) گواهي مي‌نمايم چنانچه در پايان نامه خود از فكر، ايده و نوشته ديگري بهره گرفته‌ام با نقل‌قول مستقيم يا غيرمستقيم منبع ماخذ آن را نيز در جاي مناسب ذكر كرده‌ام. بديهي است مسئوليت تمامي مطالبي كه نقل– قول ديگران نباشد برعهده خويش مي‌دانم و جوابگوي آن خواهم بود.

دانشجو تأييد مي‌نمايد كه مطالب مندرج دراين پايان نامه نتيجه تحقيقات خودش مي‌باشد و در صورت استفاده از نتايج ديگران مرجع آن را ذكر نموده است.
نام و نام خانوادگي دانشجو: محيا کرمانی
تاريخ و امضاء:

اينجانب محيا کرمانی دانشجوي ورودي سال ۱۳۹۰ مقطع كارشناسي ارشد رشته رياضی کاربردی (آناليز عددی) گواهي می‌نمايم چنانچه براساس مطالب پايان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، كتاب، و .... نمايم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ايشان نسبت به نشر مقاله،كتاب، و ... و به صورت مشترك و با ذكر نام استاد راهنما مبادرت نمايم.
نام و نام خانوادگي دانشجو: محيا کرمانی
تاريخ و امضاء:

(كليه حقوق مادي مترتب از نتايج مطالعات، آزمايشات و نوآوري ناشي از تحقيق موضوع اين پايان نامه متعلق به دانشگاه پيام نور مي‌باشد.)

تقدیم به

مادرم که الفبای زندگی را در مکتب نگاه او آموختم

و پدرم که هنوز انشای سال های کودکی از وصف مهربانی های او قاصر است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید(نهج البلاغه، خطبه شماره۱).

پیشانی شکر بر آستان حضرتش می سایم که به من شور گام نهادن در مسیر فراگیری دانش را عطا فرموده و مرا در تمام تحصیل یاری نمود.

در آغاز به رسم ادب بر دستان پر مهر پدر و مادر مهربانم بوسه می زنم که از شیره جانشان مرا پروراندند تا توان راه رفتن و اندیشه را بیابم.

همچنین بر خود بایسته می دانم از زحمات بی دریغ استاد فرزانه ام سرکار خانم دکتر فهیمه سلطانیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. از جناب آقای دکتر مرتضی گرشاسبی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و بارو شنگری ها و صبر و حوصله خود در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین از سرکار خانم دکتر مریم شمس سولاری که با تجارب ارزنده شان در داوری و ارزیابی این پایان نامه اهتمام ورزیده اند، با قلبی سرشار از ادب و ارادت کمال سپاس گزاری را دارم.

در پایان قدردانم کمک های بی دریغ آقای سعید کاظم که مرا تا همیشه وامدار سپاس گزاری از ایشان می نماید.

محیا کرمانی

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

در سال‌های اخیر توسعه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دلیل سرعت محاسباتی بالا اهمیت زیادی پیدا کرده است. یکی از روش‌های مرسوم در تقریب جواب معادلات دیفرانسیل، گسسته کردن آن‌ها می‌باشد. بنا به نوع گسسته‌سازی، دو دسته از روش‌های مبتنی بر شبکه و بدون شبکه پدید آمده‌اند.

در این پایان‌نامه با استفاده از روش هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی $(RBFs)$ که در واقع در رده روش‌های بدون شبکه قرار می‌گیرد، به حل مسئله مقدار مرزی غیرموضعی با شرایط مرزی نیومن می‌پردازیم. ابتدا مفهوم توابع پایه‌ای شعاعی را بررسی می‌کنیم، سپس این توابع را در مسئله‌ی درونیابی داده‌های پراکنده به‌کار می‌بندیم و درونیابی با توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت و معین مثبت شرطی را بیان می‌کنیم. از آنجایی که پارامتر شکل نقش مهمی در کیفیت این تقریبات دارد، این پارامتر را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس از آن روش توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل معادله انتشار دوبعدی با شرط غیرموضعی شرح می‌دهیم. در پایان برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی در حل این دسته از معادلات، به ارائه چند مثال عددی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: *توابع پایه‌ای شعاعی، شرط مرزی نیومن، مسئله مقدار مرزی غیرموضعی، معادلات با مشتقات جزئی سهموی، پارامتر شکل.*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌خصوص معادلاتی که از مسائل کاربردی حاصل می‌شوند، بسیار مشکل و اکثر مواقع ناممکن است. از این رو دانشمندان و مهندسان به‌دنبال ارائه روش‌های عددی مناسب برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی این معادلات هستند. از محبوب‌ترین روش‌های عددی موجود می‌توان به روش‌های عناصر متناهی، تفاضلات متناهی، حجم‌های متناهی و عناصر مرزی اشاره کرد. در واقع این روش‌ها بر پایه شبکه‌بندی دامنه و یا مرز معادلات هستند. روش‌های فوق علاوه بر محبوبیتی که دارند، دارای معایبی نیز هستند. مثلاً تمامی آن‌ها در مورد مسائل با ابعاد بالاتر از دو یا سه، به مشکلات عمده‌ای در اجرا برمی‌خورند، همچنین دقتشان وابسته به شبکه‌بندی است و اگر نیاز به جواب‌های دقیق‌تری باشد باید از شبکه‌های ریزتری استفاده کرد. با وجود اینکه این روش‌ها برای حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی مؤثرند، در دامنه‌های نامنظم و ناهموار دقت پایینی دارند و این معایب، قابلیت اجرائی این روش‌ها را محدود کرده است. از این رو، در سال‌های اخیر تلاش‌ها به سمت حذف شبکه از الگوریتم روش‌ها بوده است. در واقع، دانشمندان سعی در ایجاد و توسعه روش‌هایی دارند که بدون نیاز به شبکه، به حل معادلات دیفرانسیل و تقریب جواب‌های آن بپردازد. این دسته از روش‌ها، به روش‌های بدون شبکه معروف شده‌اند. این روش‌ها تنها براساس مجموعه‌ای از نقاط پراکنده در دامنه صورت می‌پذیرد و به اتصال این نقاط از قبل، نیازی نیست. روش‌های بدون شبکه، به‌دلیل انعطاف‌پذیری آن‌ها و دقت بالای جواب‌های عددی حاصل، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده‌اند. در روش‌های بدون شبکه، نیازی به تولید یک شبکه منظم در دامنه مسئله نمی‌باشد که با توجه به هزینه محاسباتی بالای تولید شبکه، این خصوصیت مزیت اصلی این روش‌ها نسبت به روش تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و $\cdots$ است.

امروزه روش توابع پایه‌ای شعاعی $(RBFs)$ به‌عنوان ابزار قدرتمندی برای مسئله درونیابی داده‌های پراکنده شناخته شده است. در این روش داده‌ها توسط ترکیب خطی از انتقال‌های یک تابع، درونیابی می‌شوند. استفاده از این

پایه‌ها در حل مسائل زمین‌شناسی، مکانیک سیالات، ژئوفیزیک، نقشه‌برداری و هواشناسی بوده است. همچنین این روش‌ها در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل، هوش مصنوعی، شبکه‌های عصبی و $\cdots$ به‌کار می‌روند. استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی به‌عنوان روشی بدون شبکه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی براساس روش هم‌محلی می‌باشد. مزیت اصلی روش‌های عددی که از توابع پایه‌ای شعاعی استفاده می‌کنند، خاصیت بدون شبکه بودن آنها است، به عنوان مثال [۲۸]، را ببینید. یکی از معایب روش‌های بدون شبکه مبتنی بر روش هم‌محلی، پر و بدوضع بودن ماتریس‌های ناشی از گسسته‌سازی است. عدد شرطی بالای این ماتریس‌ها، از پایداری روش می‌کاهد. از مهمترین توابع پایه‌ای شعاعی می‌توان به توابع چندمربعی (MQ)، چندمربعی معکوس (IMQ)، گاوسی (GA) و اسپلاین صفحه باریک (TPS) اشاره کرد. در ادامه تاریخچه مختصری از روش توابع پایه‌ای شعاعی ارائه شده است.

روش توابع پایه‌ای شعاعی نخستین بار در سال ۱۹۶۸ توسط زمین‌شناسی به نام رولند هاردی[۱] که به‌دنبال روشی مؤثر برای درونیابی داده‌های پراکنده بود، ابداع شد. او به‌دنبال روشی برای یک مسئله نقشه‌برداری بود، او به تابعی مناسب برای ایجاد نقشه‌ای با خطای کم از داده‌هایی اندک و پراکنده نیاز داشت. تا آن زمان توابع درونیاب دیگری مانند روش‌های درونیابی فوریه یا چندجمله‌ای، برای تقریب سطوح در نقشه‌برداری ارائه شده بود که هر کدام مشکلات خاص خود را داشت. برای مثال روش درونیابی چندجمله‌ای با داده‌های پراکنده، قادر به ارائه تقریبی دقیق برای تغییرات ناگهانی در سطوح نبود و همچنین سری‌های فوریه، تابعی با نوسان زیاد بین نقاط درونیابی ایجاد می‌کرد. این مشکلات در روش‌های مذکور، هاردی را به سمت ارائه روشی جدید سوق داد که کاستی‌های روش‌های قبلی را نداشته باشد. ابتکار هاردی در این بود که یک تابع مانند $\phi(r)$ را در نظر گرفت و با انتقال آرگومان این تابع توسط گره‌ها، پایه‌های درونیابی را به‌وجود آورد. در نهایت هاردی روش چندمربعی (MQ) را ابداع کرد [۲۶]. تا سال ۱۹۷۹، درونیابی چندمربعی هاردی چندان مورد توجه قرار نگرفت. در این سال ریاضیدانی به نام ریچارد فرانک[۲] حدود ۳۰ روش درونیابی را برای تقریب داده‌های پراکنده به‌کار برد و نشان داد درونیابی چندمربعی و همچنین درونیابی اسپلاین صفحه باریک (TPS) بهترین جواب‌ها را به‌دست می‌دهند [۱۰]. فرانک همچنین حدس زده بود ماتریس درونیابی حاصل از این روش‌ها، معکوس‌پذیر است ولی

[۱] Roland Hardy

[۲] Richard Franke

نتوانست آن را اثبات کند. سرانجام در سال ۱۹۸۶، چارلز میچلی[۳] به توسعه تئوری این روش‌ها پرداخت و ثابت کرد دستگاه حاصل از گسسته‌سازی این روش‌ها، معکوس‌پذیر است.

در ابتدا روش RBF برای درونیابی داده‌های پراکنده و توابع چندمتغیره مطرح شد، اما بعد از مدتی ویژگی بدون شبکه بودن توابع پایه‌ای شعاعی انگیزه‌ای شد تا محققان از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ($PDEs$) استفاده کنند. ادوارد کانسا[۴] در سال ۱۹۹۰ نخستین گام را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برداشت [۲۸، ۲۹].

اخیراً روش کانسا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مختلفی شامل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا، معادله سهموی مرتبه دوم با شرایط مرزی غیرموضعی، معادله کلین-گوردن[۵] غیرخطی، معادله موج بلند منظم (RLW)، دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی، معادله تلگراف هیپربولیک مرتبه دوم، معادلات بی‌هارمونیک دوبعدی و معادلات انتقال گرما به‌کار گرفته شده است.

به منظور توسعه نظری توابع پایه‌ای شعاعی در درونیابی داده‌های پراکنده، در سال ۱۹۹۲، مدیچ[۶] و نلسون[۷] نشان دادند که درونیاب $MQ-RBF$ از نرخ همگرایی نمایی برخوردار است [۳۴].

در مطالعه اولیه، توابع پایه‌ای شعاعی با تکنیک سرتاسری برای حل PDEها به‌کار برده می‌شدند. در این روش، تکیه‌گاه هر گره کل دامنه را شامل می‌شود. بنابراین دستگاه معادلات خطی حاصل معمولاً دارای عدد شرطی بسیار بزرگ است و با افزایش گره‌ها به سمت بدوضع‌تر شدن میل می‌کند. برای چیره شدن بر این مشکل، کانسا و هان[۸] روش تجزیه دامنه را پیشنهاد کردند.

کتاب‌ها و مقاله اخیر نوشته شده توسط بوهمن[۹] [۶، ۷] و وندلند[۱۰] [۴۳] اطلاعات مفیدی درباره توابع پایه‌ای

[۳] Charles Micchelli

[۴] Edward Kansa

[۵] Klein-Gordon

[۶] Madych

[۷] Nelson

[۸] Hon

[۹] Buhmann

[۱۰] Wendland

شعاعی و نرخ همگرایی آن‌ها ارائه کرده است.

در این پایان‌نامه از توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی برای پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی با شرایط مرزی غیرموضعی استفاده می‌کنیم. در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم، توابع پایه‌ای شعاعی و ابزارهای لازم برای آنالیز آن‌ها را توصیف می‌کنیم. در فصل سوم به حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی می‌پردازیم. در پایان در فصل چهارم حل مسائل مقدار مرزی غیرموضعی را توسط توابع پایه‌ای شعاعی بیان می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱.۱. τ یک تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W است، هرگاه برای هر $f,g \in V$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

$$\tau(\alpha f + g) = \alpha \tau f + \tau g.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای اندازه دلخواه با اندازه مثبت μ، $\circ \leqslant P \leqslant \infty$ و f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد. نرم L^pی f را با نماد $\|f\|_p$ نمایش داده و به‌صورت

$$\|f\|_p = \Big\{ \int_X |f|^p d\mu \Big\}^{۱/p},$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. تابع Γ (گاما) برای هر $z \in \mathbb{C}$ به‌صورت

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+۱)\cdots(z+n)},$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. تابع بسل نوع اول از مرتبه $v \in \mathbb{C}$ را با نماد J_v نمایش داده و برای هر $z \in \mathbb{C} - \{\circ\}$ به‌صورت

$$J_v(z) = \sum_{m=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^m (z/۲)^{۲m+v}}{m!\Gamma(v+m+۱)},$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. تابع $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ هموار نامیده می‌شود، هرگاه مشتقاتش از هر مرتبه‌ای موجود باشد.

تبدیل‌های انتگرالی

تبدیل‌های انتگرالی یکی از قدرتمندترین ابزارها در آنالیز هستند. این تبدیل‌ها نه تنها در مشخص کردن توابع معین مثبت به ما کمک می‌کنند، بلکه کاربردهای دیگری نیز دارند. در این قسمت به‌طور مختصر به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۶.۱.۱. تبدیل فوریه برای تابع $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ را با نماد $\hat{f}(\mathrm{x})$ نمایش داده و به‌صورت

$$\hat{f}(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega) e^{-i\mathrm{x}^T\omega} d\omega,$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱. تبدیل فوریه معکوس برای تابع $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ را با نماد $\check{f}(\mathrm{x})$ نمایش داده و به‌صورت

$$\check{f}(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega) e^{i\mathrm{x}^T\omega} d\omega,$$

تعریف می‌کنیم.

نتیجه ۸.۱.۱. *اگر $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ تابعی پیوسته و دارای تبدیل فوریه $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ باشد پس f می‌تواند از تبدیل فوریه‌اش دوباره به‌دست آید:*

$$f(\mathrm{x}) = (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{i\mathrm{x}^T\omega} d\omega, \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید f تابعی قطعه‌ای پیوسته و ثابت‌های a و M وجود داشته باشند به‌طوری‌که $|f(t)| \le Me^{at}$. تبدیل لاپلاس تابع f را با نماد $\mathcal{L}f(s)$ نمایش داده و به‌صورت

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \qquad s > a,$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۱ مفاهیمی از جبر خطی

با توجه به اینکه روش‌های تقریب برای تعیین جواب معادلات دیفرانسیل، پس از گسسته‌سازی به حل دستگاه خطی $AX = b$ می‌انجامد، در این بخش به‌صورت مختصر به بیان مطالبی درباره دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم.

ماتریس‌های معین مثبت

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس متقارن حقیقی A نیمه معین مثبت نامیده می‌شود اگر صورت مربعی متناظر با آن نامنفی باشد، یعنی

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha_j\alpha_k A_{jk} \geqslant 0,$$

که در آن $\mathbb{R}^N \ni [\alpha_1, \cdots, \alpha_N] = \alpha \neq 0$.

اگر صورت مربعی (۱.۱) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ مثبت باشد، A را معین مثبت گوییم.

ویژگی مهم ماتریس‌های معین مثبت، مثبت بودن مقادیر ویژه آن است. بنابراین هر ماتریس معین مثبت نامنفرد است [۱۸].

در اینجا تعدادی از ویژگی‌های ماتریس‌های معین مثبت را بیان می‌کنیم:

۱. ماتریس معین مثبت همواره معکوس‌پذیر است.

۲. برای ماتریس معین مثبت A، $det(A) \neq 0$ است.

۳. ماتریس A معین مثبت است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند.

۴. اگر $A = a_{ij}$ معین مثبت باشند آنگاه به ازای همه مقادیر i، $a_{ii} > 0$.

۵. مجموع دو ماتریس معین مثبت، یک ماتریس معین مثبت است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ مجموعه‌ای از نقاط در دامنه کراندار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ باشد. فاصله‌ی پر این مجموعه با توجه به دامنه Ω به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{X,\Omega} = \sup_{x\in\Omega}\min_{x_j\in X}\|x - x_j\|_2, \qquad (1.1)$$