بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی کاربردی،
گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای یک خانواده از معادلات انتگرال ولترا به طور ضعیف منفرد

استاد راهنما

دکتر سهراب بزم

استاد مشاور

دکتر علی شکری

پژوهشگر

الهام خسروی فارسانی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت از رفتارشان

محبت و از صبرشان ایستادگی را آموختم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگی‌اش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن به خاطر تو، زندانی کشیدن به خاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، تنهایی در انبوه جمعیت، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سهراب بزم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی شکری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به بهترین نحو اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر حسن مجیدیان که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند تشکر می‌کنم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، و تشکر می‌کنم از همه زحمات زیادی که برای من متحمل شدند.

الهام خسروی فارسانی

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی: خسروی فارسانی   نام: الهام

عنوان پایان‌نامه: روش‌های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای یک خانواده از معادلات انتگرال ولترا به طور ضعیف منفرد

استاد راهنما: دکترسهراب بزم   استاد مشاور: دکترعلی شکری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مراغه   دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲   تعداد صفحه: ۹۳

کلیدواژه‌ها: معادله انتگرال ولترا، هسته منفرد، روش‌های هم‌محلی

چکیده: پایان نامه حاضر برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی را ارایه می‌دهد و در ادامه در این پایان نامه خواص همگرایی روش‌های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری اسپلاینی، برای یک معادله انتگرال ولترای به طور ضعیف منفرد، که از مسایل انتقال حرارت خاصی ناشی می‌شود، را بررسی می‌کنیم. این کار روش‌ـهای عددی مربوط به مطالعات قبلی در مورد این نوع معادلات با هسته غیرفشرده را تکمیل می‌کند. همچنین یک نتیجه همگرایی کلی (سراسری) به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که اگر جواب دقیق معادله متعلق به فضای خاصی باشد می‌توان برای روش هم‌محلی تکراری یک نتیجه فوق همگرایی گسسته (نقطه‌های) به دست آورد. در پایان با چند مثال عددی نتایج نظری را شرح می‌دهیم.

فهرست مطالب

تاریخچه

معادلات انتگرال کاربردهای گوناگونی در بسیاری از حوزه‌ها مانند مکانیک محیط‌های پیوسته، نظریه‌ی پتانسیل، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه‌ی جنبشی گازها، پدیده‌ی وراثت در فیزیک و زیست شناسی، نظریه‌ی تجدید و علم پزشکی دارد [۲۲، ۱۹].

در تحقیقات قرن اخیر در نظریه‌ی کشسانی، این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده‌اند، به‌خصوص آن دسته که به معادلات انتگرال منفرد شهرت دارند. معادلات انتگرال برای سالهای زیادی است که در ریاضیات ظاهر شده‌اند و مبدا آن به تئوری انتگرال فوریه بر می‌گردد.

لیکن توسعه نظریه‌ی معادلات انتگرال در اواخر قرن ۱۹ شروع شد. و در محدوده سالهای ۱۹۰۳ – ۱۹۰۰ بود که یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا روی این نوع معادلات کار کرد. همچنین یک ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم [۱] در همان سالها روی یک روش جدید جهت حل مساله دیریکله [۲] سعی بسیاری نمود. از آن زمان تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده‌است، زیرا آنها به طور پیوسته با مسائل جدید و جالبی برخورد می‌کرده‌اند.

[۱] Fredholm
[۲] Dirichlet

معادلات انتگرال منفرد در اوایل دهه‌ی قرن جاری در ارتباط با دو مساله‌ی کاملا متفاوت توسط دو نفر معرفی شد. یکی از آنها هیلبرت [۱] بود، که به بعضی مسائل مقدار مرزی در نظریه‌ی توابع تحلیلی برخورد کرد. دیگری پوانکاره [۲] بود که در تئوری عمومی جزر و مد با معادلات انتگرال مواجه شد. نظریه‌ی معادلات انتگرال منفرد در دهه‌ی سوم و چهارم توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیراد [۳] و دو ریاضیدان روسی به نام‌های وکوا [۴] و موسخلیش ویلی [۵] توسعه پیدا کرد. قضایای فردهلم از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند.

این قضایا در ابتدا توسط فردهلم فقط برای هسته‌های پیوسته ارائه شدند ولی در ادامه افراد دیگری این قضایا را برای هسته‌های کلی‌تری تعمیم دادند. لذا لازم است از اشخاصی نظیر آقای کارلمن [۶] هم که در این راه نقش عمده‌ای داشته‌اند یاد کنیم. البته ریس [۷] با اصلاحات وسیعی که از نظریه‌ی عملگرها داشت قضایای مذکور را به صورت وسیع‌تری تعمیم داد، زیرا او به یک معادله انتگرال به صورت یک عملگر نظر انداخته و قضایای فردهلم را برای یک عملگر فشرده تعمیم داد. یکی از مسائل خوش‌وضع، معادلات انتگرال نوع دوم می‌باشد که به صورت تحلیلی توسط فردهلم حل شده است و از نظر عددی هم می‌توان با روش‌های نیستروم [۸] ، ال جندی [۹] ، بسط کمترین مربعات [۱۰] و گلرکین [۱۱] این رده از مسائل را حل کرد. معادلات نوع اول از مسائل بدوضع

[۱] D. Hlbert
[۲] H. Poincare
[۳] Zhirad
[۴] Vocva
[۵] Mosxlish vili
[۶] F. Carleman
[۷] F.Riesz
[۸] Nystrom
[۹] El-Gendi
[۱۰] Least Square Problem
[۱۱] Galerkin

هستند و چون ماهیت کامپیوترهای رقمی خطاپذیر است، براحتی نمی‌توان این نوع معادلات را حل کرد. گاهی اوقات این نوع مسائل ممکن است جواب نداشته باشد و یا اینکه جواب، منحصربفرد نباشد. این رده از مسائل را می‌توان با استفاده از روش‌های بسط، هم‌محلی [۱] ، تابع ویژه، منظم سازی [۲] ، تکراری و گلرکین سریع [۳] حل نمود.

[۱] Collocation
[۲] Regularizei
[۳] Fast Galerkin

مقدمه

معادلات انتگرال به عنوان مدل‌های ریاضی برای مسئله‌های فیزیکی متفاوت و زیادی به کار برده شده‌اند. همچنین معادلات انتگرال هنگام فرمول‌بندی مجدد مسایل دیگر در ریاضیات مطرح می‌شوند. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند، به طوری‌که اگر معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مساله‌ی مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله‌ی انتگرال متناظر آن (در صورت وجود) از نوع معادلات انتگرال فردهلم خواهد شد و اگر معادله‌ی دیفراسیل مورد نظر در قالب یک مساله‌ی مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله‌ی انتگرال متناظر آن (در صورت وجود) یک معادله‌ی انتگرال ولترا خواهد بود. لذا یک رویکرد محاسباتی برای حل معادلات انتگرال، یک شاخه‌ی ضروری از تحقیقات علمی می‌باشد.

حل عددی معادلات انتگرال با یک هسته از نوع آبل به فرم

$$p(t,s,y(s))(t-s)^{-\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

که $p(t,s,y(s))$ به اندازه کافی هموار است، توسط مؤلفان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. در این گونه معادلات یک تابع پیشرو و هموار $g(t)$ عموما به جوابی منجر می‌شود که مشتقهایش در $t=0$ بی‌کران هستند.

به عنوان یک پیامد از این رفتار ناهموار، اگر شبکه‌های یکنواخت مورد استفاده قرار گیرند آنگاه مرتبه همگرایی [۱] روشهای هم‌محلی اسپلاین چند جمله‌ای $(1-\alpha)$ خواهد بود و این مرتبه همگرایی مستقل از درجه چند جمله‌ای‌ها است [۱۰].

به منظور به دست آوردن مرتبه‌های همگرایی بهینه باید از شبکه‌های مدرج مناسب استفاده شود [۲۶، ۸، ۵]، همچنین می‌توان از شبکه‌های یکنواخت و توابع تقریب اسپلاین غیر چندجمله‌ای، به جای استفاده از توابع اسپلاین چند جمله‌ی، که منعکس کننده خاصیت منفرد بودن هستند استفاده کرد [۲۷، ۹، ۴].

لیست وسیعی ازمراجع برای حل این نوع از معادلات در [۶] آمده است. همچنین یک معادله غیر خطی ویژه از نوع آبل که در آن تابع $p(t,s,y(s))$, ناهموار است در [۱۴] مورد بررسی قرار گرفته است.

مقاله اصلی که دراین پایان نامه مورد بررسی قرارگرفته است مرجع [۱۱] است.

همچنین معادله انتگرال ولترای منفرد نوع دوم با هسته غیر فشرده

$$y(t)=\int_{0}^{t} p(t,s)y(s)ds+g(t), \qquad t\in I=(0,T] \tag{1}$$

مورد بررسی قرار گرفته است.

در این پایان نامه روش‌های هم‌محلی بر پایه توابع اسپلاین چند جمله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل اول مفاهیم مقدماتی بیان شده است. در فصل دوم قضایای وجود یکتایی جواب برای یک خانواده از معادلات انتگرال ولترای به‌طور ضعیف منفرد ارایه شده است. در فصل سوم روش‌های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری

[۱] Superconvergence

برای حل عددی این معادله انتگرال منفرد ذکر شده‌اند. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم که چند جمله‌ایهای قطعه‌ای از درجه ۱ − m روی شبکه‌های یکنواخت همگرایی سراسری از مرتبه m را نتیجه می‌دهند. کارایی جواب هم‌محلی تکراری متناظر بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم تحت شرایط مشخص بهبودی قابل ملاحظه در مرتبه‌های همگرایی در نقاط شبکه با در نظر گرفتن نقاط گاوسی به عنوان نقاط هم‌محلی حاصل می‌شود. این نتایج به طور تحلیلی ثابت می‌شوند و در پایان در فصل چهارم کارایی روشهایی ارایه شده در فصل سوم با چند مثال نشان داده می‌شود. ملاحظه می‌شود که نتایج فوق در تضاد کامل با حالت معادلات نوع آبل هستند زیرا در معادلات از نوع آبل هیچ خاصیت فوق‌همگرایی نمی‌توان به دست آورد [۷، ۱۰].

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف، قضایای مقدماتی و برخی از نمادهایی که در فصل‌های آتی مورد نیاز هستند را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

در بررسی پاره‌ای از معادلات انتگرال به معادلاتی برخورد می‌کنیم که در آنها تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. مهمترین این نوع از معادلات، معادلات انتگرال فردهلم [۱] و ولترا [۲] می‌باشند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. معادله‌ی انتگرال [۳]: یک معادله انتگرال معادله‌ی است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.

[۱] Fredholm
[۲] Volterra
[۳] Integral equation

یک نمونه از یک معادله انتگرال به صورت

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{۱.۱}$$

است. که در آن $k(x,t), f(x)$ توابعی معلوم هستند و $u(x)$ تابع مجهول است که باید پیدا شود.

و در حالت کلی‌تر معادله (۱.۱) به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt,$$

که در آن $f(x)$ تابع پیشرو و $k(x,t)$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال توابعی معلوم هستند و $u(x)$ تابع مجهول است. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال و λ ضریبی معلوم است. اگر $\phi(x) \neq 0$ باشد با تقسیم طرفین معادله بر $\phi(x) \neq 0$ به معادله‌ی (۱.۱) می‌رسیم.

هدف، تعیین تابع مجهول $u(x)$ است بطوریکه در رابطه (۱.۱) صدق کند.

تعریف ۲.۱.۱. خاصیّت خطی بودن [۱]: یک معادله انتگرال را خطی گوییم در صورتی که بر حسب تابع مجهول $u(x)$ خطی باشد.

در غیر این صورت معادله انتگرال را غیرخطی می‌گوییم. معادلات انتگرال خطی به دو گروه متداول معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته‌بندی می‌شوند.

[۱] Linear property

تعریف ۳.۱.۱. معادله‌ی انتگرال خطی فردهلم [۱]: شکل استاندارد معادلات انتگرال فردهلم، به صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \leq x,t \leq b, \tag{۲.۱}$$

است که در آن a و b ثابت هستند. $k(x,t)$ و $f(x)$ توابعی معلوم و λ هم یک ضریب معلوم است. $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود.

معادله (۲.۱) می‌تواند به‌صورت زیر دسته بندی شود:

۱-زمانی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۲.۱) به معادله‌ی

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = ۰,$$

تبدیل می‌شود. این معادله را معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامیم.

۲-زمانی که $\phi(x) = ۱$ معادله (۲.۱) به فرم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

تبدیل می‌شود. این معادله را نیز معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گوییم.

تعریف ۴.۱.۱. معادله‌ی انتگرال خطی ولترا [۲]: شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا مانند معادلات فردهلم می‌باشد با این تفاوت که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری به جای عدد ثابت b به‌صورت متغیر x به فرم

[۱] Fredholm linear integral equation
[۲] Volterra linear integral equation

زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt. \tag{۳.۱}$$

در رابطه (۳.۱) تابع زیر علامت انتگرال بر حسب $u(x)$ خطی می‌باشد. باید توجه کرد که معادله‌ی را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به‌طوری‌که هسته‌ی $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی کرد:

۱- اگر $\phi(x) = ۰$ آنگاه معادله‌ی (۳.۱) به صورت

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = ۰,$$

تبدیل خواهد شد. به این نوع معادله‌ی انتگرال، معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول می‌گوییم.

۲- اگر $\phi(x) = ۱$ آنگاه معادله‌ی (۳.۱) به فرم زیر است:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt.$$

به این نوع معادله‌ی انتگرال، معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم می‌گوییم.

نکته ۵.۱.۱. در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع اول تابع مجهول $u(x)$ تنها به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

نکته ۶.۱.۱. در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک فاصله‌ی متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود، اما در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولا همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

از نگاهی دیگر می‌توان معادلات انتگرال را به دو دسته همگن و غیرهمگن تقسیم بندی کرد.

تعریف ۷.۱.۱. معادله‌ی همگن [۱]: اگر در معادلات انتگرال فردهلم و ولترا $f(x) = 0$ باشد آنگاه معادله‌ی حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامیم و در غیر این صورت معادله‌ی مورد نظر را یک معادله‌ی غیرهمگن می‌گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. معادله‌ی انتگرال منفرد [۲]: یک معادله انتگرال را منفرد گوییم، هرگاه انتگرال گیری ناسره باشد. این حالت معمولاً زمانی رخ می‌دهد که فاصله‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته‌ی معادله یا یکی از مشتقات آن در یک یا تعداد بیشتری نقطه از حوزه انتگرال‌گیری مورد نظر بی‌کران باشد.

تعریف ۹.۱.۱. هسته‌ی منظم [۳]: هسته‌ای که نامنفرد باشد یا به عبارت دیگر خود و مشتقاتش متناهی باشند را هسته‌ی منظم گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. برای $T > 0$ و m صحیح نامنفی، $V_m[0,T]$ را فضای نرم‌دار از توابع حقیقی مقدار f در نظر

[۱] Homogeneous equation
[۲] Singular integral equation
[۳] Regular kernel

می‌گیریم که $f \in C^m[0,T]$ و

$$\| f \|_m := \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \max_{t \in [0,T]} | f^{(j)}(t) | . \tag{4.1}$$

تعریف ۱.۱.۱۱. برای $T > 0$ ، $\beta \geqslant 0$ و عدد صحیح و نامنفی m، $V_{m,\beta}[0,T]$ را فضای نرم‌دار از توابع حقیقی مقدار f در نظر می‌گیریم که $t^\beta f \in V_m[0,T]$ و

$$\| f \|_{m,\beta} := \| t^\beta f \|_m = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \max_{t \in [0,T]} | \frac{d^j}{dt^j}(t^\beta f(t)) | . \tag{5.1}$$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید $m \geqslant 1$. در این صورت $f \in V_m^{\circ}[0,T]$ اگر وتنها اگر $f \in V_m[0,T]$ و

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(m-1)}(0) = 0,$$

در حالت $m = 0$ داریم $V_0^{\circ}[0,T] = V_0[0,T]$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید $m \geqslant 1$ و $\beta \geqslant 0$. در این صورت $f \in V_{m,\beta}^{\circ}[0,T]$ اگر وتنها اگر $t^\beta f \in V_m^{\circ}[0,T]$. در حالت $m = 0$ داریم $V_{0,\beta}^{\circ}[0,T] = V_{0,\beta}[0,T]$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید هسته K روی مجموعه

$$\Delta = \{(s,t); a \leqslant s,t \leqslant b\},$$

تعریف شده باشد، اگر $K \in L^2(\Delta)$ آنگاه $\lambda \in \mathbb{C}$ را **مقدار منظم** هسته K گوییم. هرگاه هسته $H_\lambda \in L^2(\Delta)$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$H_\lambda - K = \lambda K H = \lambda H_\lambda K, \tag{6.1}$$