بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه دستاوردهای این تحقیق
متعلق به دانشگاه الزهرا (س) است.

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

ایده‌آل منظم ماکزیمال برخی حلقه‌های جابه‌جایی

استاد راهنما

دکتر ناهید هادیان دهکردی

دانشجو

نسیبه آخوندی

دی‌ماه سال ۱۳۹۳

تقدیم به پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی راتجربه نمایم

تقدیم به مادرم

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خدای را، آن نخستین بی پیشین و آن آخرین بی پسین را، خداوندی را که دیده ی بینایان از دیدارش قاصر آید و اندیشه واصفان از نعمت او فرو ماند. آفریدگان را به قدرت خود ابداع کرد و به مقتضای مشیت خویش جامه ی هستی پوشاند و به همان راه که ارادت او بود روان داشت و رهسپار طریق محبت خویش گردانید.[1]

در آغاز وظیفه خود می دانم از استاد فرهیخته ام سرکار خانم دکتر ناهید هادیان دهکردی که در کمال سعه صدر از هیچ کمکی در این عرصه از من دریغ ننمودند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

---

[1] صحیفه سجادیه

چکیده

ما در این پایان نامه ابتدا به بررسی عناصر منظم ون‌نیومن، $\pi-$منظم، موضعی ون‌نیومن و عناصر تمیز در یک حلقه و رابطه این عناصر با یکدیگر می‌پردازیم. هم‌چنین اگر یک حلقه شامل عناصری باشد که منظم ون‌نیومن هستند، در این صورت این حلقه دارای یک ایده‌آل منظم ماکزیمال می‌باشد. وجود این ایده‌آل منظم ماکزیمال در سال ۱۹۵۰ توسط براون و مک کوی نشان داده شده است. در یک حلقه جابه‌جایی و یکدار باشد، مشخص کردن این ایده‌آل ماکزیمال، اغلب آسان نمی‌باشد. هدف ما در این پایان‌نامه مشخص کردن این ایده‌آل ماکزیمال در حلقه های زیر می‌باشد:

۱) حلقه‌های موضعی ون‌نیومن و موضعی ون‌نیومن قوی که ایده‌آل ماکزیمال ذکر شده در این حلقه ها غیر صفر است.

۲) حلقه‌های چندجمله ای و سری توانی که دارای ایده‌آل منظم ماکزیمال صفر می‌باشند.

۳) حلقه‌ای که حاصل‌ضربی از حلقه‌های موضعی باشد. در این حالت نیز شرایطی را تعیین می‌کنیم که ایده‌آل منظم ماکزیمال این حلقه غیرصفر است. هم‌چنین شرایط پیچیده ای لازم است که نشان دهیم ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه $\mathbb{Z}_n[i]$ چه زمانی غیر صفر می‌باشد. به طور خاص ایده‌آل منظم ماکزیمال این حلقه متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی : حلقه های جابه‌جایی، حلقه منظم ون‌نیومن، حلقه موضعی ون‌نیومن، حلقه تمیز، حلقه‌های چندجمله‌ای، حلقه‌های سری توانی، حلقه اعداد صحیح گاؤسی، ایده‌آل ماکزیمال، ایده‌آل محض

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$vnr(R)$ مجموعه اعضای ون‌نیومن منظم حلقه R

$nvr(R)$ مجموعه اعضایی از حلقه R که ون‌نیومن منظم نیستند

$vnl(R)$ مجموعه اعضای موضعی ون‌نیومن حلقه R

$\pi - r(R)$ مجموعه اعضای $\pi-$منظم حلقه R

$cln(R)$ مجموعه عناصر تمیز حلقه R

$nil(R)$ مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R

$Idem(R)$ مجموعه عناصر خودتوان حلقه R

$U(R)$ مجموعه عناصر یکه حلقه R

$Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R

$J(R)$ اشتراک ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه R

$max(R)$ مجموعه ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه R

$spec(R)$ مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R

$\sqrt{I}$ رادیکال ایده‌آل I

$ann_R(I)$ پوچساز ایده‌آل I در حلقه R

$dim(R)$ بُعد کرول حلقه R

$R[x]$ حلقه چندجمله‌ای روی حلقه R

$R[[x]]$	حلقه سری توانی روی حلقه R
$\mathbb{Z}_n[i]$	حلقه اعداد صحیح گاؤسی به پیمانه n
$R(+)M$	ایده‌آل‌سازی از $R-$مدول M
mI	قسمت محض ایده‌آل I
$\mathfrak{M}(R)$	ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه R
$O_{\mathcal{M}}$	اشتراک ایده‌آل‌های اول مشمول در ایده‌آل ماکزیمال $\mathcal{M}$
$char(R)$	مشخصه حلقه R
$T(R)$	حلقه کسرهای حلقه R در مجموعه T که $T = R\backslash Z(R)$
R_P	موضعی سازی حلقه R نسبت به ایده‌آل اول P

فهرست مطالب

مقدمه

مبحث حلقه‌های منظم ون‌نیومن که عنوان مفصل آن در حلقه‌های جابه‌جایی نیز مورد استفاده قرار گرفته است، قسمتی از نظریه حلقه‌های ناجابجایی می‌باشد که در سال ۱۹۳۶ توسط جان ون‌نیومن [۲]، در طول مدت مطالعه‌اش روی جبرهای ون‌نیومن و هندسه پیوسته معرفی شد. حلقه‌های منظم ون‌نیومن به طور گسترده در چندین سال مورد مطالعه قرار گرفتند. فایت [۳] در سال ۱۹۷۶ و گودیرل [۴] در سال ۱۹۷۹، از جمله افرادی هستند که این حلقه‌ها را به طور مفصل مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۱۹۵۰ براون [۵] و مک‌کوی [۶] نشان داده‌اند که اگر حلقه‌ی R دارای عناصر منظم ون‌نیومن باشد، آن‌گاه این حلقه دارای یک ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{M}(R)$ است و این ایده‌آل را ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه R نامیدند. در حالتی که R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است، مشخص کردن این ایده‌آل منظم ماکزیمال اغلب کار آسانی نیست. در این پایان‌نامه این ایده‌آل را برای رده‌ای از حلقه‌های جابه‌جایی مانند R مشخص می‌کنیم:

۱) زمانی که به ازای هر $a \in R$، a یا $1 - a$ منظم ون‌نیومن باشد.

۲) R یک حلقه چندجمله‌ای یا سری توانی باشد.

۳) هنگامی‌که حلقه R، حاصل‌ضربی از حلقه‌های موضعی باشد.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می‌باشد که به ترتیب زیر تنظیم شده است:

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی در زمینه جبر جابه‌جایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند که اکثر قضایا و گزاره‌ها در این فصل بدون اثبات آورده شده است.

فصل دوم شامل چهار بخش می‌باشد. در بخش اول نتایج اساسی در زمینه عناصر منظم ون‌نیومن را فراهم می‌کنیم که بیشتر این نتایج در زمینه حلقه‌های منظم ون‌نیومن نیز شناخته خواهند شد. به طور خاص نشان می‌دهیم که هر عضو حلقه R، پوچ‌توان یا منظم ون‌نیومن است اگر و تنها اگر حلقه R دارای بُعد صفر

---

[۲] von.Neumann John
[۳] C.Faith
[۴] K.R.Goodearl
[۵] B.Brown
[۶] N.McCoy

و هم‌چنین R موضعی یا کاهشی باشد. علاوه‌براین نشان خواهیم داد، زمانی که R حوزه صحیح نیست، مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R منظم ون‌نیومن هستند. هم‌چنین شرایط لازم و کافی برای این‌که مجموعه عناصر منظم ون‌نیومن حلقه R زیرحلقه‌ای از R باشد، فراهم می‌کنیم.

در بخش دوم این فصل عناصر $\pi-$منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این عناصر برای اولین بار در سال ۱۹۳۹ توسط مک کوی به عنوان تعمیمی از حلقه‌های منظم ون‌نیومن معرفی شدند. مک کوی بیشتر توجه خود را روی حلقه‌های $\pi-$منظمی متمرکز کرده است که جابجایی هستند. مطالعه در حالت عام آن در دهه‌های بعد توسط دیگر ریاضی‌دانان ادامه پیدا کرد. به عنوان مثال آزومایا [۷] ، تمیناگا [۸] و یامادا [۹] حلقه‌های $\pi-$منظمی را بررسی کردند که محدود به اندیس پوچ‌توان خود هستند. ما در این بخش چندین نتیجه که مشابه آن را برای عناصر منظم ون‌نیومن مطرح کردیم، برای عناصر $\pi-$منظم نیز بیان می‌کنیم. به طور خاص نشان می‌دهیم $\pi - r(R) = vnr(R) + nil(R)$. هم‌چنین ثابت می‌کنیم $\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$ اگر و تنها اگر $vnr(R) = U(R) \cup \{0\}$ یا $nil(R) = \{0\}$. علاوه‌براین نشان می‌دهیم اگر مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R زیرمجموعه‌ای از مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه نباشد، در این‌صورت R، $\pi-$منظم است اگر و تنها اگر مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه همگی $\pi-$منظم باشند.

در بخش سوم این فصل به مطالعه عناصر موضعی ون‌نیومن می‌پردازیم. عناصر موضعی ون‌نیومن برای اولین بار توسط کانتسا [۱۰] در سال ۱۹۸۴ معرفی شدند. ما در این بخش خواص این عناصر و رابطه این اعضا را با عناصر منظم ون‌نیومن مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم اگر به ازای هر $i \in I$، R_i یک حلقه جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $vnl(\prod R_i) \subseteq \prod(vnl(R_i))$. سپس شرایطی را تعیین می‌کنیم که حالت تساوی نیز برقرار باشد.

در بخش چهارم عناصر تمیز را بررسی می‌کنیم. این عناصر برای اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط نیکلسون [۱۱] معرفی شدند. اندرسون [۱۲]، کامیلو [۱۳] و هان [۱۴] از جمله افرادی هستند که مطالعاتی در زمینه حلقه‌های تمیز داشته‌اند. ما در این بخش خواص این عناصر و رابطه این اعضا را با عناصر منظم ون‌نیومن، $\pi-$منظم و موضعی ون‌نیومن مطالعه می‌کنیم.

فصل سوم مشتمل بر چهار بخش می‌باشد. در بخش اول به معرفی ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه R و خواص این ایده‌آل می‌پردازیم. در بخش دوم به بررسی حلقه‌های موضعی ون‌نیومن قوی و رابطه این حلقه‌ها

---

[۷] G.Azumaya
[۸] H.Tominaga
[۹] T.Yamada
[۱۰] M.Contessa
[۱۱] W.K.Nicholson
[۱۲] D.D.Anderson
[۱۳] V.P.Camillo
[۱۴] J.Han

با حلقه‌های موضعی ون‌نیومن می‌پردازیم. هم‌چنین ایده‌آل منظم ماکزیمال این دو حلقه را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم ایده‌آل منظم ماکزیمال چنین حلقه‌هایی در شرایط خاصی غیرصفر است. در بخش سوم عناصر منظم ون‌نیومن، $\pi-$منظم، موضعی ون‌نیومن حلقه‌های چندجمله‌ای و سری توانی را مشخص می‌کنیم و نشان می‌دهیم ایده‌آل منظم ماکزیمال چنین حلقه‌هایی صفر می‌باشد. در بخش پایانی این فصل ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که حاصل‌ضربی از حلقه‌های موضعی است و شرایطی را تعیین می‌کنیم که این ایده‌آل غیرصفر باشد. با توجه به این‌که ایده‌آل منظم ماکزیمال حلقه‌های متناهی غیرصفر است، با این حال شرایط پیچیده‌ای لازم است که مشخص کنیم، $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_n[i]) \neq \{\circ\}$. ما به طور خاص این شرایط را برای حلقه $\mathbb{Z}_n[i]$ فراهم می‌کنیم.
مقاله‌های اصلی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند مراجع [۳] و [۷] می‌باشند.

نسیبه آخوندی

دی‌ماه ۱۳۹۳

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان مفاهیمی از جبر جابه‌جایی، جبر پیشرفته و نظریه اعداد می‌پردازیم و تعاریف و قضایای مقدماتی را مطرح می‌کنیم که مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند و با فرض آشنا بودن خواننده با این مطالب، بیشتر گزاره‌ها و قضایا را بدون اثبات می‌آوریم. هم‌چنین در سرتاسر این پایان‌نامه حلقه R جابه‌جایی و یکدار در نظر گرفته می‌شود.
بیشتر مطالب این فصل از مرجع [۹] و [۲۴] برگرفته شده‌اند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. ایده‌آل P از حلقه R اول نامیده می‌شود اگر $P \neq R$ و به ازای هر $a, b \in P$ اگر $ab \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

نمادگذاری ۲.۱.۱. *مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R با $Spec(R)$ نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۳.۱.۱. ایده‌آل اول P از حلقه R یک ایده‌آل اول مینیمال از ایده‌آل I نام دارد، اگر $I \subsetneqq P$ و ایده‌آل اولی چون Q موجود نباشد به طوری‌که $I \subsetneqq Q \subsetneqq P$.

تعریف ۴.۱.۱. ایده‌آل $\mathcal{M}$ را از حلقه R ماکزیمال نامیم هرگاه $\mathcal{M} \neq R$ و هیچ ایده‌آلی مانند $\mathcal{N}$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{N} \subsetneqq R$

نمادگذاری ۵.۱.۱. *مجموعه ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه R با $max(R)$ نمایش داده می‌شود.*

گزاره ۶.۱.۱. *فرض کنید M و P، ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

۱) *ایده‌آل $\mathcal{M}$ از حلقه R، ماکزیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\mathcal{M}}$ میدان باشد.*

۲) *P یک ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح باشد.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۹] □

قضیه ۷.۱.۱. *هر ایده‌آل ماکزیمال از حلقه R اول است. (توجه کنید که R حلقه‌ای جابجایی و یکدار می‌باشد.)*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۹.۲.۳ مرجع [۲۴] □

گزاره ۸.۱.۱. *هر حلقه غیرصفر R دارای یک ایده‌آل ماکزیمال است و هر ایده‌آل واقعی درون یک ایده‌آل ماکزیمال می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۳.۱ و ۴.۱ مرجع [۹] □

نتیجه ۹.۱.۱. *هر عنصر نایکه درون یک ایده‌آل ماکزیمال قرار دارد.*

برهان. اثبات با توجه به گزاره قبل واضح است.

□

تعریف ۱۰.۱.۱. اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه R رادیکال جیکوبسن حلقه R نامیده می‌شود و با $J(R)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۱۱.۱.۱. *به ازای هر $x \in R$، $x \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in R$، $1 - xy$ عنصری یکه باشد.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۹ مرجع [۹] □

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت رادیکال I که با $\sqrt{I}$ نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n > 0 : x^n \in I\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه R یک ایده‌آل رادیکال نامیده می‌شود هرگاه $I = \sqrt{I}$.

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در این‌صورت:*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in Spec(R) \\ P \supseteq I}} P$$

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۴.۱ مرجع [۹]. □

تعریف ۱۵.۱.۱. عنصر $a \in R$ پوچ‌توان نامیده می‌شود، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $a^n = 0$. مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R پوچ‌رادیکال حلقه R نامیده می‌شود و با $nil(R)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۱.۱.۱۶. *مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R اشتراک ایده‌آل‌های اول می‌باشد. به عبارت دیگر:*

$$nil(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

گزاره ۱.۱.۱۷. *گزاره‌های زیر برقرارند.*

۱) *$nil(R)$ تشکیل یک ایده‌آل می‌دهد.*

۲) *حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{nil(R)}$ هیچ عنصر غیر صفر پوچ‌توانی ندارد.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۷ مرجع [۹] □

گزاره ۱.۱.۱۸. *اگر $a \in R$ پوچ‌توان باشد آن‌گاه $a + ۱$ یکه است و این نتیجه می‌دهد که حاصل‌جمع یک عنصر یکه و پوچ‌توان، یکه می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به تمرین ۱.۱ مرجع [۹] □

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد.

۱) I یک ایده‌آل پوچ نامیده می‌شود، هر گاه هر عضو I پوچ‌توان باشد.

۲) ایده‌آل I پوچ‌توان است، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $I^n = ۰$.

بدیهی است که هر ایده‌آل پوچ‌توان یک ایده‌آل پوچ است. ولی عکس این مطلب صحیح نمی‌باشد.

قضیه ۱.۱.۲۰. *فرض کنید I یک ایده‌آل پوچ از حلقه R باشد و $a \in R$ به‌طوریکه $a + I \in \frac{R}{I}$ خودتوان باشد. در این‌صورت یک عنصر خودتوان $e \in R$ موجود است که $e + I = a + I$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۱.۲۸ مرجع [۲۱]. □

گزاره ۱.۱.۲۱. *در یک حلقه آرتینی هر ایده‌آل اول ماکزیمال است.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۸.۱ مرجع [۹] □

نتیجه ۱.۱.۲۲. *فرض کنید R یک حلقه آرتینی باشد. در این‌صورت $nil(R) = J(R)$.*

برهان. بنابر گزاره ۱.۱.۲۲ و ۱.۱.۷ واضح است. □

گزاره ۱.۱.۲۳. *در هر حلقه آرتینی پوچ‌رادیکال، پوچ‌توان است.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۸.۴ مرجع [۹] □

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند به طوریکه $I + J = R$. در این صورت گوییم I و J نسبت به هم اولند.

گزاره ۲۵.۱.۱. *فرض کنید $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند که به ازای هر $i \neq j$، I_i و I_j نسبت به هم اول می‌باشند. در این‌صورت:*

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۰.۱ مرجع [۹]. □

قضیه ۲۶.۱.۱. ***قضیه باقیمانده چینی:*** *فرض کنید $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. اگر به ازای هر $j \neq k$، I_j و I_k نسبت به هم اولند. در این‌صورت یکریختی زیر موجود است:*

$$f : \frac{R}{\bigcap_{i=1}^{n} I_i} \longrightarrow \frac{R}{I_1} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲۷.۲.۳ مرجع [۲۴] □

نتیجه ۲۷.۱.۱. *اگر $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$ به ازای $n \in \mathbb{Z}$، تجزیه به عوامل اول باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}_n$ یک حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های $\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ است.*

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه متناهی باشد. در این صورت R با حاصل‌ضرب مستقیمی از حلقه‌های موضعی یکریخت است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۳.۱.۴ مرجع [۱۰]. □

قضیه ۲۹.۱.۱. ***قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول:*** *فرض کنید $P, P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول و $I, I_1, \cdots I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

۱) *اگر $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$، آن‌گاه $i \in I$ موجود است که $I \subseteq P_i$.*

۲) *اگر $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$، آن‌گاه $i \in I$ موجود است که $I_i \subseteq P$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۱۱ مرجع [۹]. □

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. پوچساز I نسبت به R که با علامت $ann_R I$ نشان داده می‌شود عبارتست از:

$$ann_R I = \{r \in R \mid \forall x \in I : rx = 0\}$$

هم‌چنین پوچساز I نسبت به R با $(\circ : I)$ نیز نشان داده می‌شود.

گزاره ۳۱.۱.۱. *فرض کنید M یک $R-$مدول و N زیرمدولی از M باشد. آن‌گاه $\frac{M}{N}$ نیز یک $R-$مدول است. هم‌چنین اگر I ایده‌آلی از حلقه R و $I \subseteq ann_R M$، آن‌گاه M یک $\frac{R}{I}-$مدول است.*

برهان. اثبات واضح است. □

گزاره ۳۲.۱.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای غیرصفر باشد. در این‌صورت R میدان است، اگر و تنها اگر ایده‌آل‌های R فقط صفر و R باشند.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱.۲ مرجع [۹] □

تعریف ۳۳.۱.۱. حاصل‌جمع مستقیم خانواده‌ای از حلقه‌های $\{R_i\}_{i\in I}$ که با نماد $\bigoplus_{i\in I} R_i$ نشان داده می‌شود عبارتست از:

$$\bigoplus_{i\in I} R_i = \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i \mid \text{به ازای تعداد متناهی } i\text{، } a_i \neq \circ\}$$

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه باشد و $\{I_i\}_{i=۱}^{n}$ گردایه‌ای از ایده‌آل‌های حلقه R باشد. در این‌صورت $R = I_۱ \oplus \cdots \oplus I_n$ اگر و تنها اگر عناصر خودتوان $e_i \in I_i$ که $۱ \leq i \leq n$ موجود باشد به‌طوری‌که:*

۱) $e_۱ + \cdots + e_n = ۱$

۲) *به ازای هر* $۱ \leq i \leq n$، $Re_i = I_i$.

۳) *به ازای هر* $i \neq j$، $e_i e_j = \circ$.

برهان. رجوع شود به تمرین ۲۴.۲.۳ مرجع [۲۴]. □

تعریف ۳۵.۱.۱. اگر حلقه R فقط یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد در این‌صورت R را موضعی می‌نامیم.

گزاره ۳۶.۱.۱. *حلقه R موضعی است اگر و تنها اگر مجموعه عناصر نایکه آن تشکیل یک ایده‌آل واقعی دهد. در واقع مجموعه همه عناصر نایکه R همان ایده‌آل ماکزیمال منحصربه‌فرد حلقه R می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۳.۴.۳ مرجع [۲۴]. □

گزاره ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n > ۱$ باشد. در این‌صورت $\mathbb{Z}_n$ موضعی است اگر و تنها اگر عدد اول مثبت p و عدد صحیح $k > ۱$ موجود باشد که $n = p^k$.*

برهان. رجوع شود به مثال صفحه ۲۳۰ مرجع [۲۴]. □

نتیجه ۳۸.۱.۱. *به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، حلقه $\mathbb{Z}_n$ میدان است اگر و تنها اگر n یک عدد اول باشد.*

تعریف ۳۹.۱.۱. عنصر $a \in R$ خودتوان نامیده می‌شود، هرگاه $a^2 = a$ و مجموعه عناصر خودتوان حلقه R با $Idem(R)$ نمایش داده می‌شود. حلقه R را یک حلقه بولی گوییم هرگاه همه اعضای R خودتوان باشند.

قضیه ۴۰.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه موضعی باشد. در این صورت عناصر خودتوان R فقط صفر و یک می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به تمرین ۱۲.۱ مرجع [۹]. □

گزاره ۴۱.۱.۱. *فرض کنید $g : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ها و S، زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه A باشد، به‌طوریکه به ازای هر $s \in S$، $g(s)$ در B یکه است. در این صورت همریختی منحصر به فرد $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ موجود است که $g = hof$ و $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ یک همریختی حلقه‌ها می‌باشد، به طوریکه به ازای هر $r \in A$، $f(r) = \frac{r}{1}$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۳.۱ مرجع [۹]. □

تعریف ۴۲.۱.۱. فرض کنید P یک ایده‌آل اول و S، زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد، به طوری‌که $S = R - P$. در این‌صورت حلقه $S^{-1}R$ که با نماد R_p نشان داده می‌شود، موضعی سازی R در P نام دارد که عبارت است از:

$$R_p = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \notin P\}$$

گزاره ۴۳.۱.۱. *به ازای ایده‌آل اول P، R_p یک حلقه موضعی می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به مثال صفحه ۳۷ مرجع [۹]. □

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنید P_0،...،P_n گردایه‌ای از ایده‌آل‌های اول حلقه R باشد به‌طوریکه:

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq P_n$$

در این‌صورت بعد حلقه R که با نماد $dim(R)$ نشان داده می‌شود عبارتست از:

$$dim(R) = sup\{n \geq 0 \mid \text{زنجیری به طول } n \text{ از ایده‌آل‌های اول } R \text{ موجود باشد}\}$$

در صورتی‌که این سوپریمم موجود نباشد، آن‌گاه گوییم $dim(R) = \infty$.

گزاره ۴۵.۱.۱. *اگر R میدان باشد آن‌گاه $dim(R) = 0$، ولی عکس این گزاره صحیح نیست. هم‌چنین در هر حلقه R که هر ایده‌آل اول آن ماکزیمال باشد آن‌گاه $dim(R) = 0$.*

برهان. اثبات بدیهی است. □

نتیجه ۴۶.۱.۱. *فرض کنید در حلقه* R، $J(R) = nil(R)$ *در این‌صورت* $dim(R) = 0$.

برهان. اثبات طبق گزاره قبل واضح است. □

قضیه ۴۷.۱.۱. *حلقه* R *دارای بعد صفر است، اگر و تنها اگر به ازای هر* $x \in R$، $r \in R$ *و* $n \in \mathbb{N}$ *موجود باشد به طوری که* $x^n = rx^{n+1}$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۳.۴ مرجع [۸]. □

قضیه ۴۸.۱.۱. *گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) *حلقه* R *دارای بُعد صفر است و* $nil(R) = \{0\}$.

۲) *به ازای هر* $P \in Spec(R)$، R_P *یک میدان است.*

۳) *هر ایده‌آل از* R *یک ایده‌آل رادیکال است.*

۴) *هر ایده‌آل از حلقه* R *خودتوان است.*

۵) *به ازای هر* $x \in R$، *عنصر* $y \in R$ *موجود است که* $x = x^2y$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۳.۱ از مرجع [۸].

□

گزاره ۴۹.۱.۱. *فرض کنید* M *یک* $R-$*مدول و* N *زیرمدولی از* M *و* I *ایده‌آلی از حلقه* R *باشد. آن‌گاه:*

$$I(\frac{M}{N}) = \frac{IM+N}{N}$$

برهان. رجوع شود به تمرین ۱.۳ مرجع [۲۳]. □

تعریف ۵۰.۱.۱. اگر عدد صحیح و مثبتی مانند n موجود باشد که $n1_R = 0$ آن‌گاه کوچکترین مقدار n را مشخصه حلقه R گوییم و با $char(R)$ نشان می‌دهیم. اگر چنین nای موجود نباشد، آن‌گاه گوییم R دارای مشخصه صفر است.

تعریف ۵۱.۱.۱. حلقه چندجمله‌ای $R[x]$ به صورت :

$$R[x] = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$$