



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و

نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه

متعلق به دانشگاه رازی است.



دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی

فیزیک گرایش نظری

**سالیتون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون**

استاد راهنما:

دکتر کیومرث منصوری

نگارش:

افشار عبدی

شهریور ۱۳۹۱



دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی

فیزیک گرایش نظری

افشار عبدی

تحت عنوان

سالیتون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون

در تاریخ ۱۳۹۱/۰۶/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..... به تصویب نهایی رسید.

- |       |           |  |
|-------|-----------|--|
| امضاء | استاد یار | ۱- استاد راهنما دکتر کیومرث منصوری         |
| امضاء | دانشیار   | ۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمد وحیدتکوک |
| امضاء | استاد یار | ۳- استاد داور داخل گروه دکتر صمد بهروزی    |

به نام گسترش دهنده زیبایی ها

استاد عزیز: دکتر کیومرث منصوری

شایسته و بایسته است از زحمات شما استاد گرانقدر سپاس و قدردانی نموده

و با آرزوی سلامتی و زندگی بهتر برای شما مراتب ادب و احترام را

رعایت نمایم.

تقدیم به:

هر آنکس که دوست دارد بفهمد و وجودش سرشار از عشق آموختن است.

## چکیده:

اساس کار حل معادله غیر خطی پواسون در داخل پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون است. ابتدا معادله پواسون را در داخل پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون به دست می آوریم مشاهده می گردد که معادله به دست آمده یک معادله دیفرانسیل غیر خطی است. با در نظر گرفتن جملات غیر خطی در معادله پواسون معادلات  $kdv$  ظهور می کنند یا به عبارتی دیگر با در نظر گرفتن جملات غیر خطی سالیتون ظهور می کند. به طوری که اگر معادله پواسون فقط شامل جمله غیر خطی درجه ۲ باشد معادله دیفرانسیل غیر خطی ای به دست می آید که به آن معادله  $kdv$  مرتبه اول (معادله  $kdv$ ) گفته می شود و جواب آن یک سالیتون  $kdv$  مرتبه اول ( $kdv$ ) می باشد و اگر معادله پواسون فقط شامل جمله غیر خطی درجه ۳ باشد معادله دیفرانسیل غیر خطی ای به دست می آید که به آن معادله دیفرانسیل غیر خطی  $mkdv$  گفته می شود و جواب آن یک سالیتون  $mkdv$  می باشد بایستی به خاطر داشته باشیم که سالیتون  $mkdv$  در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون تشکیل نمی شود و اگر معادله پواسون فقط شامل جمله های غیر خطی درجه ۲ و ۳ باشد معادله دیفرانسیل غیر خطی ای به دست می آید که به آن معادله  $kdv$  مرتبه دوم (معادله  $gkdv$ ) گفته می شود و جواب آن یک سالیتون  $kdv$  مرتبه دوم ( $gkdv$ ) می باشد. و اگر معادله پواسون فقط شامل جمله های غیر خطی درجه ۲ و ۳ و ۴ باشد معادله دیفرانسیل غیر خطی ای به دست می آید که به آن معادله  $kdv$  مرتبه سوم گفته می شود و جواب آن یک سالیتون  $kdv$  مرتبه سوم می باشد و اگر معادله پواسون فقط شامل جمله های غیر خطی درجه ۲ و ۳ و ۴ و ۵ باشد معادله دیفرانسیل غیر خطی ای به دست می آید که به آن معادله  $kdv$  مرتبه چهارم گفته می شود و جواب آن یک سالیتون  $kdv$  مرتبه چهارم می باشد و ..... پس از به دست آوردن معادلات  $kdv$ ، معادله  $kdv$  مرتبه اول و معادله  $kdv$  مرتبه دوم را به صورت تحلیلی حل کرده و جواب آنها را بدست می آوریم. سپس شرایط تشکیل سالیتون های  $kdv$  را بررسی کرده دامنه و پهنای موج سالیتونی  $kdv$  را به دست آورده و تاثیر پارامترهایی مثل دما و چگالی را بر دامنه و پهنای موج سالیتونی  $kdv$  مورد بررسی قرار می دهیم.

جواب معادله پواسون در حالت کلی یک سالیتون می باشد معادله پواسون را در حالت کلی نمی توان به صورت تحلیلی حل کرد به همین دلیل به کمک کامپیوتر و با استفاده از نرم افزار ویزوال فرترن به ازای  $p, T_e / T_p$  مشخص، عدد ماخ و به تبع آن دامنه موج سالیتونی را به دست می آوریم در ادامه به ازای  $p, M, \phi_0, T_e / T_p$  معادله پواسون را در حالت کلی به کمک کامپیوتر حل کرده (با استفاده از روش تفاضل محدود، روش اولر) و تاثیر دما و چگالی را بر دامنه و پهنای موج سالیتونی مورد بررسی قرار می دهیم و سر انجام معادلات  $kdv$  را به روش عددی حل می کنیم.

کلمات کلیدی: معادله کرتوگ دوریس، معادلات غیر خطی، سالیتون، سالیتون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون.



## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	<b>فصل اول: سالیتون</b>
۲	۱-۱- تاریخچه سالیتون
۳	۲-۱- حل اساسی معادله کرتوگ دوریس
۸	۱-۲-۱- حل استاتیکی معادله کرتوگ دوریس
۹	<b>فصل دوم: پلاسما</b>
۱۰	۱-۲- حدوث پلاسما در طبیعت
۱۱	۲-۲- تعریف پلاسما
۱۲	۳-۲- مفهوم دما
۱۶	۴-۲- طول دبای در پلاسمای یون-الکترون
۱۶	۱-۴-۲- طول دبای در پلاسمای یون-الکترون با فرض اینکه $kT_i = 0$
۲۲	۲-۴-۲- طول دبای در پلاسمای یون-الکترون با فرض اینکه $kT_i \neq 0$
۲۲	۵-۲- پارامتر پلاسما
۲۳	۶-۲- معیارهای پلاسما
۲۳	۷-۲- کاربردهای فیزیک پلاسما
۲۴	۱-۷-۲- تخلیه گازی ( الکترونیک گازی )
۲۴	۲-۷-۲- همجوشی گرما هسته ای کنترل شده
۲۴	۳-۷-۲- فیزیک فضا
۲۵	۴-۷-۲- اختر فیزیک نوین
۲۵	۵-۷-۲- تبدیل انرژی مگنتوهیدرودینامیک و پیشرانش یونی
۲۶	۶-۷-۲- پلاسماهای حالت جامد
۲۶	۷-۷-۲- لیزرهای گازی
۲۷	۸-۲- روش های تقریبی توصیف پلاسما
۲۸	۹-۲- معادله حرکت سیال در پلاسما
۲۹	۱۰-۲- امواج صوتی
۳۱	۱۱-۲- امواج یونی در پلاسمای یون-الکترون
۳۴	۱۲-۲- اعتبار تقریب پلاسمایی برای پلاسمای یون-الکترون

۳۷	فصل سوم: معادله پواسون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۳۸	۳-۱- سالیتون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۴۰	۳-۲- معادله پواسون در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۴۱	۳-۳- به دست آوردن چگالی یون ها در داخل غلاف
۴۶	۳-۴- معادله دیفرانسیل حاکم بر پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۰	۳-۵- محاسبه پتانسیل سقدی اف در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۱	۳-۶- شرط وجود جواب سالیتونی در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۱	۳-۷- محدوده عدد $p$ برای پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۲	۳-۸- شرط وجود جواب سالیتونی در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۲	۳-۹- رابطه بین عدد ماخ و دامنه موج سالیتونی
۵۲	۳-۱۰- تاثیر دما و چگالی بر دامنه و پهنای موج سالیتونی
۵۳	۳-۱۰-۱- محدوده عدد ماخ و دامنه موج سالیتونی برای پلاسمای یون-الکترون
۵۴	۳-۱۰-۲- محدوده عدد ماخ و دامنه موج سالیتونی برای پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۵۸	۳-۱۱- طریقه رسم تابع موج سالیتونی برای پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون

#### ۶۶ فصل چهارم: معادلات کرتوگ دوریس و حل تحلیلی آن ها

۶۷	۴-۱- حل تحلیلی معادله $kdv$ در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۷۱	۴-۲- دامنه و پهنای موج $kdv$ در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۷۱	۴-۳- طریقه به دست آوردن دامنه موج $kdv$ بدون حل معادله موج سالیتونی
۷۲	۴-۴- تاثیر $p, T$ بر دامنه و پهنای موج سالیتونی
۷۵	۴-۵- رسم تابع موج سالیتونی $kdv$ در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۸۲	۴-۶- حل تحلیلی معادله $mkdv$
۸۳	۴-۷- طریقه به دست آوردن دامنه موج $mkdv$ بدون حل معادله موج سالیتونی
۸۵	۴-۸- حل تحلیلی معادله $gkdv$ در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون
۹۰	۴-۹- دامنه و پهنای موج سالیتونی $gkdv$
۹۲	۴-۱۰- طریقه به دست آوردن دامنه موج $gkdv$ بدون حل معادله موج سالیتونی
۹۳	۴-۱۱- تاثیر $p, T$ بر دامنه و پهنای موج سالیتونی
۹۵	۴-۱۲- رسم تابع موج سالیتونی $gkdv$ در پلاسمای یون-الکترون-پوزیترون

## فصل پنجم: حل عددی معادلات کرتوگ دوریس

۱۰۲

۱-۵- حل عددی معادله پواسون در حالت کلی

۱۰۳

۲-۵- حل عددی معادله کرتوگ دوریس مرتبه اول

۱۰۶

۳-۵- حل عددی معادله کرتوگ دوریس مرتبه دوم

۱۰۹

۴-۵- حل عددی معادله کرتوگ دوریس مرتبه سوم

۱۱۲

۵-۵- حل عددی معادله کرتوگ دوریس مرتبه چهارم

۱۱۶

پیوست:

۱۲۱

مراجع:

۱۳۱

## فهرست شکل ها

صفحه	عنوان
	فصل سوم:
۵۹	شکل ۱-۳
۵۹	شکل ۲-۳
۶۰	شکل ۳-۳
۶۰	شکل ۴-۳
۶۱	شکل ۵-۳
۶۱	شکل ۶-۳
۶۲	شکل ۷-۳
۶۲	شکل ۸-۳
۶۳	شکل ۹-۳
۶۳	شکل ۱۰-۳
۶۴	شکل ۱۱-۳
۶۴	شکل ۱۲-۳
۶۵	شکل ۱۳-۳
	فصل چهارم:
۷۵	شکل ۱-۴
۷۶	شکل ۲-۴
۷۶	شکل ۳-۴
۷۷	شکل ۴-۴
۷۷	شکل ۵-۴
۷۸	شکل ۶-۴
۷۸	شکل ۷-۴
۷۹	شکل ۸-۴
۷۹	شکل ۹-۴
۸۰	شکل ۱۰-۴
۸۰	شکل ۱۱-۴
۸۱	شکل ۱۲-۴
۹۵	شکل ۱۳-۴

۹۶  
۹۶  
۹۷  
۹۷  
۹۸  
۹۸  
۹۹  
۹۹  
۱۰۰  
۱۰۰  
۱۰۱

شکل ۴-۱۴  
شکل ۴-۱۵  
شکل ۴-۱۶  
شکل ۴-۱۷  
شکل ۴-۱۸  
شکل ۴-۱۹  
شکل ۴-۲۰  
شکل ۴-۲۱  
شکل ۴-۲۲  
شکل ۴-۲۳  
شکل ۴-۲۴

#### فصل پنجم:

۱۰۴  
۱۰۴  
۱۰۵  
۱۰۷  
۱۰۸  
۱۰۸  
۱۱۰  
۱۱۰  
۱۱۱  
۱۱۴  
۱۱۴  
۱۱۵  
۱۱۸  
۱۱۸

شکل ۵-۱  
شکل ۵-۲  
شکل ۵-۳  
شکل ۵-۴  
شکل ۵-۵  
شکل ۵-۶  
شکل ۵-۷  
شکل ۵-۸  
شکل ۵-۹  
شکل ۵-۱۰  
شکل ۵-۱۱  
شکل ۵-۱۲  
شکل ۵-۱۳  
شکل ۵-۱۴

## فهرست جدول ها

صفحه	عنوان
	فصل سوم:
۵۴	جدول ۱-۳
۵۴	جدول ۲-۳
۵۵	جدول ۳-۳
۵۵	جدول ۴-۳
۵۶	جدول ۵-۳
۵۶	جدول ۶-۳
۵۷	جدول ۷-۳
۵۷	جدول ۸-۳
	فصل چهارم:
۷۲	جدول ۱-۴
۷۳	جدول ۲-۴
۷۳	جدول ۳-۴
۷۴	جدول ۴-۴
۹۳	جدول ۵-۴
۹۴	جدول ۶-۴
۹۴	جدول ۷-۴
۹۴	جدول ۸-۴

# فصل اول:

سالتون

## ۱-۱- تاریخچه سالیتون

وقوع سالیتون را اولین بار اسکات راسل مهندس راه و ساختمان انگلیسی در ۱۸۳۴ گزارش داد، درک نظری مشاهده راسل تا سال ۱۸۹۵ به تاخیر افتاد تا اینکه مطالعات کورتوگک و دوریس به معادله ای انجامید که امروزه به نام این دو نفر مشهور است به طور اختصار آن را معادله  $kdv$  می نامند. توصیف اسکات راسل که اکنون معروف است چنین بود: قایقی را نگاه می کردم که دو اسب آن را در کانال باریکی به سرعت می کشیدند که ناگهان متوقف شد اما توده آبی که قایق در کانال به حرکت در آورده بود متوقف نشد بلکه در حالتی متلاطم اطراف دماغه قایق انباشته شد سپس قایق را پشت سر گذاشت و با سرعت زیادی جلو رفت و به شکل یک برآمدگی بزرگ منفرد درآمد و به شکل توده ای مشخص گرد و هموار از آب به راه خود در کانال ادامه داد بدون اینکه شکل یا سرعت خود را از دست دهد. سوار بر اسب آن را دنبال کردم و از آن که هنوز با سرعتی حدود هشت یا نه مایل به پیش می رفت و شکل اولیه اش را به طول سی فوت و ارتفاع یک یا یک و نیم فوت حفظ کرده بود جلو زدم. ارتفاع آن به تدریج کم می شد و پس از یک یا دو مایل تعقیب آن را در یک پیچ و خم کانال گم کردم.

معادله های خطی شرایط ایده ال را نشان می دهند ایده ال سازی به معنای آن است که اگر چه برای سادگی چیزهایی در نظر گرفته نشده اند اما مدل ایده ال جنبه های اساسی وضعیت فیزیکی را در بردارد. نتایجی که با خطی کردن یعنی با کنار گذاشتن جمله های غیر خطی بدست می آیند اغلب آن قدر از واقعیت به دور هستند که مفید نمی باشند. مخصوصا این که خطی کردن پدیده ای اساسی همچون سالیتون را در نظر نمی گیرد. سالیتون ها امواج یا تپهای منفردی هستند که هویت خود را به طور نامحدود حفظ می کنند در حالی که انتظار داریم آنها به دلیل اثرات پاشندگی به سرعت از بین بروند به علاوه امواج آب مدل بسیاری از پدیده های فیزیکی غیر خطی هستند که با پیشرفت فناوری اهمیت روز افزونی یافته اند. پیدایش تپ های منظم و پایدار بر اثر غیر خطی بودن از پدیده های شگفت انگیز علم بوده است. همه پدیده های فیزیکی در دامنه های به اندازه کافی بزرگ غیر خطی می شوند. فیزیکدانان نظری احتمالا برای مدتی طولانی از مسائلی که غیر خطی بودن را به همراه می آورد اجتناب می کردند. غیر خطی بودن اغلب به رفتار آشوبناک می انجامد با این حال پیامدهای منظمی مثل سالیتون هم امکان پذیر است. پایداری سالیتون ها را می توان به دلیل ترکیب اثرات پاشندگی و غیر خطی تاحدودی درک کرد.

برای سیستم های غیر پاشنده (پاشندگی خطی)، سرعت فاز ثابت است. چون رابطه پاشندگی خطی است همه مولفه های موج با یک سرعت (سرعت فاز) حرکت می کنند و سیگنال شکل اولیه اش را حفظ می کند به عبارتی مولفه ها پاشیده نمی شوند. از طرف دیگر در مواقعی که رابطه پاشندگی غیر خطی است مولفه های



هماهنگ مختلف با سرعت های (فاز) مختلف حرکت می کنند و سیگنال پاشیده می شود انرژی سیگنال هم پاشیده می شود سیستم پاشنده است.

### ۱-۲- حل اساسی معادله کرتوگ دوریس

شکل استاندارد معادله کرتوگ دوریس:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1-1)$$

$$u = u(x, t)$$

امواج نسبتا بلند آب واقعا از رابطه بالا پیروی می کنند.

$$u(x, t) = f(\xi) \quad (1-2)$$

$$\xi = x - ct \quad (1-3)$$

حل:

(1-4)

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\xi = x - ct \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u(x, t) = f(\xi)$$

(1-5)

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -c \frac{\partial u}{\partial \xi} = -c \frac{\partial f}{\partial \xi} = -cf_{\xi} = -cf'$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} = f_{\xi} = f'$$

$$u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = f_{\xi\xi\xi} = f'''$$

$$\rightarrow -cf' - 6ff'' + f''' = 0 \quad (1-6)$$

$$-c \frac{df}{d\xi} - 6f \frac{df'}{d\xi} + \frac{df''}{d\xi} = 0$$

$$-cf - 3f^2 + f''' = A \quad \xi \rightarrow \mp\infty : f, f', f'' = 0 \rightarrow A = 0$$

$$-cf - 3f^2 + \frac{df'}{d\xi} = 0 \rightarrow -cf - 3f^2 + \frac{df}{d\xi} \frac{df'}{df} = 0$$

$$-cf - 3f^2 + f' \frac{df'}{df} = 0 \rightarrow f' \frac{df'}{df} = cf + 3f^2$$

$$f' df' = (cf + 3f^2) df \rightarrow \frac{1}{2} (f')^2 = f^3 + \frac{1}{2} cf^2 + B$$

$$\xi \rightarrow \mp\infty : f, f', f'' = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\frac{1}{2} (f')^2 = f^3 + \frac{1}{2} cf^2$$

$$(f')^2 = 2f^3 + cf^2$$

$$(f')^2 = f^2(2f + c)$$

$$f' = \mp f (2f + c)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{df}{d\xi} = \mp f (2f + c)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{df}{f (2f + c)^{\frac{1}{2}}} = \mp \int d\xi \rightarrow \int \frac{df}{f (c(\frac{2f}{c} + 1))^{\frac{1}{2}}} = \mp \int d\xi \rightarrow \int \frac{df}{c^{\frac{1}{2}} f (1 + \frac{2f}{c})^{\frac{1}{2}}} = \mp \int d\xi$$

$$\int \frac{df}{c^{\frac{1}{2}} f (1 + \frac{2f}{c})^{\frac{1}{2}}} = \int d\xi \rightarrow \int \frac{df}{c^{\frac{1}{2}} f (1 + \frac{2f}{c})^{\frac{1}{2}}} = \xi - x_0 \quad (1-7)$$

$$u = \frac{2f}{c} \rightarrow du = \frac{2}{c} df \rightarrow df = \frac{c}{2} du$$

$$\int \frac{df}{c^{\frac{1}{2}} f \left(1 + \frac{2f}{c}\right)^{\frac{1}{2}}} = x-ct - x_0 \rightarrow \int \frac{\frac{c}{2} du}{c^{\frac{1}{2}} \frac{c}{2} u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = x-ct - x_0$$

$$\int \frac{du}{c^{\frac{1}{2}} u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = x-ct - x_0 \rightarrow \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \int \frac{du}{u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = x-ct - x_0$$

$$\int \frac{du}{u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = c^{\frac{1}{2}} (x-ct - x_0)$$

$$\int \frac{du}{u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = ?$$

$$u = \sinh^2 \theta \rightarrow du = 2 \sinh \theta \cosh \theta d\theta$$

$$: \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \rightarrow 1 - \tanh^2 \theta = \operatorname{sech}^2 \theta$$

$$: \frac{d}{d\theta} \sinh \theta = \cosh \theta, \quad \frac{d}{d\theta} \cosh \theta = \sinh \theta$$

$$\int \frac{du}{u(1+u)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2 \sinh \theta \cosh \theta d\theta}{\sinh^2 \theta (1 + \sinh^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2 \sinh \theta \cosh \theta d\theta}{\sinh^2 \theta \cosh \theta} = \int \frac{2 d\theta}{\sinh \theta} =$$

$$= \int \frac{2 \sinh \theta d\theta}{\sinh \theta \sinh \theta} = \int \frac{2 \sinh \theta d\theta}{\sinh^2 \theta} = \int \frac{2 \sinh \theta d\theta}{\cosh^2 \theta - 1} =$$

$$: \cosh \theta = k \rightarrow -\sinh \theta d\theta = dk \rightarrow \sinh \theta d\theta = -dk$$

$$= - \int \frac{2 dk}{k^2 - 1} = \int \frac{2 dk}{1 - k^2}$$

$$\int \frac{dk}{1 - k^2} = ?$$

انتگرال بالا را به روش تجزیه کسرها به دست می آوریم:

$$\frac{1}{1-k^2} = \frac{A}{1-k} + \frac{B}{1+k}$$

$$= \frac{(A-B)k + B + A}{1-k^2}$$

$$\rightarrow A - B = 0 \rightarrow A = B$$

$$\rightarrow B + A = 1$$

$$\rightarrow 2B=1 \rightarrow B = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dk}{1-k^2} = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-k} dk + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+k} dk = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-k} dk + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+k} dk =$$

$$= \frac{-1}{2} \ln(1-k) + \frac{1}{2} \ln(1+k) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k}{1-k}$$

$$\rightarrow \int \frac{2dk}{1-k^2} = \ln \frac{1+k}{1-k}$$

$$\ln \frac{1+k}{1-k} = c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0) \rightarrow \frac{1+k}{1-k} = e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+k = (1-k)e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} \rightarrow 1+k = e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - k e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} \rightarrow$$

$$k + k e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} = e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - 1 \rightarrow k(1 + e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)}) = e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - 1$$

$$k = \frac{e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - 1}{1 + e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)}} \rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} (e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - e^{-\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)})}{e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} (e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} + e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)})} \rightarrow$$

$$k = \frac{(e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} - e^{-\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)})}{(e^{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)} + e^{-\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)})} \rightarrow k = \tanh \frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(x-ct-x_0)$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \rightarrow \cosh^2 \theta = 1 + \sinh^2 \theta \rightarrow \cosh \theta = \sqrt{1 + \sinh^2 \theta}$$

$$u = \sinh^2 \theta, \quad \cosh \theta = k$$

$$\rightarrow k = \sqrt{1+u}$$