[section] [section] [section] [section] [section] [section] [section]

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد گرایش متروید

عنوان:

هم - دورهای متروید شکافته شده

استاد راهنما:

دکتر قدرت الله آزادی

دانشجو:

مریم پاکرو

آبان ۹۱

با قدردانی زحمات بی دریغانه شان این تهفه کوچک را به

قلب دلسوز مادرم

و

دست های رنجور پدرم

تقدیم می کنم و از خواهرم، همسرم و مادر همسرم که در تهیه پایان

نامه کمکم کردند تشکر می کنم.

چکیده

در این پایان نامه هم-دورهای متروید شکافته شده و متروید عنصر شکافته را برحسب هم-دورهای متروید اولیه تعیین می کنیم.

مقدمه

این پایان نامه در چهار فصل اصلی نوشته شده است و هدف اصلی در این پایان نامه یافتن هم-دورهای ماتروید شکافته شده است.

فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه گراف و ماتروید اختصاص یافته است.

در فصل دوم نوعی از عمل شکافتن به نام عمل شکافتن تعمیم یافته در گراف ها معرفی می شود که زمینه ساز فصل های بعدی می باشد. ابتدا این عمل را روی گراف ها تعریف کرده و سپس به ماتروید-های دودویی تعمیم می دهیم و در ادامه به بررسی پایه ها و دورها و هم-پایه های ماتروید شکافته شده می پردازیم.

در فصل سوم که هدف اصلی این پایان نامه است هم-دورهای ماتروید شکافته شده را مورد بررسی قرار می دهیم.

در فصل چهارم عمل دیگری به نام عمل شکافتن نقطه ای را معرفی می کنیم. در ابتدا این عمل را در مورد گراف ها تعریف می کنیم و سپس ان را به ماترویدهای دودویی تعمیم می دهیم و در آخر هم-دورهای ماتروید به دست آمده از این عمل را که ماتروید عنصر شکافته نام دارد، مورد بررسی قرار می دهیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تنظیم شده است:

M. M. Shikare, H. Azanchiler and B. N. Waphare, The cocircuits of splitting matroids, Journal of the Indian Math. Soc. Vol. 74, Nos. 3-4(2007), 185-202

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا چند تعریف و قضیه از نظریه ی گراف [۱] و در ادامه چند تعریف و قضیه از نظریه ی متروید [۲] که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، ارائه می دهیم. مطالب مربوط به گراف از مرجع [۱۱] و مطالب مربوط به متروید از مرجع [۲] نقل شده اند.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه ی گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف G یک سه تایی است متشکل از یک مجموعه ی متناهی و غیر خالی $V(G)$ که اعضای آن رأس [۳] *های گراف و مجموعه ی* $E(G)$ *که اعضای آن یال* [۴] *های گراف* G *نامیده می شود و رابطه ای که به هر عضو* $E(G)$ *دو عضو از* $V(G)$ *را وابسته می کند.*

تعریف ۲.۱.۱ اگر $e = uv$ یک یال از G باشد، آنگاه u و v را رأس های انتهایی یال e گویند.

---

[۱] Graph Theroy

[۲] Matroid Theroy

[۳] Vertex

[۴] Edge

تعریف ۳.۱.۱ اگر $e = uu$ یک یال G باشد، e را طوقه [۵] و اگر رأس های انتهایی دو یال یکسان باشند ، آن ها را یال های موازی یا یال های چندگانه [۶] گویند.

تعریف ۴.۱.۱ *گراف ساده* [۷] گراف فاقد طوقه و یال های موازی می باشد.

تعریف ۵.۱.۱ گراف ساده ای را که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر متصل باشند، گراف کامل می نامند. گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می دهیم .

تعریف ۶.۱.۱ دو رأس u و v را *مجاور* [۸] گوییم هرگاه نقاط انتهایی یک یال باشند.

تعریف ۷.۱.۱ *مجموعهٔ مستقل* [۹] در یک گراف مجموعه رأسهایی است که دوبدو نامجاورند. گراف G *دوبخشی* [۱۰] است، هرگاه $V(G)$ به صورت اجتماع دو مجموعهٔ مستقل جدا از هم باشد.

تعریف ۸.۱.۱ یک گشت [۱۱] در گراف G دنباله ای از رأس ها و یال های G به صورت زیر است:

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

که در آن برای هر i ، v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند. هرگاه $v_0 = v_n$ گشت را بسته گویند. ه هیچ یالی در یک گشت تکرار نشود، آن را یک گذر [۱۲] گویند. یک مسیر [۱۳] گذری است که در آن

[۵] Loop

[۶] Multiple Edges

[۷] Simple Graph

[۸] Adjacent

[۹] Independent

[۱۰] Bipartite

[۱۱] Walk

[۱۲] Trail

[۱۳] Path

هیچ رأسی تکرار نشود. مسیر $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$ را که در آن رابطه ی $v_0 = v_n$ برقرار باشد، یک دور [۱۴] گویند. گراف بی دور [۱۵] گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱ در یک گراف دارای دور، طول کوتاهترین دور را کمر گراف می گویند و با $g(G)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف H را یک زیرگراف [۱۶] G گویند هرگاه داشته باشیم:

۱) $V(H) \subseteq V(G)$

۲) $E(H) \subseteq E(G)$

در این صورت آن را با $H \subseteq G$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ برای هر رأس $v \in V(G)$ درجه [۱۷] رأس v را تعداد یال های واقع بر آن رأس تعریف می کنیم و آن را با $d(v)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم G یک گراف فاقد طوقه با $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ باشد، ماتریس مجاورت [۱۸] G ماتریس$A = (a_{ij})_{n\times n}$ است که در آن a_{ij} تعداد یال های بین دو رأس v_i و v_j برای $i, j : 1, 2, \dots, n$ است.

Circuit[۱۴]

Acyclic[۱۵]

Sub Graph[۱۶]

Degree[۱۷]

Adjacency Matrix[۱۸]

تعریف ۱.۱.۱۳ ماتریس وقوع [۱۹] گراف G ماتریس $M=(m_{ij})_{n\times m}$ است که در آن سطرها متناظر با رأس ها و ستون ها متناظر با یال های گراف هستند و $m_{ij}=1$ اگر رأس v_i بر یال e_i واقع باشد،در غیر این صورت $m_{ij}=0$.

تعریف ۱.۱.۱۴ گراف G را *همبند* [۲۰] گویند، هرگاه هر زوج از رأسهایش متعلق به مسیری باشند. در غیر این صورت G را *ناهمبند* [۲۱] می نامند.

تعریف ۱.۱.۱۵ هر زیر گراف همبند ماکسیمال G را یک مولفه [۲۲] آن گویند. به عبارت دیگر گراف G همبند است اگر وتنها اگر G یک مولفه داشته باشد .

تعریف ۱.۱.۱۶ *همبندی*[۲۳] G که آن را با $\kappa(G)$ نمایش می دهیم عبارت است از کمترین تعداد رأس های ممکن که با حذف آن ها یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می شود.گراف G را یک گراف $\kappa-$ همبند گویند اگر $\kappa \geq \kappa(G)$.

تعریف ۱.۱.۱۷ رأس v از گراف G را رأس برشی [۲۴] گویند اگر تعداد مولفه های همبند $G-\{v\}$ بیشتر از تعداد مولفه های همبند G باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸ مجموعه برش رأسی مجموعه ای از رأس ها است به طوریکه با حذف آنها تعداد مولفه های گراف افزایش می یابد.

---

[۱۹] Incidence Matrix

[۲۰] Connected

[۲۱] Disconnected

[۲۲] Component

[۲۳] Connectivity

[۲۴] Cut Vertex

تعریف ۱۹.۱.۱ گراف جدانشدنی [۲۵] گراف همبند غیر بدیهی است که هیچ مجموعه ی برش رأسی نداشته باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱ در گراف همبند G مجموعه برش یالی [۲۶] ، مجموعه ای از یال ها است که با حذف آنها از G، G ناهمبند می شود.

تعریف ۲۱.۱.۱ یال e از گراف G را یک یال برشی [۲۷] یا یک پل گویند، هرگاه تعداد مولفه های $G-\{e\}$ یکی بیشتر از تعداد مولفه های G باشد.

قضیه ۲۲.۱.۱ یک یال از گراف G یال برشی است اگر و تنها اگر قسمتی از یک دور نباشد.

اثبات: به[[۱۱] ،قضیه۱۴.۲.۱] مراجعه شود.

تعریف ۲۳.۱.۱ یک *یکریختی*[۲۸] از یک گراف سادهٔ G به گراف سادهٔ H دوسویی $f: V(G) \to V(H)$ است، بطوریکه $uv \in E(G)$ اگر وتنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. می گوییم G با H یکریخت است و می نویسیم $G \cong H$ هرگاه یک، یکریختی از G به H وجود داشته باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ یک گراف بی دور را جنگل [۲۹] و گراف همبند بدون دور را درخت [۳۰] می نامیم. زیر *گراف فراگیر*[۳۱] G زیرگرافی از G با مجموعهٔ رئوس $V(G)$ است. هر زیر گراف فراگیر از گراف G

Nonseparable Graph[۲۵]

Cutset Edge[۲۶]

Cut Edge[۲۷]

Isomorphism[۲۸]

Forest[۲۹]

Tree[۳۰]

Spanning Subgraph[۳۱]

که یک درخت باشد را درخت *فراگیر* [۳۲] گراف G گویند.

تعریف ۲۵.۱.۱ در یک گراف G *انقباض* [۳۳] یال e با نقاط انتهایی u و v جایگزین کردن u و v با یک رأس است، بطوریکه یالهایی که بر این رأس واقع هستند همان یالهای u و v به جز e اند. گراف حاصل را با $G.e$ نمایش می دهیم که یک یال کمتر از G دارد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه ی ماترویید

تعریف ۱.۲.۱ یک *ماترویید* [۳۴] مانند M زوج مرتب $M = (S,\mathcal{I})$ است که در آن S یک مجموعهٔ متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه ای از زیر مجموعه های S است که در سه شرط زیر صدق می کند:

$(I1)$ $\emptyset \in \mathcal{I}$

$(I2)$ اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$ ، آنگاه $I' \in \mathcal{I}$

$(I3)$ اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_1| < |I_2|$ ، آنگاه عضوی مثل $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

اگر $M = (S,\mathcal{I})$ یک ماترویید باشد، آنگاه M را یک ماترویید روی S و S را *مجموعهٔ زمینه* [۳۵] ماترویید M گویند. اعضای $\mathcal{I}$ را *مجموعه های مستقل* [۳۶] M می نامیم.

زیر مجموعه هایی از S که در $\mathcal{I}$ نیستند مجموعه های وابسته [۳۷] نامیده می شود.

[۳۲] Spanning Tree

[۳۳] Contraction

[۳۴] Matroid

[۳۵] Ground Set

[۳۶] Independent Set

[۳۷] Dependent Set

تعریف ۲.۲.۱ هر زیر مجموعهٔ وابستهٔ مینیمال متروید M را یک دور[۳۸] آن گویند. مجموعه تمامی دورهای متروید M را با $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{C}$ نشان می دهیم.

قضیه ۳.۲.۱ گردایه دورهای متروید M دارای خواص زیر است:

$(C1$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$

$(C2$ اگر C_1 و C_2 عناصری از $\mathcal{C}$ باشند و $C_1 \subseteq C_2$ ، آنگاه $C_1 = C_2$

$(C3$ اگر C_1 و C_2 عناصر متمایزی از $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$ ، آنگاه عضوی از $\mathcal{C}$ مانند C_3 چنان موجود است که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

اثبات: به [[۲] نتیجه۱.۱.۵] مراجعه شود.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید S یک مجموعه و $\mathcal{C}$ یک گردایه از زیر مجموعه های S باشد که در سه خاصیت $C1$ و $C2$ و $C3$ صدق می کند. فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه ی تمامی زیرمجموعه های S باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند، در این صورت $(S, \mathcal{I})$ یک متروید است که $\mathcal{C}$ گردایه تمامی دورهای آن است.

اثبات:به [[۲] قضیه ۱.۱.۴] مراجعه شود.

گزاره ۵.۲.۱ فرض کنیم S مجموعه یالهای گراف G و $\mathcal{C}$ مجموعه تمامی دورهای G باشد، در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه دور های یک متروید روی S است.

اثبات: به [[۲] گزاره ۱.۱.۷]مراجعه شود.

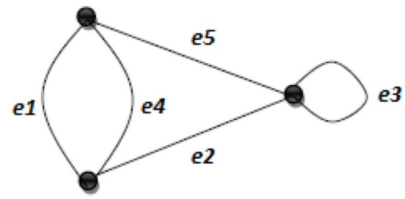
این متروید را با $M(G)$ نشان می دهند، و آن را *متروید دوری*[۳۹] گراف G گویند.

[۳۸] Circuit

[۳۹] Cyclematriod

تعریف ۶.۲.۱ دو مترويد $M_۱$ و $M_۲$ را یکریخت [۴۰] گویند و می نویسند $M_۱ \cong M_۲$ هرگاه تناظر یک به یک مانند $\psi : S(M_۱) \to S(M_۲)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq S(M_۱)$ ، $\psi(X)$ در $M_۲$ مستقل است، اگر وتنها اگر X در $M_۱$ مستقل باشد.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنید G گراف نشان داده شده در شکل ۱.۱ باشد، مترويد دوری حاصل از این



شکل ۱.۱: گراف G

گراف، مترويد $M = M(G)$ با مجموعهٔ زمینهٔ $S = \{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ می باشد، به علاوه

$$\mathcal{C} = \{\{e_۳\}, \{e_۱, e_۴\}, \{e_۱, e_۲, e_۵\}, \{e_۲, e_۴, e_۵\}\}$$

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_۱\}, \{e_۲\}, \{e_۴\}, \{e_۵\}, \{e_۱, e_۲\}, \{e_۱, e_۵\}, \{e_۲, e_۵\}, \{e_۲, e_۴\}, \{e_۴, e_۵\}\}$$

می باشد.

تعریف ۸.۲.۱ مترويد M را *مترويد گرافیک* [۴۱] *گوییم، هرگاه گرافی باشد که مترويد دوری آن یکریخت با M باشد.*

تعریف ۹.۲.۱ عضو e از مترويد M را یک طوقه گویند هرگاه $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ اگر e وf دو عضو متمایز مترويدM باشند و $\{e, f\}$ یک دور M باشد، آنگاه e و f را دو عضو موازی M گویند.

---

[۴۰] Isomorph

[۴۱] Graphic matroid

تعریف ۱۱.۲.۱ یک *کلاس موازی*[۴۲] از M زیرمجموعهٔ ماکسیمال X از $S(M)$ است که هر دو عضو آن موازیند و هیچ عضو آن یک طوقه نمی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ یک کلاس موازی را *بدیهی*[۴۳] گویند، هرگاه شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ اگر ماترويد M فاقد طوقه باشد و هیچ کلاس موازی غیر بدیهی نداشته باشد، آنگاه آن را یک *ماترويد ساده*[۴۴] گویند.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک مجموعهٔ مستقل ماکسیمال ماترويد M را یک *پایه*[۴۵] M گویند. گردایه همه پایه های M را با $\mathcal{B}(M)$ یا $\mathcal{B}$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه ای از زیرمجموعه های مجموعهٔ S باشد. در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه پایه های یک ماترويد روی S است، اگر وتنها اگر $\mathcal{B}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$

$(B2)$ هرگاه B_1 و B_2 عناصری از $\mathcal{B}$ باشند و $x \in B_1 - B_2$ ، آنگاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود داشته باشد بطوریکه: $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

اثبات: به [[۲] نتیجه ۵.۲.۱] مراجعه شود.

نتیجه ۱۶.۲.۱ فرض کنید B یک پایه M باشد، در اینصورت برای هر $e \in S - B$ ، $B \cup e$ شامل دوری یکتاست. این دور را دور اصلی e وابسته به پایه B گویند و با $C(e, B)$ نمایش می دهیم.

---

[۴۲] Parallel Class

[۴۳] Trivial

[۴۴] Simple Matroid

[۴۵] Basis

لم ۱۷.۲.۱ *اگر B_1 و B_2 دو پایه از ماترويد M باشند، آنگاه* $|B_2| = |B_1|$.

اثبات:به[[۲] لم ۱.۲.۱] مراجعه شود.

مثال ۱۸.۲.۱ فرض کنید S یک مجموعهٔ n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایهٔ تمامی زیرمجموعه های m عضوی S باشد که $0 \leq m \leq n$ ، در این صورت $\mathcal{B}$ گردایهٔ پایه های یک ماترويد روی S است. این ماترويد با $U_{m,n}$ نشان داده می شود وبه آن *ماترويد یکنواخت* [۴۶] گوییم.

تعریف ۱۹.۲.۱ فرض کنید $M = (S, \mathcal{I})$ یک ماترويد و $X \subseteq S$ باشد، *رتبهٔ* [۴۷] X در M رابا $r_M(X)$ یا $r(X)$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$r_M(X) = max\{|Y| :$ یک مجموعه مستقل است Y و $Y \subseteq X\}$.

رتبهٔ ماترويد M را با $r(M)$ نشان می دهیم که برابر با $r(S(M))$ می باشد.

قضیه ۲۰.۲.۱ فرض کنید S یک مجموعه باشد، تابع $r : 2^S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ تابع رتبهٔ یک ماترويد روی S است، اگر وتنها اگر r در شرایط زیر صدق کند:

R۱) اگر $X \subseteq S$ ، آنگاه $0 \leq r(X) \leq |X|$

R۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq S$ ، آنگاه $r(X) \leq r(Y)$

R۳) اگر X و Y زیر مجموعه های S باشند، آنگاه

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$$

این خاصیت را خاصیت شبه مدولاری گویند.

[۴۶] Uniform Matroid

[۴۷] Rank

اثبات: به [[۲] نتیجه ۴.۳.۱] مراجعه شود.

گزاره ۲۱.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید با تابع رتبهٔ r و $X \subseteq S(M)$ باشد در این صورت:

i) X مستقل است اگر وتنها اگر $r(X) = |X|$

ii) X یک پایهٔ M است اگر وتنها اگر $|X| = r(X) = r(M)$

iii) X یک دور M است اگر وتنها اگر غیر خالی باشد و برای هر $x \in X$ ، داشته باشیم:

$$r(X - x) = |X| - ۱ = r(X)$$

اثبات:به [[۲] گزاره ۵.۳.۱] مراجعه شود.

مثال ۲۲.۲.۱ در ماترویید $U_{m,n}$ داریم :

$$r(X) = \begin{cases} |X| & |X| \leq m \\ m & |X| > m \end{cases}$$

فرض کنید $M = M(G)$ که در آن G یک گراف است. اگر G همبند باشد، آن گاه یک پایه G مجموعه یالهای درخت فراگیر G است. بنابراین $r(M) = |V(G)| - ۱$ و اگر G ناهمبند باشد، آنگاه $r(M) = |V(G)| - \omega(G)$ که در آن $\omega(G)$ تعداد مولفه های G است.

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید روی S و r تابع رتبهٔ آن باشد. تابع $cl : ۲^S \to ۲^S$ را برای هر $X \subseteq S$ به این صورت تعریف می کنیم:

$$cl(X) = \{x \in S : r(X \cup x) = r(X)\}$$

این عملگر، *عملگر بستار*[۴۸] M نامیده می شود.

[۴۸] Closure Operator

قضیه ۲۴.۲.۱ فرض کنید S یک مجموعه و $cl : 2^S \to 2^S$ یک تابع باشد، در این صورت cl عملگر بستار یک ماترویید روی S است، اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(*CL*۱ اگر $X \subseteq S$ ، آنگاه $X \subseteq cl(X)$

(*CL*۲ اگر $X \subseteq Y \subseteq S$ ، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$

(*CL*۳ اگر $X \subseteq S$ ، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$

(*CL*۴ اگر $X \subseteq S$ و $x \in S$ ، و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ ، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$

اثبات: به [[۲] نتیجه ۷.۴.۱] مراجعه شود.

تعریف ۲۵.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید و $X \subseteq S(M)$ باشد. اگر $X = cl(X)$، آنگاه X را یک *فلت*[۴۹] M گویند. یک *ابرصفحه*[۵۰] ماترویید M یک فلت M از رتبهٔ $r(M) - 1$ است. همچنین $X \subseteq S(M)$ را یک *مجموعهٔ فراگیر*[۵۱] M گویند، هرگاه $cl(X) = S(M)$.

گزاره ۲۶.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید و $X \subseteq S(M)$ باشد. در این صورت:

(*i* X *یک مجموعهٔ فراگیر است، اگر وتنها اگر* $r(X) = r(M)$

(*ii* X *یک پایه است اگر وتنها اگر هم فراگیر و هم مستقل باشد.*

(*iii* X *یک پایه است اگر وتنها اگر یک مجموعهٔ فراگیر مینیمال باشد.*

(*iv* X *یک ابر صفحه است، اگر وتنها اگر یک مجموعهٔ غیر فراگیر ماکسیمال باشد.*

Flat[۴۹]

Hyperplane[۵۰]

Spanning Set[۵۱]

اثبات: به [[۲] گزاره ۹.۴.۱] مراجعه شود.

قضیه ۲۷.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید باشد و $\mathcal{B}^*(M) = \{S(M) - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$. در این صورت $\mathcal{B}^*(M)$ گردایهٔ پایه های یک ماترویید روی $S(M)$ است.

اثبات: به [[۲] قضیه ۱.۱.۲] مراجعه شود.

تعریف ۲۸.۲.۱ ماترویید حاصل در قضیهٔ قبل که دارای مجموعهٔ زمینهٔ $S(M)$ ، و گردایهٔ پایه هایش $\mathcal{B}^*(M)$ است، *دوگان* [۵۲] M نامیده می شود و آن را با M^* نمایش می دهیم.

تعریف ۲۹.۲.۱ پایه های M^* را هم *پایه های* [۵۳] M گویند. به همین ترتیب دورها، ابر صفحه ها، مجموعه های مستقل و مجموعه های فراگیر M^* را به ترتیب *هم-دورها* [۵۴] ، *هم-ابر صفحه ها* [۵۵] ، *مجموعه های هم- مستقل* [۵۶] و *مجموعه های هم-فراگیر* [۵۷] M گوییم.

گزاره ۳۰.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید روی S باشد، و $X \subseteq S$. در این صورت:

i) X *یک مجموعهٔ مستقل است، اگر وتنها اگر* $S - X$ *هم- فراگیر باشد.*

ii) X *یک مجموعهٔ فراگیر است اگر وتنها اگر* $S - X$ *هم-مستقل باشد.*

iii) X *یک ابر صفحه است اگر وتنها اگر* $S - X$ *هم-دور باشد.*

---

[۵۲] Dual

[۵۳] Cobases

[۵۴] Cocircuits

[۵۵] Cohyperplanes

[۵۶] Coindependent Sets

[۵۷] Cospanning Sets

iv) X *یک دور است اگر وتنها اگر* $S-X$ *یک هم-ابرصفحه باشد.*

اثبات: به [[۲] گزاره ۶.۱.۲] مراجعه شود.

گزاره ۳۱.۲.۱ فرض کنید S مجموعه ای از بردارها باشد، فرض کنیم $\mathcal{I}$ مجموعهٔ تمامی زیرمجموعه های مستقل خطی S باشد، در این صورت زوج $(S,\mathcal{I})$ یک ماترويد است.

اثبات: رجوع شود به[[۲] گزارهٔ ۱.۱.۱]

ماترويد حاصل را یک ماترويد برداری گویند و با $M[A]$ نشان می دهند.

فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ و $M[A]$ ماترويد برداری حاصل از A باشد، در این صورت مجموعه ی زمینه ی ماترويد $M[A]$ یعنی مجموعه ی S شامل برچسب های ستون های A است .

مثال ۳۲.۲.۱ فرض کنید

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

و $S = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه بردارهای ستونی ماتریس A باشد، در این صورت با قرار دادن

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱,۲\}, \{۱,۵\}, \{۲,۴\}, \{۲,۵\}, \{۴,۵\}\}$$

$M = (S,\mathcal{I})$ یک ماترويد است.گردایهٔ مجموعه های وابستهٔ این ماترويد عبارت است از:

$$\{\{۳\}, \{۱,۳\}, \{۱,۴\}, \{۲,۳\}, \{۳,۴\}, \{۳,۵\}\} \cup \{X \subseteq E : |X| \geq ۳\}$$

گردایهٔ تمامی مجموعه های وابستهٔ مینیمال این ماترويد عبارت است از:

$$\{\{۳\}, \{۱,۴\}, \{۱,۲,۵\}, \{۲,۴,۵\}\}$$